Eckhart Library

Class *Book*

University of Chicago Library

BERLIN COLLECTION

GIVEN BY

MARTIN A. RYERSON
H. H. KOHLSAAT — BYRON L. SMITH
CHAS. L. HUTCHINSON — C. R. CRANE
H. A. RUST — CYRUS H. McCORMICK
A. A. SPRAGUE — C. J. SINGER

J. Eichler

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,
Lehrer am Gymnasium zu Parchim.

Elemente der Planimetrie.

Dessau, 1860.
Aue'sche Buchhandlung.
(Moritz Fels.)
Verlags-Conto.

QA 39
.G 368

Berlin Collection

1091977

Elemente

der

Planimetrie.

Vorwort.

Vorliegender Theil enthält die Elemente der Planimetrie, so weit dieselben für den Schulunterricht geeignet sind, also zunächst die Euklidische Planimetrie, und außerdem noch einige Fragmente aus den Entdeckungen der neueren Zeit, damit nicht erstere dieses ganze Gebiet abzuschließen scheine. Dieser Stoff ist in der Art bearbeitet, daß in den spätern Capiteln eine kürzere Form des Ausdrucks, als in den erstern, gewählt, dabei aber überall eine deutliche und gründliche Behandlung angestrebt worden ist. Die gründliche Behandlung muß natürlich immer relativ sein, da sie die Fassungskraft der Schüler zu berücksichtigen hat, und darf nie so weit gehen, daß den Anfängern, die bekanntlich ihre Kenntnisse vor Allem nach der Breite, erst später nach der Tiefe ausdehnen wollen, die Wissenschaft dadurch verleidet werde. Daher hält es auch der Verfasser für gerechtfertigt in didaktischer Beziehung, z. B. schon im vierten Capitel an geeigneter Stelle darauf Bezug zu nehmen, daß eine gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten durchschneidet, obgleich dieser Satz erst im siebenten Capitel bewiesen wird, denn nur der an mathematisches Denken gewöhnte Schüler vermag die Nothwendigkeit eines Beweises für diesen Satz einzusehen, während der Anfänger jeden Zweifel an der Wahrheit desselben für einen unzeitigen Scherz hält.

Da ein genaues Verständniß der einzelnen Sätze erst durch die Anwendung erreicht wird, so sind jedem Capitel Uebungssätze beigefügt. Es ist jedoch nicht beabsichtigt, daß z. B. die Uebungssätze des vierten Capitels sogleich nach Erklärung desselben gelöst werden, sondern es soll durch diese Vertheilung bloß angedeutet werden, welche Capitel zur Lösung ausreichend sind. Die schriftliche Lösung ist vorzuziehen, damit neben der Klarheit des Gedankens auch die Präcision des Ausdrucks geübt werde, wenngleich die ersten Versuche sehr mangelhaft auszufallen pflegen.

In Bezug auf die Anordnung des Stoffes ist Folgendes zu bemerken. In den ersten sieben Capiteln werden die Bedingungen gesucht, unter welchen zwei Linien oder zwei Winkel (entweder selbstständig, oder als Theile zweier beliebiger Figuren,) oder endlich zwei geradlinige Figuren vollständig übereinstimmen, also congruent sind. An diese sieben Capitel schließt sich alsdann das achte über Gleichheit der Figuren naturgemäß an, da man durch verschiedene Zusammenstellung der einzelnen Theile congruenter Figuren zum Begriffe der gleichen Größe gelangt. Mit diesem Capitel hört die rein geometrische Behandlung auf und es wird die Arithmetik zu Hülfe genommen. Bei der Anordnung des Folgenden ist die Inhaltsbestimmung der Figuren der Proportionalität der Linien und der Aehnlichkeit der Figuren vorangestellt, weil sich letztere Capitel weit gründlicher behandeln lassen, wenn schon von den Inhaltsbestimmungen die Rede gewesen ist, während im entgegengesetzten Falle viele zusammengehörige Sätze und Anwendungen hätten auseinandergerissen werden müssen. Endlich ist die Quadratur des Kreises durch eine genaue Entwickelung der Formeln für die Inhalte und Umfänge der regulären Figuren eingeleitet, da nur hierdurch das Endresultat zum klaren Bewußtsein kommt, wenn es auch etwas verzögert wird.

Den Preis des Buches haben die Herren Verleger trotz der durch die Holzschnitte vermehrten Unkosten so gestellt, daß wenigstens in dieser Beziehung den Bedürfnissen der Schule vollständig genügt ist.

Dessau, August 1853.

H. Gerlach.

Inhalt.

Planimetrie.

Seite.

Einleitung 1
Erstes Capitel. Von den Linien und Winkeln im Allgemeinen . 3
Zweites Capitel. Von den parallelen, convergenten und divergenten geraden Linien 5
Drittes Capitel. Von den Dreiecken im Allgemeinen 9
Viertes Capitel. Von der Congruenz der Dreiecke 13
Fünftes Capitel. Von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen 19
Sechstes Capitel. Von den Vielecken 25
Siebentes Capitel. Vom Kreise 27
A. Von den Linien und Winkeln im Kreise 28
B. Von den Tangenten 32
C. Von den um und in den Kreis beschriebenen Vielecken 34
D. Von den Beziehungen zwischen zwei Kreisen . . 37
Achtes Capitel. Von der Gleichheit der ebenen Figuren . . . 42
Neuntes Capitel. Von der Ausmessung der geraden Linien und der ebenen Figuren 48
A. Ausmessung der Linien 50
B. Ausmessung oder Inhaltsbestimmung der ebenen Figuren 52
Zehntes Capitel. Der pythogoräische Lehrsatz 58
Elftes Capitel. Von den proportionirten Linien und von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke . 70
A. Proportionirte Linien 70
B. Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke 74
C. Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren 79

Seite.
Zwölftes Capitel. Von den Proportionen beim Kreise 85
Anhang zum elften und zwölften Capitel 91
A. Von den Transversalen des Dreiecks 91
B. Von den harmonischen Punkten 97
C. Von den Potenzlinien der Kreise 101
Dreizehntes Capitel. Von der Bestimmung des Umfanges und Inhaltes der regulären Vielecke und des Kreises 104
A. Umfang und Inhalt der regulären Vielecke . . . 104
B. Rectification und Quadratur des Kreises. . . . 109
Vierzehntes Capitel. Von vermischten geometrisch-algebraischen Aufgaben und von der geometrischen Construction algebraischer Formeln 114
A. Geometrisch-algebraische Aufgaben 114
B. Geometrische Construction algebraischer Formeln 120

Berichtigungen.

Seite 1 §. 2 Zeile 3 lies mehreren statt mehrere.
„ 6, 7 und 8 lies jedesmal: die auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegen, statt: die nicht Nebenwinkel sind.
„ 23 Zeile 7 lies nach ∠ bfh und ∠ bhf das Zeichen =.
„ 24 „ 1 von unten lies Seiten statt Höhen.
„ 30 „ 1 „ „ „ 2y statt y.
„ 34 „ 6 „ oben „ x+z statt x+r.
„ 48 Aufgabe 21 lies Grundlinie statt Umfang.
„ 50 Zeile 1 von oben lies gültigen für gültige.
„ 59 „ 8 „ oben ist clg zu streichen.
„ 61 „ 6 „ unten lies Summe der statt Summe die.
„ 62 „ 8 „ oben lies nennt man statt nennt mit.
„ 86 „ 12 „ unten lies geschnittene für geschnittenen.

Geometrie.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Alles, was einen Raum einnimmt, nennt man Körper. Ein Körper wird begränzt durch Flächen, eine Fläche durch Linien, eine Linie durch Punkte. Ein Körper erstreckt sich nach Länge, Breite und Tiefe, hat also drei Ausdehnungen; eine Fläche nach Länge und Breite, eine Linie nur nach der Länge. Ein Punkt hat als Begränzung einer Linie weder Länge, noch Breite, noch Tiefe, also gar keine Ausdehnung.

§. 2. Erklärung.

Die Linien sind entweder gerade, gebrochene oder gekrümmte Linien. Eine gerade Linie ändert ihre Lage nicht, wenn man sie um zwei ihrer Punkte dreht. Eine gebrochene Linie ist aus mehrere geraden Linien zusammengesetzt, ohne jedoch selbst gerade zu sein. Die übrigen Linien heißen gekrümmt. Eine Linie kann vollständig begränzt, halb begränzt, unbegränzt, oder in sich zurücklaufend sein.

§. 3. Erklärung.

Die Flächen sind ebenfalls entweder gerade oder ebene, oder sie sind gebrochen oder gekrümmt. Bei der ebenen Fläche oder Ebene fallen sämmtliche geraden Verbindungslinien je zweier Punkte vollständig mit der Fläche zusammen; die gebrochene Fläche ist aus

verschiedenen Ebenen zusammengesetzt, ohne selbst eine Ebene zu sein; die übrigen Flächen heißen gekrümmt. Eine Fläche kann vollständig, oder theilweise begränzt, oder in sich zurücklaufend sein. Eine vollständig begränzte Fläche heißt Figur.

§. 4. Erklärung.

Die Geometrie zerfällt in Planimetrie und Stereometrie. Die Planimetrie beschäftigt sich mit denjenigen Linien und Figuren, welche in einer Ebene liegen, die Stereometrie mit Körpern und solchen Flächen und Linien, welche nicht in einer Ebene liegen.

§. 5. Erklärung.

Die in der Arithmetik entwickelten Grundsätze, Gleichungen und Ungleichungen gelten für die Geometrie, wie sie für benannte Zahlen gelten. Die wichtigsten dieser Sätze sind:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Sind zwei Größen gleich einer dritten, so sind sie sich selbst gleich.
3) Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.
4) Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.
5) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.
6) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.
7) Das Ganze ist größer als sein Theil.
8) Ist eine Größe gleich einer andern und diese kleiner als eine dritte, so ist auch erstere kleiner als die dritte.
9) Ist eine Größe kleiner als eine zweite und diese kleiner als eine dritte, so ist auch erstere kleiner als die dritte.

Planimetrie.

Erstes Capitel.

Von den Linien und Winkeln im Allgemeinen.

§. 6. Erklärung.

Zwischen zwei Punkten lassen sich beliebig viele Linien*), aber nur eine einzige gerade ziehen. Eine gerade Linie ist daher vollständig bestimmt, wenn man ihre zwei Endpunkte kennt; zwei andere Punkte derselben geben nur die Richtung an. Jede begränzte gerade Linie läßt sich beliebig verlängern oder verlängert denken.

Anm. Die geraden Linien zieht man mit Hülfe des Lineals. Um die Richtigkeit desselben zu prüfen, verbinde man mit demselben zwei Punkte durch eine feine Linie, indem man es unterhalb der beiden Punkte anlegt. Alsdann lege man dieselbe Kante des Lineals, indem man das Lineal um dieselbe dreht, noch einmal oberhalb der beiden Punkte an und ziehe eine zweite Linie. Fallen die beiden Linien genau aufeinander, so ist das Lineal richtig.

§. 7. Erklärung.

Die Entfernung zweier Punkte von einander bestimmt man durch die gerade Linie, welche dieselben verbindet. Zeichnet man alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte gleichweit entfernt sind, so liegen dieselben in einer gekrümmten Linie, welche man Kreislinie nennt. Ein beliebiges Stück der Kreislinie nennt man Bogen.

*) In den Capiteln, die über Planimetrie handeln, ist nach §. 4 nur von Linien die Rede, die in einer Ebene liegen.

§. 8. Erklärung.

Zwei gerade Linien *schneiden* sich, wenn sie einen einzigen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, ohne jedoch von diesem Punkte begränzt zu sein; in letzterem Falle *stoßen sie zusammen*. Zwei gerade Linien können sich nur in *einem* Punkte schneiden, da sonst zwischen den beiden Schneidungspunkten *zwei* gerade Linien gezogen wären.

§. 9. Erklärung.

Die Größe der Neigung zweier Linien, die zusammenstoßen oder sich schneiden, nennt man *Winkel*, den Schneidungspunkt beider Linien den *Scheitel* des Winkels, die beiden Linien *Schenkel* desselben. Man bezeichnet einen Winkel entweder durch drei Buchstaben, von denen der mittlere im Scheitel, die beiden andern in den zwei Schenkeln stehen, oder durch einen einzigen Buchstaben, den man zwischen die beiden Schenkel schreibt. *Nach der Erklärung des Winkels ist die Größe desselben unabhängig von der Länge der Schenkel.*

§. 10. Erklärung.

Bilden zwei zusammenstoßende gerade Linien wieder eine Gerade, so stoßen sie unter einem *gestreckten* Winkel zusammen. Die Hälfte des gestreckten Winkels nennt man einen *rechten* Winkel oder *Rechten* (R). Ein Winkel, der kleiner als ein rechter ist, heißt *spitz*, ein solcher, der größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, heißt *stumpf*. Spitze, rechte und stumpfe Winkel heißen im Allgemeinen *hohle* Winkel. Ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, heißt *erhaben*.

Den rechten Winkel theilt man ein in 90 Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden.

Zwei Winkel, deren Summe gleich zweien Rechten ist, nennt man *Supplementwinkel*; liegen sie so neben einander, daß zwei Schenkel auf einander fallen und die beiden andern einen gestreckten Winkel bilden, so nennt man sie auch *Nebenwinkel*.

Zwei Winkel heißen *Complementwinkel*, wenn ihre Summe gleich einem Rechten ist.

Verlängert man die Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht zwischen den Verlängerungen ein neuer Winkel, welchen man den *Scheitelwinkel* des ersteren nennt.

Anm. Den rechten Winkel zeichnet man gewöhnlich mit dem Winkelmaaß. Um dasselbe zu prüfen, zeichnet man einen Winkel mit demselben und untersucht, ob der Nebenwinkel desselben, welcher ebenfalls ein Rechter sein muß, vollständig mit dem Winkelmaaß übereinstimmt. Die Winkel im Allgemeinen werden mit Hülfe des Transporteurs gezeichnet.

§. 11. Lehrſätze.

1) Alle geſtreckten Winkel ſind gleich groß.

2) Alle rechten Winkel ſind gleich groß.

3) Sind zwei Winkel gleich groß und iſt ihre Größe der Art, daß ſie Supplement- oder Complementwinkel haben, ſo ſind auch dieſe gleich groß.

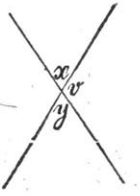
Die Beweiſe ſind leicht zu führen.

4) Jeder Winkel iſt gleich ſeinem Scheitelwinkel.

Vorausſetzung: x und y ſind Scheitelwinkel.

Behauptung: $x = y$.

Fig. 1.



Beweis. Es iſt $x + v = 2R$

und $y + v = 2R$,

alſo $x + v = y + v$

und $x = y$.

Uebungsſätze.

1) Die Summe ſämmtlicher um einen Punkt herumliegenden Winkel iſt $= 4R$.

2) Halbirt man zwei Nebenwinkel, ſo ſtehen die Halbirungslinien ſenkrecht auf einander.

3) Halbirt man zwei Complementwinkel, ſo bilden die Halbirungslinien einen Winkel von 45 Graden.

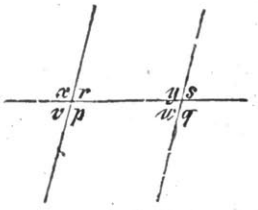
Zweites Capitel.

Von den parallelen, convergenten und divergenten geraden Linien.

§. 12. Erklärung.

Werden zwei gerade Linien von einer dritten durchſchnitten, ſo entſtehen acht Winkel, welche beſondere Namen führen.

Fig. 2.



x, v, s, q heißen im Allgemeinen äußere, r, p, y, w innere Winkel.

Nimmt man die Winkel paarweiſe, ſo heißen x und y, r und s, v und w, p und q, welche jedesmal auf derſelben Seite der durchſchneidenden und der durchſchnittenen Linien liegen, Gegenwinkel.

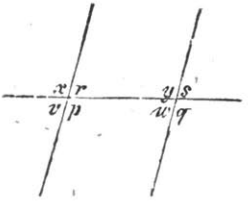
Ferner heißen je zwei Winkel, welche auf verſchiedenen Seiten der durchſchneidenden und auf verſchiedenen Seiten der durchſchnittenen Linien liegen, Wechſelwinkel und zwar heißen:

x und q, v und s äußere,
r und w, p und y innere Wechſelwinkel.

§. 13. Lehrſätze.

1) Sind zwei Gegenwinkel oder zwei Wechſelwinkel gleich groß, ſo ſind auch die übrigen Gegen- oder Wechſelwinkel paarweiſe gleich groß. Ferner betragen je zwei innere oder äußere Winkel, die nicht Nebenwinkel ſind, zwei Rechte.

Fig. 3.



Vor. $x = y$.

Beh. a) $s = r$, $v = w$, $p = q$,
$r = w$, $y = p$, $v = s$, $x = q$;

b) $r + y = 2R$; $p + w = 2R$;
$x + s = 2R$; $v + q = 2R$.

Beweis zu a) Es iſt $x + r = 2R$, ferner $y + s = 2R$,
alſo $x + r = y + s$
und daher $r = s$ (weil $x = y$).

Die Gleichheit der übrigen Winkelpaare ergiebt ſich daraus, daß alle Scheitelwinkel gleich groß ſind.

Beweis zu b) Es iſt $x + r = 2R$, ferner
$y = x$,
alſo auch $y + r = 2R$.

Ebenſo ergiebt ſich $p + w = 2R$, $x + s = 2R$, $v + q = 2R$.

2) Betragen zwei innere oder äußere Winkel, die nicht Nebenwinkel ſind, zwei Rechte, ſo ſind alle Gegen- und Wechſelwinkel paarweiſe gleich groß. (Fig. 3.)

Vor. $r + y = 2R$.

Beh. $x = y$.

Beweis. Es iſt $r + y = 2R$, ferner

$r + x = 2R$,

alſo auch $x = y$.

Iſt aber $x = y$, ſo ergiebt ſich die Gleichheit der übrigen Winkel aus 1) dieſes §.

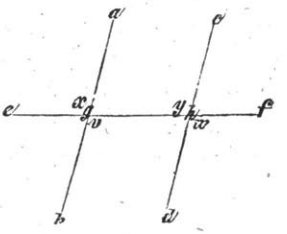
3) Sind zwei Gegenwinkel oder zwei Wechſelwinkel ungleich, ſo ſind auch die übrigen Gegen- und Wechſelwinkel ungleich. Ferner ſind je zwei innere oder äußere Winkel, die nicht Nebenwinkel ſind, größer oder kleiner als 2R.

Der Beweis wird auf ähnliche Art geführt, wie bei 1).

§. 14. Lehrſatz.

Zwei gerade Linien, welche mit einer dritten ſie durchſchneidenden Linie gleiche Gegenwinkel bilden, ſind **parallel**, d. h. ſie ſchneiden ſich nicht, auch wenn ſie bis ins Unendliche verlängert gedacht werden.

Fig. 4.



Vor. $x = y$.

Beh. ab $\parallel$ cd.

Beweis. Da $x = y$ iſt, ſo iſt auch

$v = w$

und alſo $x = y = v = w$.

Die Stücke bg und dh haben alſo dieſelbe Neigung gegen ef, wie ch und ag und bilden daher mit der Linie gh bei beliebiger Verlängerung dieſelbe Figur, wie ag und ch. Wenn ſich nun ga und hc ſchneiden, ſo müſſen ſich alſo auch gb und hd ſchneiden. Da aber in dieſem Falle die zwei geraden Linien ab und cd ſich in zwei Punkten ſchneiden würden, was unmöglich iſt, ſo können ſie ſich überhaupt gar nicht ſchneiden, ſind alſo parallel.

Anm. Daſſelbe findet Statt, wenn zwei Wechſelwinkel gleich groß ſind, oder wenn zwei innere oder äußere Winkel, die nicht Nebenwinkel ſind, 2R betragen. Der Beweis ergiebt ſich aus vor. §.

§. 15. Zuſätze.

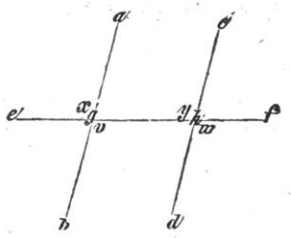
1) Iſt der äußere Gegenwinkel x größer als der innere y, ſo **convergiren** die Linien ab und cd auf der Seite, auf welcher die Gegenwinkel liegen, d. h. ſie ſchneiden ſich bei gehöriger Verlängerung auf dieſer Seite.

2) Iſt der äußere Gegenwinkel x kleiner als der innere y, ſo **divergiren** die Linien auf der Seite, auf welcher die Gegenwinkel liegen, d. h. ſie convergiren auf der entgegengeſetzten Seite.

§. 16. Lehrſatz.

Sind zwei Linien*) parallel, ſo bilden ſie mit einer ſie durchſchneidenden Linie gleiche Gegenwinkel und Wechſelwinkel, und je zwei innere oder äußere Winkel, welche nicht Nebenwinkel ſind, betragen zwei Rechte.

Fig. 5.



Beweis. Sind x und y zwei Gegenwinkel, ſo iſt $x \gtreqless y$. Wäre nun $x \gtreqless y$, ſo müßten die Linien auf der einen oder andern Seite convergiren (nach §. 15). Da dies aber nicht möglich iſt, indem ſie parallel ſind, ſo iſt auch $x \gtreqless y$ unmöglich und es muß $x = y$ ſein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich groß, ſo ſind nach §. 13 auch alle übrigen Gegen- und Wechſelwinkel paarweiſe gleich groß, und je zwei innere oder äußere Winkel betragen zwei Rechte.

Anm. Wenn man, um eine Behauptung zu beweiſen, die Unmöglichkeit des Gegentheils darthut, ſo nennt man dieſen Beweis **indirekt**.

§. 17. Zuſätze.

1) Convergiren zwei Linien, die von einer dritten durchſchnitten werden, ſo iſt der äußere Gegenwinkel auf dieſer Seite größer, als der innere.

2) Divergiren zwei Linien, ſo findet das Umgekehrte ſtatt.

Der Beweis ergiebt ſich ſehr leicht indirekt.

Anm. Parallele Linien zeichnet man mit dem Parallellineale oder mit Hülfe eines Dreiecks, welches man an einem Lineale verſchiebt.

---

*) Unter der einfachen Bezeichnung Linie iſt immer eine gerade Linie zu verſtehen.

Uebungssätze.

1) Schneidet eine gerade Linie beliebig viele andere gerade Linien unter gleichen Winkeln, so sind alle diese Linien parallel.
2) Durch einen gegebenen Punkt kann man nur eine Gerade einer gegebenen Geraden parallel ziehen.
3) Stehen zwei Linien senkrecht auf einer dritten, so sind sie einander parallel.
4) Sind die Schenkel zweier Winkel beziehlich einander parallel, so sind die Winkel gleich groß oder sie sind Supplementwinkel.
5) Man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie einer anderen gegebenen Geraden parallel ziehen.
6) Man soll von einem gegebenen Punkte aus eine Linie so ziehen, daß sie sich mit einer zweiten gegebenen Linie unter einem bestimmten Winkel schneidet.

Drittes Capitel.

Von den Dreiecken im Allgemeinen.

§. 18. Erklärung.

Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien vollständig begränzte Ebene. Die drei Linien heißen Seiten, ihre Schneidungspunkte Ecken. Sind die drei Seiten gleich groß, so heißt das Dreieck gleichseitig, sind bloß zwei Seiten gleich groß, so heißt es gleichschenklig; ist keine Seite der andern gleich, so heißt es ungleichseitig.

Beim stumpfwinkligen Dreiecke ist einer der drei Winkel stumpf, beim rechtwinkligen ein Rechter; ein spitzwinkliges Dreieck hat bloß spitze Winkel.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse; die beiden andern Seiten heißen Catheten.

Zieht man von einer Ecke eines Dreiecks eine Senkrechte auf die gegenüberstehende Seite oder deren Verlängerung, so nennt man diese Senkrechte die Höhe des Dreiecks und die zugehörige Seite die Grundlinie. Jedes Dreieck hat daher drei Höhen.

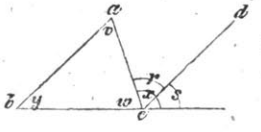
Verlängert man eine beliebige Seite eines Dreiecks über ihren Endpunkt hinaus, so entsteht ein äußerer Winkel; in Bezug auf diesen nennt man die beiden innern Winkel, welche nicht an ihm liegen, die gegenüberliegenden innern Winkel.

§. 19. Lehrſätze.

1) Der äußere Winkel eines Dreiecks iſt gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden innern Winkel.

2) Die Summe der drei innern Winkel eines Dreiecks iſt gleich 2R.

Fig. 6.



Beh. zu 1. $x = v + y$.

Beweis. Zieht man $dc \parallel ab$, ſo iſt $r = v$ als Wechſelwinkel und $s = y$ als Gegenwinkel, alſo $v + y = r + s = x$.

Beh. zu 2. $v + y + w = 2R$.

Beweis. Es iſt $x = v + y$,

alſo auch $x + w = v + y + w$,

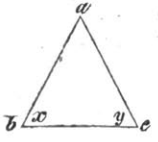
Da nun $x + w = 2R$, ſo iſt auch $y + v + w = 2R$.

Anm. Aus 1) ergiebt ſich noch, daß der äußere Winkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden innern Winkel iſt.

§. 20. Lehrſatz.

Sind in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, ſo ſind auch die beiden Winkel, welche dieſen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Fig. 7.



Vor. $ab = ac$.

Beh. $y = x$.

Da $ab = ac$ iſt, ſo kann man ſich das Dreieck ſo umgedrehet denken, daß a an ſeiner Stelle bleibt, aber b und c ihre Lagen vertauſchen. Es tritt alsdann ac an die Stelle von ab und ab an die Stelle von ac. Da nun bei dieſer Umdrehung y an die Stelle von x tritt, das Dreieck aber dennoch genau ſeine vorige Stelle wieder einnimmt, ſo muß $y = x$ ſein.

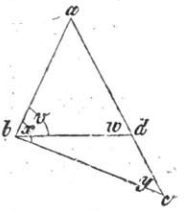
§. 21. Lehrſatz.

Sind in einem Dreiecke zwei Seiten ungleich, ſo liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Vor. $ac > ab$.

Beh. $x > y$.

Fig. 8.



Beweis. Da $ac > ab$ iſt, ſo kann man ab auf ac abtragen. Iſt ad die abgetragene Linie ab, ſo iſt alſo $ab = ad$ und folglich nach vor. §. $v = w$.

Nun iſt $x > v$ und $v = w$, alſo iſt auch $x > w$.

Ferner iſt $w > y$, alſo auch $x > y$.

§. 22. Lehrſatz.

Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, ſo ſind auch die Seiten, welche dieſen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich.

Beweis. Wenn die Seiten ungleich wären, ſo müßten nach vor. §. auch die gegenüberliegenden Winkel ungleich ſein. Da nun die Winkel nicht ungleich ſind, ſo können auch die Seiten nicht ungleich ſein.

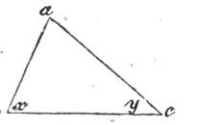
§. 23. Lehrſatz.

Sind in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich, ſo liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Vor. $x > y$.

Beh. $ac > ab$.

Fig. 9.



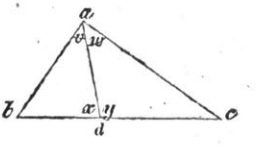
Wäre $ac = ab$, ſo müßte $x = y$ ſein; wäre $ac < ab$, ſo müßte $x < y$ ſein. Da nun x weder gleich, noch kleiner als y ſein kann, ſo kann auch ac weder gleich, noch kleiner als ab ſein, und es iſt deßhalb $ac > ab$.

§. 24. Lehrſatz.

Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks iſt größer als die dritte Seite.

Beh. $ab + ac > bc$.

Fig. 10.



Beweis. Halbirt man den Winkel bac durch die Linie ad, ſo iſt $v = w$.

Da nun $y > v$ iſt, ſo folgt auch $y > w$, und da $x > w$ iſt, ſo folgt $x > v$.

Iſt $y > w$, ſo folgt $ac > cd$.
Iſt $x > v$, ſo folgt $ab > bd$;

alſo $ab + ac > bd + dc$ oder $ab + ac > bc$.

Ebenſo ergiebt ſich $ab + bc > ac$ und $ac + bc > ab$.

Anm. Dieſer Lehrſatz iſt ein beſonderer Fall des allgemeinen Satzes: Die gerade Linie iſt die kürzeſte Verbindung zweier Punkte.

§. 25. Lehrſatz.

Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks iſt kleiner als die dritte Seite.

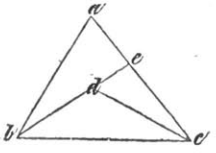
Der Beweis ergiebt ſich unmittelbar aus dem vorigen Satze:

Iſt $ab + ac > bc$, ſo folgt $ab > bc - ac$ und $ac > bc - ab$.
Iſt $ab + bc > ac$, ſo folgt $ab > ac - bc$ und $bc > ac - ab$.
Iſt $bc + ac > ab$, ſo folgt $bc > ab - ac$ und $ac > ab - bc$.

§. 26. Lehrſatz.

Wird ein Dreieck von einem zweiten vollſtändig umſchloſſen, ſo hat das zweite einen größern Umfang als das erſtere.

Fig. 11.



Beh. $ab + ac > db + dc$.

Beweis. Es iſt $ab + ae > bd + de$,
$de + ec > dc$,
alſo $ab + ae + ec + de > bd + dc + de$
oder $ab + ac > db + dc$.

Uebungsſätze.

1) Iſt in einem Dreiecke der eine Winkel ſtumpf oder ein Rechter, ſo ſind die beiden andern Winkel ſpitz.
2) In einem gleichſeitigen Dreiecke iſt jeder Winkel gleich 60°.
3) Die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks iſt größer als jede der beiden Catheten.
4) Errichtet man auf zwei ſich ſchneidenden Linien Senkrechte, ſo müſſen ſich dieſe bei gehöriger Verlängerung ebenfalls ſchneiden.
5) Von einem gegebenen Punkte aus kann man nach einer gegebenen Linie bloß eine Senkrechte ziehen.
6) Der ſenkrechte Abſtand eines Punktes von einer Linie iſt die kürzeſte Verbindung dieſes Punktes mit der Linie.

7) Wenn man den einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Spitze hinaus verlängert und den so entstandenen Außenwinkel halbirt, so ist diese Halbirungslinie der Grundlinie des Dreiecks parallel.

8) Ist die Gerade, welche einen der Außenwinkel eines Dreiecks halbirt, parallel mit einer der Dreiecksseiten, so ist das Dreieck gleichschenklig.

9) Zieht man durch die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks Parallelen mit den Seiten, so entsteht wieder ein gleichschenkliges Dreieck.

10) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke von einem Endpunkte der Grundlinie eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite fällt, so ist der Winkel, den diese Senkrechte mit der Grundlinie bildet, halb so groß als der Winkel an der Spitze.

11) Halbirt man ferner den Winkel, den diese Senkrechte mit der andern Seite bildet, die derselben Ecke zugehört, so schließen die Halbirungslinien einen Winkel von 45^0 ein.

12) Wenn man vom Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks aus eine Senkrechte nach der Hypotenuse zieht und den Winkel zwischen dieser Senkrechten und der einen Cathete halbirt, so schneidet diese Halbirungslinie ein gleichschenkliges Dreieck ab.

13) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine spitze Winkel doppelt so groß ist als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die Cathete, an welcher der größere der beiden Winkel liegt.

14) Wenn man zwei Seiten eines Dreiecks über ihren gemeinschaftlichen Endpunkt hinaus jede um die Größe der andern verlängert und die Endpunkte dieser Verlängerungen mit den Endpunkten der dritten Dreiecksseite verbindet, so sind diese beiden Verbindenden stets einander parallel.

15) In welchem Falle ist die Gerade, welche die Endpunkte der Verlängerungen unter sich verbindet, parallel mit der dritten Dreiecksseite?

16) Wenn man von der Spitze eines Dreiecks eine Senkrechte nach der Grundlinie zieht und durch eine andere Linie den Winkel an der Spitze halbirt, so schließen diese beiden Linien einen Winkel ein, welcher halb so groß ist als die Differenz der Winkel an der Grundlinie.

17) Die drei Höhen eines Dreiecks sind zusammen genommen kleiner als die drei Seiten.

18) Die umschließende gebrochene Linie ist größer als die umschlossene, wenn letztere blos hohle Winkel bildet.

19) Zwei gegebene gerade Linien sollen so durch eine dritte Linie geschnitten werden, daß auf jeder Seite dieser Linie gleiche innere Winkel entstehen.

Viertes Capitel.

Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 27. Erklärung.

Wenn sich zwei Dreiecke (überhaupt zwei Figuren) vollständig decken, sobald man ihnen die gehörige Lage giebt, so nennt man sie **congruent** (≅). In zwei congruenten Dreiecken sind also alle Seiten und alle

Winkel beziehlich gleich groß, und zwar liegen je zwei gleiche Winkel je zweien gleichen Seiten gegenüber, und umgekehrt.

§. 28. Erklärung.

Im Allgemeinen ſind zwei Dreiecke, wie dies in den nachſtehenden Sätzen bewieſen werden wird, congruent, wenn ſie in drei Stücken, unter welchen jedoch wenigſtens eine Linie vorkommen muß, übereinſtimmen. Durch dieſe drei Stücke iſt alsdann das Dreieck vollſtändig beſtimmt, und wenn man aus denſelben auf verſchiedenen Wegen Dreiecke zeichnet (conſtruirt), ſo ſind dieſe Dreiecke ſämmtlich congruent.

§. 29. Aufgabe.

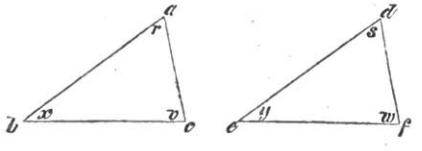
Es ſoll ein Dreieck aus zwei Seiten und dem von denſelben eingeſchloſſenen Winkel conſtruirt werden.

Conſtruction. Man zeichne den gegebenen Winkel und gebe ſeinen Schenkeln die Länge der zwei gegebenen Linien. Verbindet man alsdann die beiden Endpunkte derſelben, ſo erhält man das verlangte Dreieck.

§. 30. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind congruent, wenn die drei übereinſtimmenden Stücke in beiden aus zwei Seiten und dem von denſelben eingeſchloſſenen Winkel beſtehen.

Fig. 12.



Vor. ab = de,
bc = ef,
x = y.

Beh. △ abc ≅ △ def.

Beweis. Man denke ſich das Dreieck def ſo auf das Dreieck abc gelegt, daß die gleich großen Seiten ef und bc ſich vollſtändig decken und dabei e auf b und f auf c fällt. Alsdann muß auch ed der Richtung nach auf ba fallen, weil y = x, und ſchließlich der Punkt d auf den Punkt a, weil de = ab. Da nun alle drei Ecken auf einander fallen, ſo ſind die Dreiecke congruent.

Es iſt alſo auch ac = df, r = s und v = w.

§. 31. Aufgabe.

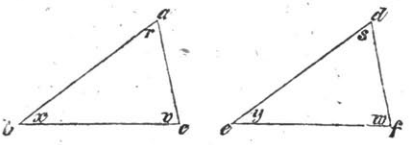
Es ſoll ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln conſtruirt werden, die entweder beide an der gegebenen Seite liegen oder nicht.

Die Conſtruction iſt in ähnlicher Weiſe, wie in §. 30 auszuführen.

§. 32. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind congruent, wenn die übereinſtimmenden Stücke in beiden aus einer Seite und den beiden an dieſer Seite liegenden Winkeln beſtehen.

Fig. 13.



Vor. bc = ef,
x = y,
v = w.

Beh. △ abc ≅ △ def.

Beweis. Denkt man ſich △ def ſo auf △ abc gelegt, daß e auf b und f auf c fällt, ſo muß auch ed der Richtung nach auf ba und fd der Richtung nach auf ca fallen, weil y = x und w = v iſt; da ſich alsdann ed und fd in demſelben Punkte ſchneiden müſſen, in welchem ſich ba und ca ſchneiden, ſo muß auch d auf a fallen, und die Dreiecke ſind daher congruent. Schließlich iſt alſo auch ab = de, ac = df.

§. 33. Zuſatz.

Liegt das eine Paar der übereinſtimmenden Winkel in beiden Dreiecken an der gegebenen Seite, das andere aber derſelben gegenüber, ſo ſind die Dreiecke ebenfalls congruent, weil die dritten Winkel in beiden Dreiecken als Supplemente der übrigen ebenfalls gleich groß ſein müſſen und ſomit die Vorausſetzung des vor. §. gegeben iſt.

§. 34. Aufgabe.

Es ſoll ein Dreieck aus den drei Seiten conſtruirt werden.

Conſtruction. Werden die drei Seiten durch a, b, c bezeichnet, ſo zeichne man zuerſt eine der drei Seiten, z. B. a, nehme dann die Seite b in den Zirkel und ſchlage mit derſelben einen Kreisbogen von einer Ecke der Seite a aus; ebenſo nehme man die Seite c in den Zirkel und ſchlage einen zweiten Kreisbogen von der andern Ecke der Linie a aus.

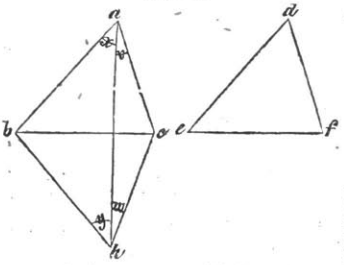
Der Punkt, in welchem ſich die beiden Kreiſe ſchneiden, iſt die geſuchte dritte Ecke.

Anm. Bei dieſer Conſtruction ſchlägt man mit der Zirkelöffnung b einen Kreisbogen von einer Ecke der Seite a, weil alle Punkte, deren Entfernung von dieſer Ecke gleich b iſt (alſo auch die dritte Ecke des Dreiecks), in einer Kreislinie liegen. Dieſe Kreislinie, welche die Eigenſchaft hat, daß alle ihre Punkte von der einen Ecke um b entfernt ſind, nennt man den geometriſchen Ort der Punkte, deren Entfernung von der erwähnten Ecke gleich b iſt. Bei andern Aufgaben kann der geometriſche Ort eines Punktes eine gerade Linie u. ſ. w. ſein.

§. 35. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind congruent, wenn die übereinſtimmenden Stücke in beiden aus den drei Seiten beſtehen.

Fig. 14.



Vor. ab = de,
ac = df,
bc = ef.

Beh. △ abc ≅ △ def.

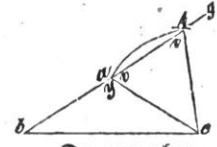
Beweis. Denkt man ſich △ def ſo an △ abc gelegt, daß e an b und f an c fällt, ſo erhält d die Lage des Punktes h. Verbindet man nun a und h durch eine gerade Linie, ſo entſtehen die beiden gleichſchenkligen Dreiecke bah und cah. Es iſt alsdann x = y und v = w (§. 20) oder x + v = y + w oder ∠ bac = ∠ edf. Da nun ab = de, ac = df und ∠ bac = ∠ edf iſt, ſo müſſen die beiden Dreiecke nach §. 30 congruent ſein.

§. 36. Aufgabe.

Es ſoll ein Dreieck aus zwei Seiten und einem nicht von dieſen Seiten eingeſchloſſenen Winkel conſtruirt werden.

Conſtruction. Man zeichne den gegebenen Winkel (als ∠ cbg), gebe dem einen Schenkel die Länge der einen gegebenen Linie (bc) und ſchlage dann von c aus mit der Länge der zweiten gegebenen Linie einen Kreis. Dieſer trifft die Linie bg in den zwei Punkten a und A. Man erhält alſo zwei Dreiecke abc und Abc, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen, aber nicht congruent ſind.

Fig. 15.



Da nun aber ca = cA iſt, ſo muß auch ∠ caA = ∠ cAa (oder v = v) ſein, und da y + v = 2R, aber y > v iſt, ſo muß auch y

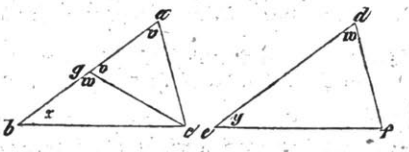
ſtumpf und < bAc oder v ſpitz ſein. Fügt man alſo zu den gegebenen drei Stücken noch die Angabe hinzu, ob der bc gegenüberliegende Winkel ſtumpf oder ſpitz ſein ſoll, ſo iſt dadurch das Dreieck beſtimmt.

Anm. Wenn zufällig der Kreisbogen die Linie bg nicht ſchneidet, ſondern nur berührt, ſo erhält man bloß ein Dreieck. Der Winkel, welcher bc gegenüberliegt, muß alsdann = R ſein.

§. 37. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind congruent, wenn die übereinſtimmenden Stücke in beiden aus zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel beſtehen, und wenn ferner der Winkel, welcher der andern Seite gegenüberliegt, in beiden Dreiecken gleichartig, d. h. entweder ſpitz oder ſtumpf iſt.

Fig. 16.



Vor. bc = ef,

ca = fd,

x = y,

$v + w \gtrless 2R$,

d. h. beide ſpitz oder beide ſtumpf.

Beh. △ abc ≅ △ def.

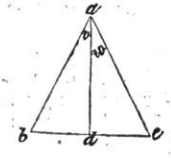
Beweis. Denkt man ſich △ def ſo auf △ abc gelegt, daß e auf b und f auf c fällt, ſo muß, weil y = x iſt, auch die Seite ed der Richtung nach auf ba fallen. Der Punkt d fällt alsdann entweder in die Verlängerung von ab, oder zwiſchen a und b, oder auf a. Fiele d zwiſchen a und b auf g, ſo wäre cg = ca (nach der Vorausſ.), alſo < cga = < cag oder v = v. Alsdann wäre aber v + w = 2R, was der Vorausſetzung widerſpricht. Es kann alſo d nicht zwiſchen a und b fallen. Fiele d in die Verlängerung von ab, ſo würde man auf denſelben Widerſpruch ſtoßen. Es muß daher d auf a fallen und ſomit ſind beide Dreiecke congruent.

Anm. Iſt zufällig v = R und w = R, ſo iſt zwar v + w = 2R, aber die Dreiecke ſind dann nach §. 32 congruent.

§. 38. Lehrſatz.

Ein Dreieck läßt ſich in zwei congruente Hälften zerlegen, wenn es zwei gleiche Seiten oder zwei gleiche Winkel hat.

Fig. 17.



Vor. ab = ac.

Beh. △ abd ≅ △ acd.

Beweis. Halbirt man den von den gleichen Seiten eingeſchloſſenen Winkel bac durch die Linie ad, ſo iſt abd ≅ acd, weil ab = ac, ad = ad und v = w iſt.

Es ergiebt sich ferner bd = dc und < adb = R.

Die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbirt also die Grundlinie und steht auf derselben senkrecht.

Hat das Dreieck 2 gleiche Winkel, so ist der Beweis derselbe.*)

Uebungssätze.

1) Wenn man einen Winkel halbirt, so ist jeder Punkt der Halbirungslinie von beiden Schenkeln gleichweit entfernt (d. h. die senkrechten Abstände sind gleich groß).

2) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die dritte Seite halbirt und auf dem Halbirungspunkte eine Senkrechte errichtet, so geht diese, gehörig verlängert, durch die Spitze.

3) Haben zwei gleichschenklige Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie, so halbirt die Verbindungslinie der beiden Spitzen die Winkel an den Spitzen, ferner die Grundlinie selbst und steht auf derselben senkrecht.

4) Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte und dieser Punkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.

5) Die Senkrechten auf den Mitten der drei Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkte und dieser ist von allen Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt.

6) Wenn man in einem Dreiecke mit zwei ungleichen Seiten die dritte Seite halbirt und die Halbirungslinie mit der gegenüberstehenden Ecke verbindet, so wird der Winkel an dieser Ecke in zwei Theile der Art getheilt, daß der kleinere Theil an der größern Seite liegt.

7) Wenn man in einem Dreiecke mit zwei ungleichen Seiten den zwischen diesen Seiten liegenden Winkel halbirt, so wird durch diese Halbirungslinie die Grundlinie in zwei ungleiche Theile so getheilt, daß der kleinere Theil mit der kleinern Seite zusammenstößt.

8) Wenn man zwei Außenwinkel eines Dreiecks und den an der dritten Ecke liegenden innern Winkel halbirt, so schneiden sich die drei Halbirungslinien in einem Punkte und dieser ist von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.

9) Wenn man die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks um gleiche Stücke verlängert oder verkürzt und die drei so erhaltenen Punkte untereinander verbindet, so erhält man wieder ein gleichseitiges Dreieck.

10) Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich sind, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

11) Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich sind, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

12) Wenn man je zwei von den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so wird durch dieselben das Dreieck in vier einander congruente Dreiecke getheilt.

13) Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn die Höhe des einen gleich der Höhe des andern ist.

---

*) Die Aufgabe, ein Dreieck aus drei gegebenen Stücken zu construiren, kommt sehr häufig in der Feldmeßkunst vor. Einige genauere Andeutungen hierüber werden in einem spätern Capitel (Aehnlichkeit der Dreiecke) gegeben werden.

14) Man soll eine gerade Linie halbiren.
15) Man soll einen Winkel halbiren.
16) Man soll von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie eine Senkrechte auf diese errichten.
17) Man soll in einer Geraden von einem gegebenen Punkte aus eine Senkrechte errichten.
18) Man soll auf dem Endpunkte einer geraden Linie eine Senkrechte errichten.
19) Man soll einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zerlegen.
20) Man soll ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, wenn die Hypotenuse und die Summe der Catheten gegeben sind.
21) Man soll dasselbe zeichnen, wenn die Hypotenuse und die Differenz der Catheten gegeben sind.
22) Man soll ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, wenn die eine Cathete und die Summe der Hypotenuse und der andern Cathete gegeben sind.
23) Dasselbe, wenn die eine Cathete und die Differenz der Hypotenuse und der andern Cathete gegeben sind.
24) Man soll ein Dreieck zeichnen, wenn gegeben sind die Differenz zweier Seiten, der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel und die dritte Seite.
25) Man soll ein Dreieck zeichnen, wenn gegeben sind die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und die Differenz der beiden ihr anliegenden Winkel.
26) Man soll ein Dreieck zeichnen, wenn zwei Seiten und die Halbirungslinie der dritten Seite gegeben sind.
27) Man soll ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Summe der drei Seiten zeichnen.
28) Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Linie so ziehen, daß die aus zwei andern Punkten nach derselben gezogenen Senkrechten gleich groß sind.
29) Man soll ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zeichnen, zu dem die Hypotenuse gegeben ist.

Fünftes Capitel.

Von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen.

§. 39. Erklärung.

Jede von vier geraden Linien vollständig begränzte Ebene heißt ein Viereck. Die vier Linien heißen Seiten; die Verbindungslinien je zweier nicht aufeinanderfolgenden Ecken heißen Diagonalen.

Sind in einem Vierecke zwei und zwei Seiten parallel, so heißt dasselbe Parallelogramm, sind bloß zwei Seiten parallel, so heißt es Trapez, und ist keine Seite der andern parallel, so heißt es Trapezoid.

Die Höhe eines Parallelogramms iſt der ſenkrechte Abſtand zweier gegenüberſtehenden Seiten, die Höhe eines Trapezes der ſenkrechte Abſtand der beiden parallelen Seiten.

§. 40. Lehrſätze.

1) Die Summe der vier Winkel eines Vierecks beträgt 4R.

Beweis. Jedes Viereck läßt ſich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, deren innere Winkel nach §. 19 zuſammen 4R betragen.

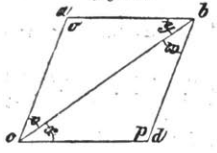
2) Jedes Viereck hat zwei Diagonalen.

Beweis. Da man zwei Paare von nicht aufeinanderfolgenden Ecken hat, ſo hat man auch zwei Diagonalen.

§. 41. Lehrſatz.

Ein Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt.

Fig. 18.



Vor. abcd = #.

Beh. △ abc ≅ △ dcb.

Beweis. Es iſt v = w, y = x } als Wechſelwinkel,

cb = bc,

daher △ abc ≅ △ dcb.

Hieraus folgt noch o = p; ab = dc; ac = db.

In einem Parallelogramme ſind daher die gegenüberliegenden Seiten und auch die gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

§. 42. Zuſatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt ſich, daß vier verſchiedene Formen des Parallelogramms möglich ſind, je nachdem die Seiten und die Winkel ſämmtlich, oder nur paarweiſe gleiche Größe haben.

Sind alle Seiten eines Parallelogramms gleich groß, ſo heißt daſſelbe Rhombus oder Raute.

Sind bloß die gegenüberliegenden Seiten gleich groß, ſo heißt daſſelbe Rhomboid.

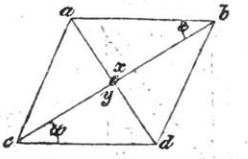
Ein Rhombus mit gleichen (rechten) Winkeln heißt Quadrat.

Ein Rhomboid mit gleichen (rechten) Winkeln heißt Rechteck.

§. 43. Lehrſatz.

In einem Parallelogramme halbiren ſich die beiden Diagonalen.

Fig. 19.



Vor. abcd = ▱.

Beh. ae = ed,

be = ec.

Beweis. Es iſt ab = dc,

x = y,

v = w,

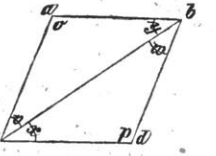
daher △ abe ≅ △ dce und folglich ae = de und be = ce.

§. 44. Lehrſätze.

Ein Viereck iſt ein Parallelogramm, wenn:

1) die gegenüberliegenden Seiten gleich groß ſind,
2) die gegenüberliegenden Winkel gleich groß ſind,
3) zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß und auch parallel ſind,
4) die Diagonalen ſich halbiren.

Fig. 20.



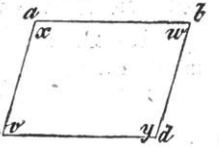
Beweis zu 1.

Vor. ab = cd; ac = bd.

Beh. abcd = ▱.

Zieht man die Linie bc, ſo iſt △ abc ≅ △ dcb, weil alle Seiten übereinſtimmen. Hieraus folgt aber x = y und v = w. Iſt nun x = y, ſo iſt auch dc ∥ ab und iſt v = w, ſo iſt auch ac ∥ db.

Fig. 21.



Beweis zu 2.

Vor. x = y, v = w.

Beh. abcd = ▱.

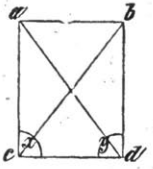
Es iſt x + y + v + w = 4R und da x = y und v = w iſt, auch x + v = y + w; es iſt daher x + v = 2R. Hieraus folgt ab ∥ cd. Ferner iſt y + v = 2R, daher ac ∥ bd.

Die Beweiſe zu 3) und 4) werden ebenſo geführt, wie der Beweis zu 1).

§. 45. Lehrſatz.

Sind alle Winkel eines Parallelogramms gleich groß (Quadrat und Rechteck), ſo ſind auch die Diagonalen gleich groß.

Fig. 22.



Vor. abcd = #;
x = y = R.

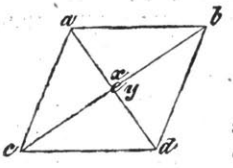
Beh. ad = bc.

Beweis. Es iſt △ acd ≅ △ bdc, weil ac = bd cd = dc, x = y. Hieraus folgt aber ad = bc.

§. 46. Lehrſatz.

Sind alle Seiten eines Parallelogramms gleich groß (Quadrat und Rhombus), ſo ſtehen die Diagonalen auf einander ſenkrecht.

Fig. 23.



Vor. abcd = #;
ab = bd.

Beh. x = y = R.

Beweis. Es iſt △ abe ≅ △ dbe, weil ab = db, be = be, ae = de. Hieraus folgt aber x = y = R.

§. 47. Lehrſätze.

1) Ein Parallelogramm iſt ein Rechteck oder ein Quadrat, wenn die Diagonalen gleich groß ſind.

2) Ein Parallelogramm iſt ein Rhombus oder ein Quadrat, wenn die Diagonalen ſenkrecht auf einander ſtehen.

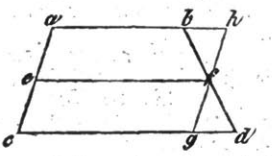
Die Beweiſe werden ähnlich geführt, wie die Beweiſe in §. 45 und §. 46.

§. 48. Lehrſatz.

Halbirt man die nicht parallelen Seiten eines Trapezes und verbindet die Halbirungspunkte durch eine gerade Linie, ſo iſt dieſelbe gleich der halben Summe der parallelen Seiten und iſt denſelben parallel.

Vor. $ab \parallel cd$,
$ac = ec$,
$bf = fd$.

Fig. 24.



Beh. 1) $ef = \frac{ab + cd}{2}$;

2) $ef \parallel cd$.

Beweis. Zieht man $gh \parallel ac$, ſo iſt $\triangle bfh \cong \triangle dfg$, weil $bf = df$, $\sphericalangle bfh \sphericalangle gfd$ und $\sphericalangle bhf \sphericalangle dgf$.

Hieraus folgt $bh = gd$ und $hf = gf$.

Es iſt daher $ab + cd = ah + cg = 2eg$.

Ferner iſt $ec \parallel fg$ und $ec = fg$ (als Hälften von ac und hg),
alſo $ecfg = \#$;

daher $ef \parallel cg$ und $ef = cg = \frac{ab + cd}{2}$.

Uebungsſätze.

1) Beide Diagonalen eines Vierecks ſind zuſammengenommen größer als der halbe, und kleiner als der ganze Umfang.

2) Die Halbirungslinien zweier äußern Winkel eines Dreiecks bilden mit den Halbirungslinien zweier innern Winkel ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel zwei Rechte betragen.

3) Ein Parallelogramm wird von jeder durch den Mittelpunkt der Diagonalen bis zu den Seiten gezogenen Linie in zwei congruente Hälften getheilt.

4) Halbirt man alle Seiten eines Parallelogramms und verbindet die Halbirungspunkte, ſo entſteht wieder ein Parallelogramm.

5) Ein Viereck iſt ein Rhombus oder Quadrat, wenn die Winkel deſſelben durch die Diagonalen halbirt werden.

6) Trägt man auf den Seiten eines Parallelogramms von den Winkelſpitzen aus Stücke von gleicher Länge gleichmäßig ab, ſo entſteht durch Verbindung der Endpunkte dieſer Stücke wieder ein Parallelogramm.

7) Theilt man die Diagonale eines Parallelogramms in drei gleiche Theile und zieht man ferner aus den Winkelſpitzen, durch welche dieſe Diagonale nicht geht, gerade Linien durch die Theilpunkte, ſo werden durch dieſe Linien die Seiten des Parallelogramms halbirt.

8) Parallelen, die von einer Linie gleiche Stücke abſchneiden, ſchneiden von jeder andern ebenfalls gleiche Stücke ab.

9) Die Halbirungslinien aller Winkel eines Rechtecks bilden ein Quadrat, welches den Unterſchied beider Rechteckſeiten als Diagonale hat.

10) Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten eines Rhombus, ſo entſteht ein Rechteck.

11) Zwei Quadrate ſind congruent, wenn die Diagonale des einen gleich der Diagonale des andern iſt, und wenn ferner die Differenz der Diagonale und der Seite in beiden dieſelbe iſt.

12) Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn sie in zwei anliegenden Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

13) Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks, so ist diese Linie halb so groß als die dritte Seite.

14) Sind die nicht parallelen Seiten eines Trapezes gleich groß, so sind auch die Diagonalen gleich groß, ebenso die zwei an einer der parallelen Seiten liegenden Winkel; durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zu ihrem Schneidungspunkte entsteht ferner ein gleichschenkliges Dreieck.

15) Sind in einem Vierecke die Diagonalen gleich groß und ebenso zwei gegenüberliegende Seiten, so sind die andern zwei Seiten parallel.

16) Wenn man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf dem einen Schenkel selbst und auf der Verlängerung des andern zwei Stücke von beliebiger aber gleicher Länge abschneidet, so wird die Gerade, welche diese beiden Abschnittspunkte verbindet, durch die Grundlinie halbirt.

17) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und drei Winkeln übereinstimmen (in Größe und Lage).

18) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Seiten und den zwei von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.

19) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in allen Seiten und einem Winkel in Lage und Größe übereinstimmen.

20) Man soll durch eine Linie von bestimmter Länge unter einem gegebenen Winkel zwei convergirende Linien verbinden.

21) Man soll ein Viereck zeichnen, wenn drei Seiten und die beiden Winkel, die an der unbekannten Seite liegen, gegeben sind.

22) Man soll durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zeichnen, daß das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück derselben in dem genannten Punkte halbirt wird.

23) Man soll einen Rhombus construiren, wenn ein Winkel und die Summe der einen Diagonale und der Seite gegeben ist.

24) Man soll einen Rhombus construiren, wenn ein Winkel nebst der Summe der Diagonalen gegeben ist.

25) Man soll ein Quadrat durch vier Linien so zertheilen, daß bei gehöriger Zusammensetzung der Theile fünf gleiche Quadrate entstehen.

26) Man soll ein Dreieck aus zwei Seiten und der von der Mitte der dritten nach der gegenüberstehenden Ecke gezogenen Linie construiren.

27) Man soll eine gegebene Linie in m gleiche Theile theilen.

28) Man soll ein Trapez zeichnen, zu welchem die zwei parallelen Seiten und die beiden an einer derselben liegenden Winkel gegeben sind.

29) Man soll ein Trapez zeichnen, zu welchem gegeben sind die Höhe, die beiden nicht parallelen Seiten und die Entfernung des Schneidungspunktes derselben von der Grundlinie.

30) Es soll der geometrische Ort der Punkte angegeben werden, deren senkrechter Abstand von einer gegebenen Linie gleich der Linie a ist.

31) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.*)

---

*) Der Beweis wird dadurch eingeleitet, daß man durch die drei Ecken des Dreiecks Parallelen mit den drei Höhen zieht.

Sechstes Capitel.

Von den Vielecken.

§. 49. Erklärung.

Ein Vieleck oder Polygon ist eine von beliebig vielen geraden Linien begränzte Ebene. Hat dasselbe 5, 6, ... n Seiten, so nennt man es Fünfeck, Sechseck, ...neck. Sind alle Winkel und Seiten eines necks gleich groß, so nennt man es regulär.

§. 50. Lehrsatz.

Die Summe der innern Winkel eines necks beträgt $2nR - 4R$.

Beweis. Verwandelt man ein neck dadurch in ein $(n-1)$eck, daß man durch eine Diagonale ein Dreieck abschneidet, so wird die Summe der innern Winkel um 2R kleiner. Das neck hat also 2R mehr als das vorhergehende $(n-1)$eck.

Die Summe der innern Winkel ist nun für das Dreieck $= 2R = 2 \cdot 3R - 4R$, also für das Viereck $= 4R = 2 \cdot 4R - 4R$, für das Fünfeck $= 6R = 2 \cdot 5R - 4R$. Da bei jedem folgenden necke die Summe der Winkel um 2R zunimmt, so erhält man für die folgenden necke: $2 \cdot 6R - 4R$, $2 \cdot 7R - 4R$ u. s. w., also allgemein $2nR - 4R$.

§. 51. Lehrsatz.

Verlängert man die Seiten eines Vielecks, dessen innere Winkel sämmtlich hohl sind, alle nach einer Richtung, so ist die Summe der so entstehenden äußern Winkel gleich 4R.

Beweis. Jeder dieser äußern Winkel beträgt mit seinem anliegenden innern Winkel 2R, und die Summe der innern und äußern Winkel an allen n Ecken ist somit gleich 2nR.

Da nun die innern Winkel $2nR - 4R$ betragen, so sind die fehlenden 4R gleich der Summe der äußern Winkel.

§. 52. Lehrsatz.

Die Anzahl der Diagonalen eines necks beträgt $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

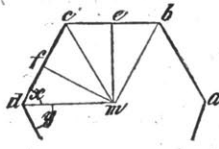
Beweis. Von einer beliebigen Ecke aus kann man $(n-3)$ Diagonalen ziehen, also von allen n Ecken $n \cdot (n-3)$. Auf diese

Art iſt jedoch jede Diagonale zweimal gezogen und die wirkliche Anzahl iſt daher gleich der Hälfte $= \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

§. 53. Lehrſatz.

In jedem regulären Vielecke findet ſich ein Punkt, welcher ſowohl von allen Seiten, wie auch von allen Ecken gleichweit entfernt iſt.

Fig. 25.



Conſtruction. Sind a, b, c, d 4 Ecken eines beliebigen Vielecks, ſo erhält man den geſuchten Punkt, indem man auf der Mitte zweier aneinanderſtoßenden Seiten Senkrechte errichtet und dieſe bis zu ihrem Scheidungspunkte verlängert.

Vor. ab = bc = cd u. ſ. w.; $\sphericalangle$ abc = $\sphericalangle$ bcd u. ſ. w.
bc = ec = cf = fd; $\sphericalangle$ cem = R; $\sphericalangle$ dfm = R.

Beweis. Da me und mf auf der Mitte von bc und cd ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die Dreiecke mbc und mcd gleichſchenklig. Da ſie außerdem den Schenkel mc gemeinſchaftlich haben, ſo ſtimmen ſie in allen Seiten überein und ſind alſo congruent. Hieraus folgt mb = mc = md und ferner, daß die vier Winkel an den Grundlinien bc und cd gleich groß und zwar gleich der Hälfte eines Umfangswinkels ſind. Iſt aber x gleich der Hälfte eines Umfangswinkels, ſo iſt y die andere Hälfte. Bezeichnet man die auf d folgende Ecke durch q, ſo iſt wiederum $\triangle$ mcd $\cong$ $\triangle$ mdq, weil x = y, md = md und cd gleich dq iſt. Fährt man auf dieſe Art fort, ſo ergiebt ſich, daß alle die Dreiecke, deren Spitze in m liegt und deren Grundlinie eine Vielecksſeite iſt, congruent ſein müſſen, und daß daher m von allen Ecken gleichweit entfernt iſt. Da dieſe Dreiecke auch ſämmtlich gleich große Höhen haben müſſen, ſo iſt auch die Entfernung des Punktes m von allen Grundlinien dieſelbe.

§. 54. Zuſatz.

Aus vorigem §. ergiebt ſich noch:

1) Bei der Conſtruction kann man, ſtatt auf der Hälfte der Seiten Senkrechte zu errichten, zwei Winkel halbiren.

2) Sämmtliche um m herum liegende Winkel, die ſogenannten Mittelpunktswinkel, ſind gleich groß.

Anm. Die in dieſem Capitel entwickelten Sätze gelten natürlich auch für Drei- und Vierecke.

§. 55. Lehrsatz.

Das umschließende Vieleck hat einen größern Umfang als das umschlossene, wenn sämmtliche Umfangswinkel des letztern hohle sind.

Der Beweis ergiebt sich leicht mit Hülfe des §. 26.

Uebungssätze.

1) Es soll die Größe der Umfangswinkel in regulären necken berechnet werden, ebenso die Größe der Mittelpunktswinkel.

2) Wenn man jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile theilt und je zwei einer Winkelspitze zunächst liegende Theilungspunkte durch eine gerade Linie verbindet, so entsteht ein reguläres Sechseck.

3) In einem Fünfecke ist die Summe der Diagonalen größer als der Umfang.

4) In einem regulären Sechsecke laufen je zwei und zwei Seiten parallel und bilden mit den zwei Linien, welche die Ecken dieser Seiten verbinden, Rechtecke.

5) Wenn man in einem regulären Sechsecke die Halbirungspunkte von vier parallelen Seiten verbindet, so entsteht ein Rechteck.

6) Welche reguläre necke lassen sich so um einen Punkt herumlegen, daß sie, ohne eine Lücke zu lassen, den Raum ausfüllen?

7) Die Mittelpunktsdreiecke eines regulären Sechsecks sind gleichseitig.

8) Wenn man in einem regelmäßigen Fünfecke aus den Endpunkten einer Seite nach den gegenüberliegenden Ecken gerade Linien zieht, so bilden diese mit der genannten Seite ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der Winkel an der Spitze.

9) Wenn man in einem regulären 2necke vom Mittelpunkte aus Linien nach zwei gegenüberstehenden Ecken oder nach den Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten zieht, so bilden dieselben eine gerade Linie, welche das 2neck in zwei congruente Hälften theilt.

Siebentes Capitel.

Vom Kreise.

§. 56. Erklärung.

Der **Kreis** ist eine von der **Kreislinie** oder **Peripherie** eingeschlossene Ebene. Die Kreislinie ist eine in sich zurücklaufende Linie, deren sämmtliche Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte, dem **Mittelpunkte** oder **Centrum**, gleichweit entfernt sind. Die gerade Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie mit dem Centrum heißt **Halbmesser** oder **Radius**. Die gerade Verbindungslinie zweier

Punkte der Peripherie heißt Sehne; wenn sie durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser oder Diameter. Die Verlängerung einer Sehne über die Peripherie hinaus heißt Secante. Eine auf dem Endpunkte eines Radius in der Peripherie senkrecht stehende Linie heißt Tangente.

Einzelne Theile der Peripherie heißen Bogen; einzelne Theile des Kreises, die von einem Bogen und einer Sehne begränzt werden, Kreisabschnitte; wenn sie von einem Bogen und zwei Radien begränzt werden, Kreisausschnitte. Der Kreisausschnitt wird Quadrant, Sextant, Octant genannt, je nachdem der Winkel, den die Radien bilden, den 4., 6. oder 8. Theil von 4R beträgt.

Ein Winkel, der von zwei Radien gebildet wird, heißt Mittelpunkts- oder Centriwinkel; wird er von zwei sich in der Peripherie schneidenden Sehnen gebildet, so heißt er Peripherie- oder Umfangswinkel.

Zwei Kreise heißen concentrisch, wenn sie denselben Mittelpunkt, excentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben. Die gerade Verbindungslinie dieser Mittelpunkte heißt Centrale.

Haben zwei excentrische Kreise einen Punkt gemeinschaftlich, so berühren sie sich in diesem Punkte, wenn alle Theile der einen Kreislinie sich auf derselben Seite der andern befinden, sie schneiden sich hingegen in diesem Punkte, wenn dies nicht der Fall ist.

Ein neck ist in einem Kreise beschrieben, wenn seine Seiten Sehnen desselben, um einen Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Tangenten desselben sind.

A. Von den Linien und Winkeln im Kreise.

§. 57. Lehrsätze.

1) Alle Radien eines Kreises sind gleich groß.
2) Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich groß.
3) Ein Kreis wird von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten.
4) Ein Kreis wird durch seinen Durchmesser in zwei congruente Hälften getheilt.
5) In einem Kreise gehören zu gleichen Mittelpunktswinkeln auch gleiche Bogen und Sehnen, congruente Ausschnitte und Abschnitte.
6) Jede Sehne wird von dem Radius, der senkrecht auf ihr steht, halbirt.

7) Die aus der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

8) Die aus den Mitten zweier Sehnen errichteten Senkrechten ſchneiden ſich im Mittelpunkte.

Die Beweiſe werden ihrer Leichtigkeit wegen übergangen.

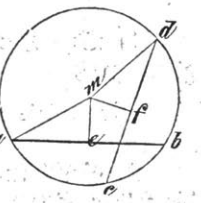
§. 58. Lehrſätze.

1) Gleiche Sehnen liegen gleichweit vom Mittelpunkte ab.

Vor. ab = dc,
< mea = R,
< mfd = R.

Beh. me = mf.

Fig. 26.



Beweis. Es iſt △ mea ≅ △ mfd, weil ae = df, ma = md, < mea = < mfd und < mae + < mdf < 2R; folglich iſt auch me = mf.

2) Sehnen, die gleichweit vom Mittelpunkte abliegen, ſind gleich groß.

Der Beweis wird ebenſo geführt, wie der vorige.

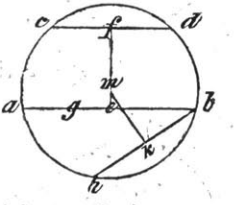
§. 59. Lehrſätze.

1) Die größere Sehne liegt näher am Mittelpunkte, als die kleinere.

Vor. ab > cd,
< mea = R,
< mfc = R.

Beh. me < mf.

Fig. 27.



Beweis. Da cd kleiner als ba iſt, ſo kann man cd auf ab ſo abtragen, daß es gleich bg wird. Schlägt man nun mit bg einen Bogen, indem b als Mittelpunkt genommen wird, ſo muß dieſer den Bogen ab an irgend einer Stelle, etwa in h durchſchneiden. Es iſt alsdann bg = bh. Zieht man nun mk ſenkrecht auf hb, ſo iſt im △ mek der Winkel mek ſtumpf, alſo mke ſpitz, folglich mk > me. Da nun bh = bg = cd iſt, ſo muß nach vor. §. mk = mf ſein. Alsdann iſt auch mf > me.

2) Liegt von zwei Sehnen die eine näher am Mittelpunkte als die andere, so ist sie auch größer.

Beweis. Die dem Mittelpunkte nähere Sehne muß entweder größer, kleiner, oder gleich der andern sein. Wäre sie gleich der andern, so wäre die Entfernung vom Mittelpunkte bei beiden dieselbe, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre sie kleiner als die andere, so müßte sie entfernter vom Mittelpunkte liegen, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Sie muß also größer als die andere sein.

§. 60. Lehrsätze.

1) Mittelpunktswinkel, die auf gleichen Bogen stehen, sind gleich groß.

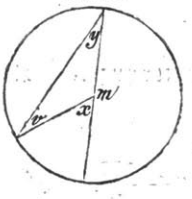
Der Beweis ergiebt sich aus 5 des §. 57.

2) Ein Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß, als der auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

Beweis zu 2. Es sind drei Fälle möglich:

a) Zwei Schenkel können sich decken.

Fig. 28.



Vor. x ist Mittelpunktswinkel.

Beh. $x = 2y$.

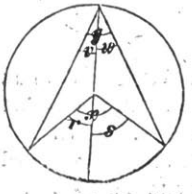
Beweis. Es ist $x = v + y$,

$y = v$,

also $x = 2y$.

b) Der Peripheriewinkel kann den Centriwinkel einschließen.

Fig. 29.



Vor. x ist Mittelpunktswinkel.

Beh. $x = 2y$.

Beweis. Zieht man durch die beiden Scheitel eine gerade Linie, so ist nach vorigem Satze

$r = 2v$, $s = 2w$,

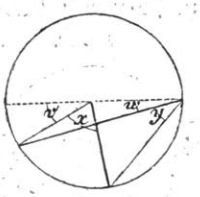
also $r + s = 2(v + w)$,

oder $x = y$.

c) Die Schenkel beider Winkel können ſich ſchneiden.

Vor. x iſt Mittelpunktswinkel.

Fig. 30.



Beh. $x = 2y$.

Beweis. Zieht man durch die beiden Scheitel eine gerade Linie, ſo iſt

$$x + v = 2(y + w) = 2y + 2w.$$

Ferner iſt $v = 2w$,

alſo $x = 2y$.

3) Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen ſtehen, ſind gleich groß.

Beweis. Da alle Mittelpunktswinkel, die auf gleichen Bogen ſtehen, einander gleich ſind, ſo ſind auch ihre Hälften, d. h. die Peripheriewinkel, die auf denſelben Bogen ſtehen, gleich groß.

§. 61. Lehrſätze.

1) Der Peripheriewinkel, welcher über dem Durchmeſſer ſteht, deſſen Bogen alſo die halbe Peripherie iſt, iſt gleich einem Rechten.

Beweis. Da der Mittelpunktswinkel, welcher die halbe Peripherie abſchneidet, gleich 2R iſt, ſo muß der zugehörige Peripheriewinkel $= 1R$ ſein.

2) Denkt man ſich über einer gegebenen Linie mehrere Dreiecke errichtet, die ſämmtlich an der Spitze denſelben Winkel haben, ſo liegen alle dieſe Spitzen in einer Kreislinie.

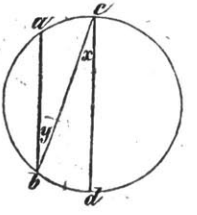
3) Iſt der Winkel an der Spitze ein rechter, ſo iſt die gegebene Grundlinie zugleich Durchmeſſer des erwähnten Kreiſes.

Die Beweiſe zu 2 und 3 ſind ſehr leicht indirekt zu führen.

§. 62. Lehrſätze.

1) Zwei parallele Sehnen ſchneiden in einem Kreiſe gleiche Bogen ab.

Fig. 31.



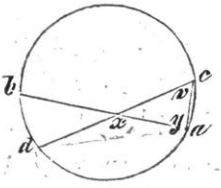
Vor. ab || cd.

Beh. Bog. ac = Bog. bd.

Beweis. Verbindet man c und b durch eine gerade Linie, ſo entſtehen die Peripheriewinkel x und y. Dieſe ſind gleich groß (ab || cd), daher auch bd = ac.

2) Der von zwei ſich ſchneidenden Sehnen gebildete Winkel iſt gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, die auf den zwiſchen den beiden Sehnen liegenden Bogen ſtehen.

Fig. 32.



Beweis. x iſt als äußerer Winkel gleich y + v. Nun ſteht y auf dem Bogen cb und v auf dem Bogen ad, alſo iſt x gleich zwei Peripheriewinkeln, die auf den Bogen bc und ad ſtehen.

3) Der von zwei ſich ſchneidenden Secanten gebildete Winkel iſt gleich der Differenz der beiden Peripheriewinkel, die auf den zwiſchen den Secanten liegenden Bogen ſtehen.

Beweis wie bei 2.

B. Von den Tangenten.

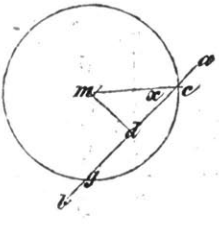
§. 63. Lehrſätze.

1) Die Tangente hat nur einen einzigen Punkt mit der Peripherie gemeinſchaftlich (daher der Name).

Beweis. Die Tangente ſteht auf dem Endpunkte eines Radius ſenkrecht und berührt in dieſem Punkte die Peripherie. Berührte ſie noch einen Punkt des Kreiſes, ſo könnte man nach dieſem Punkte einen zweiten Radius ziehen. Hierdurch erhielte man aber ein gleichſchenkliges Dreieck mit zwei rechten Winkeln, und dies iſt unmöglich.

2) Jede Gerade, welche mit dem Radius in der Peripherie einen ſpitzen Winkel bildet, ſchneidet den Kreis in zwei Punkten.

Fig. 33.



Vor. $x < R$.

Beweis. Zieht man von m aus eine Senkrechte bis zum Punkte d in der Linie ab und macht dann cd = dg, ſo iſt mcg gleichſchenklig, alſo mc = mg. mg muß alſo ein Radius, daher g der zweite Schneidungspunkt von ab und der Peripherie ſein.

3) Jede Gerade, welche mit dem Kreiſe nur einen Punkt gemeinſchaftlich hat, ſteht auf dem Endpunkte des nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmeſſers ſenkrecht.

Der Beweis ergiebt ſich mit Hülfe von 2) leicht indirekt.

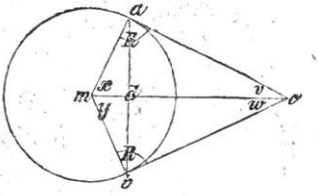
§. 64. Lehrſatz.

Wenn man zwei nicht parallele Tangenten bis zu ihrem Schneidungspunkte verlängert, ſo ſind die beiden zwiſchen dem Schneidungspunkte und den Berührungspunkten liegenden Stücke gleich groß.

Vor. $\sphericalangle$ mac $=$ R,
$\sphericalangle$ mbc $=$ R.

Beh. ac $=$ bc.

Fig. 34.



Beweis. Verbindet man m und c durch eine gerade Linie, ſo iſt

$\triangle$ mac $\cong$ $\triangle$ mbc,

weil ma $=$ mb, mc $=$ mc, $\sphericalangle$ mac $=$ $=$ $\sphericalangle$ mbc, und $\sphericalangle$ mca $+$ $\sphericalangle$ mcb kleiner als 2R.

Aus der Congruenz ergiebt ſich aber ac $=$ bc, ferner x $=$ y, v $=$ w.

§. 65. Zuſatz.

Aus vor. §. ergiebt ſich ferner:

1) Verbindet man den Schneidungspunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte des Kreiſes, ſo wird durch dieſe Linie ſowohl der Winkel, den die Tangenten mit einander bilden, wie auch der Mittelpunktswinkel zwiſchen den zugehörigen Radien halbirt.

2) Dieſe Linie ſteht ferner auf der zwiſchen den Berührungspunkten gezogenen Sehne (ſiehe ab in voriger Figur) ſenkrecht und halbirt dieſelbe.

§. 66. Lehrſatz.

Der Winkel, den eine Tangente am Berührungspunkte mit einer beliebigen Sehne bildet, iſt gleich dem Peripheriewinkel, der auf dem von der Sehne abgeſchnittenen Bogen ſteht.

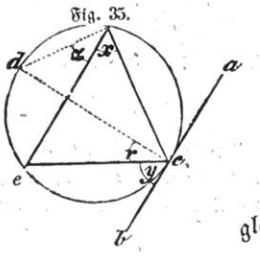
Es ſind drei Fälle möglich:

a) Der Tangentenwinkel kann $=$ R ſein.

In dieſem Falle iſt die Sehne zugleich Durchmeſſer und der zugehörige Peripheriewinkel iſt demnach ebenfalls $=$ R.

Der Tangentenwinkel kann ſpitz ſein.

Fig. 35.



Vor. ab Tangente, ce Sehne.

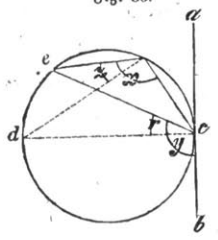
Beh. $y = x$.

Beweis. Zieht man den Durchmeſſer cd, ſo iſt $y + r = R$, $x + z = R$, alſo $y + r = x + r$.

Da nun $r = z$ iſt (Peripheriewinkel auf gleichen Bogen), ſo folgt $y = x$.

c) Der Tangentenwinkel kann ſtumpf ſein.

Fig. 36.



Vor. ab Tangente, ce Sehne.

Beh. $y = x$.

Beweis. Zieht man den Durchmeſſer cd, ſo iſt $y - r = R$ und $x - z = R$, alſo $y - r = x - z$.

Da nun $r = z$ iſt, ſo folgt $y = x$.

C. Von den um und in den Kreis beſchriebenen Vielecken.

§. 67. Lehrſätze.

1) Um jedes Dreieck läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Beweis. Errichtet man auf den Hälften zweier Seiten eines Dreiecks ſenkrechte Linien, ſo iſt der Schneidungspunkt derſelben von allen Ecken gleichweit entfernt, was ſich durch Congruenz leicht beweiſen läßt. Dieſer Punkt iſt alſo der Mittelpunkt des umſchriebenen Kreiſes, zu dem die drei Seiten des Dreiecks Sehnen ſind.

2) In jedes Dreieck läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Beweis. Halbirt man zwei Winkel eines Dreiecks, ſo iſt der Schneidungspunkt der Halbirungslinien von allen Seiten gleichweit entfernt, was ſich durch Congruenz ebenfalls leicht beweiſen läßt. Dieſer Punkt iſt alſo der Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes, zu dem die drei Seiten des Dreiecks Tangenten ſind.

3) Um und in jedes reguläre Vieleck läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Beweis und Conſtruction ergeben ſich aus §. 53.

§. 68. Zuſatz.

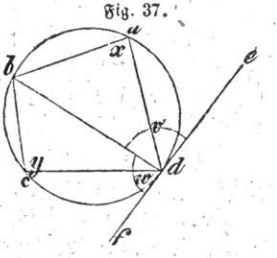
Aus vorigem §. und aus §. 65 ergiebt ſich ferner, daß man um oder in ein neck höchſtens einen Kreis beſchreiben kann. Wollte man das Gegentheil annehmen, ſo würde man augenblicklich auf Widerſprüche gerathen.

§. 69. Lehrſätze.

1) Die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel eines Vierecks im Kreiſe iſt = 2R.

Beh. $x + y = 2R$.

Fig. 37.



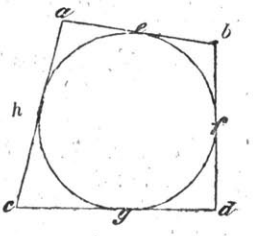
Beweis. Zieht man die Diagonale bd und an d die Tangente ef, ſo iſt nach §. 66:

$v = y$, $w = x$, alſo $v + w = x + y$.

Da nun $v + w = 2R$ iſt, ſo muß auch $x + y = 2R$ ſein.

2) Die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks um den Kreis iſt gleich der Summe der beiden andern gegenüberliegenden Seiten.

Fig. 38.



Vor. ab, bd, dc und ca ſind Tangenten.

Beh. $ab + cd = ac + bd$.

Beweis. Sind e, f, g, h die vier Berührungspunkte, ſo iſt nach §. 64:

$ae = ah$; $be = bf$; $dg = df$; $cg = ch$,

alſo $ae + be + dg + cg = ah + bf + df + ch$

oder $ab + cd = ac + bd$.

§. 70. Zuſatz.

Mit Hülfe des vorigen §. kann man leicht auf indirektem Wege beweiſen, daß ſich in jedes Viereck ein Kreis beſchreiben läßt, wenn die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten gleich der Summe der zwei andern iſt, um jedes Viereck, wenn die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln = 2R iſt.

§. 71. Lehrsatz.

Halbirt man die Seiten eines regulären Vielecks im Kreise, zieht durch die Halbirungspunkte Radien und verbindet die Endpunkte dieser Radien mit den nächstfolgenden Ecken des necks, so erhält man ein reguläres 2neck im Kreise.

Beweis. Die 2n Dreiecke, welche man erhalten hat, haben sämmtlich denselben Mittelpunktswinkel und sind also congruent. Hieraus ergiebt sich die Gleichheit aller entsprechenden Seiten und Winkel und also auch die Regelmäßigkeit des 2necks.

§. 72. Lehrsätze.

1) Halbirt man die Seiten eines regulären necks im Kreise, zieht durch die Halbirungspunkte Radien und ferner durch die Endpunkte dieser Radien Tangenten, so bilden dieselben ein reguläres neck um den Kreis.

2) Verbindet man die Ecken eines regulären necks um den Kreis mit dem Mittelpunkte, und ferner je zwei aufeinanderfolgende Durchschnittspunkte obiger Verbindungslinien und der Peripherie unter einander, so entsteht ein reguläres neck im Kreise.

3) Halbirt man sämmtliche Umfangswinkel eines regulären necks um den Kreis und zieht durch die Punkte, in welchen die Halbirungslinien die Peripherie durchschneiden, Tangenten bis zu den Seiten des necks, so entsteht ein reguläres 2neck um den Kreis.

Die Beweise ergeben sich leicht mit Hülfe der Congruenzsätze.

§. 73. Lehrsätze.

1) Die Seite des regulären Sechsecks im Kreise ist gleich dem Radius.

Beweis. Jedes reguläre Sechseck läßt sich in sechs gleichseitige Dreiecke, deren Seite gleich dem Radius ist, zerlegen. Hieraus ergiebt sich aber die Behauptung.

2) Die Seite des regulären Vierecks im Kreise wird erhalten, wenn man zwei senkrecht auf einander stehende Radien zieht und deren Endpunkte verbindet.

Der Beweis ist leicht mit Hülfe der Congruenzsätze zu führen.

Anm. Mit Hülfe der Sechsecks- und Viereckseite lassen sich die 3, 12, 24, 48 .... } ecke in und um den Kreis construiren.
8, 16, 32, 64 .... }

D. Von den Beziehungen zwischen zwei Kreisen.

§. 74. Lehrsätze.

1) Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten.

Beweis. Da die Kreislinie in sich zurückläuft, so muß eine solche, wenn sie durch einen Punkt hindurch in die Ebene eines zweiten Kreises eingetreten ist, durch einen zweiten Punkt hindurch wieder aus derselben heraustreten. Mehr als zwei Punkte können aber die Kreise nicht gemeinschaftlich haben, weil man um drei, vier u. s. w. Punkte höchstens eine Kreislinie ziehen kann (siehe §. 67 und 68).

2) Wenn sich zwei Kreise schneiden, so ist die Centrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Halbmesser.

Beweis. Sind m und n die Mittelpunkte der Kreise, a ein Schneidungspunkt, so ist die Linie man gebrochen. In dem Dreiecke man ist alsdann mn $<$ ma $+$ na und mn $>$ ma $-$ na oder na $-$ ma.

3) Zwei Kreise können sich bloß in einem einzigen Punkte berühren.

Beweis. Wenn sich zwei Kreise bloß berühren, so kann die Centrale nicht kleiner als die Summe der beiden Radien sein. Berührten sich nun zwei Kreise in zwei Punkten und zöge man von den Mittelpunkten m und n je zwei Radien nach den Berührungspunkten d und e, so müßte wenigstens eine der beiden Linien mdn und men gebrochen, daher auch größer als die Centrale sein. Dies ist aber nicht möglich, weil mdn und auch men gleich der Summe beider Radien sind. Die Kreise können sich daher höchstens in einem Punkte berühren.

4) Wenn sich zwei Kreise berühren, so geht die Centrale oder die Verlängerung derselben durch den Berührungspunkt.

Der Beweis ergiebt sich leicht indirekt.

5) Wenn sich zwei Kreise auswendig berühren, so ist die Centrale gleich der Summe der beiden Halbmesser, und wenn sie sich inwendig berühren, gleich der Differenz derselben.

Der Beweis ergiebt sich aus 4).

6) Ist die Centrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Halbmesser, so schneiden sich die Kreise; ist die Centrale gleich der Summe der Halbmesser, so berühren sich die Kreise auswendig und ist die Centrale gleich der Differenz der Halbmesser, so berühren sich die Kreise inwendig.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht indirekt.

§. 75. Zuſätze.

Aus 4) des vorigen §. ergiebt ſich noch:

Durch oder an den Berührungspunkt zweier Kreiſe kann man eine gemeinſchaftliche Tangente zeichnen.

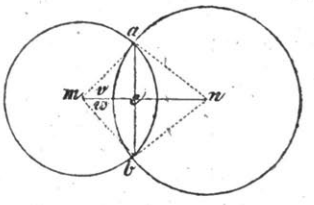
Ferner ergiebt ſich aus 6):

Man kann aus drei Linien a, b, c ein Dreieck zeichnen, wenn jede Linie größer als die Summe der beiden andern, und kleiner als die Differenz derſelben iſt.

§. 76. Lehrſätze.

1) Die Centrale halbirt die gemeinſchaftliche Sehne zweier ſich ſchneidenden Kreiſe und ſteht auf dieſer Sehne ſenkrecht.

Fig. 39.



Beh. ae = eb,

< aem = R.

Beweis. Es iſt △ man ≅ △ mbn (weil alle Seiten übereinſtimmen),

daher v = w.

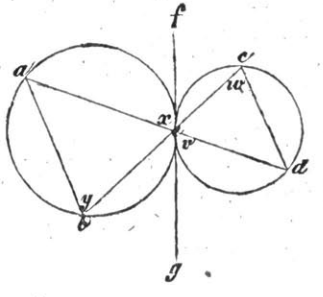
Ferner △ ame ≅ △ bme

(ma = mb, me = me, v = w),

daher ae = be und < aem = < bem = R.

2) Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreiſe zwei gerade Linien, welche jede Peripherie in noch einem Punkte ſchneiden, ſo ſind die Sehnen, welche dieſe Schneidungspunkte verbinden, einander parallel.

Fig. 40.



Beh. ab || cd.

Beweis. Denkt man ſich durch den Berührungspunkt e eine gemeinſchaftliche Tangente gf gezogen, ſo iſt nach §. 66 v = w und x = y.

Da nun x = v iſt, ſo muß auch y = w, folglich ab || cd ſein.

Berühren ſich die beiden Kreiſe inwendig, ſo wird der Beweis auf dieſelbe Art geführt.

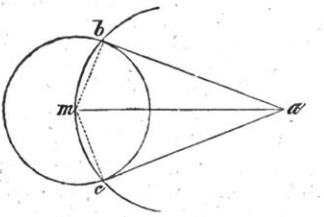
§. 77. Aufgaben.

1) Man ſoll eine Tangente an einen Kreis zeichnen.

Conſtruction. Iſt der Punkt in der Peripherie gegeben, durch welchen die Tangente gehen ſoll, ſo ziehe man einen Radius nach demſelben, und errichte auf dem Endpunkte deſſelben eine Senkrechte.

Iſt aber außerhalb des Kreiſes ein Punkt a gegeben, von welchem aus die Tangente gezogen werden ſoll, ſo verbinde man a mit dem Mittelpunkte m, ſchlage über ma einen Kreis, welcher erſteren in zwei Punkten c und b ſchneiden muß, und ziehe ab und ac. Dieſe zwei Linien ſind alsdann Tangenten, weil $<$ mba und $<$ mca als Peripheriewinkel über dem Durchmeſſer ma gleich R ſind.

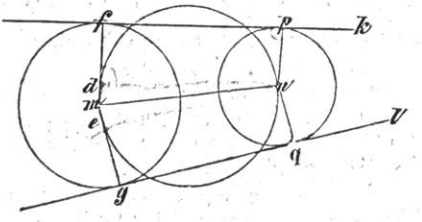
Fig. 41.



2) Man ſoll an zwei Kreiſe eine gemeinſchaftliche Tangente ziehen, durch welche die Centrale erſt in ihrer Verlängerung geſchnitten wird.

Conſtruction. Man beſchreibe über der Centrale mn einen Kreis, ziehe in demſelben von dem Mittelpunkte m des größern Kreiſes aus zwei Sehnen md und me, welche gleich der Differenz der Radien beider Kreiſe ſind, verlängern md bis f, ziehe np $\parallel$ mf und nq $\parallel$ mg, ſo ſind fpk und gql die geſuchten Tangenten.

Fig. 42.

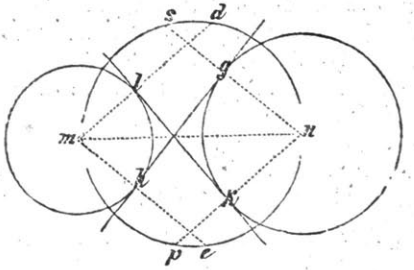


Beweis. Da md gleich der Differenz beider Radien iſt, ſo iſt fd $=$ pn. Ferner iſt fd $\parallel$ pn, alſo fdpn ein Parallelogramm. Da nun $<$ mdn als Peripheriewinkel auf dem Durchmeſſer mn gleich einem Rechten iſt, ſo muß das Parallelogramm fdpn zugleich ein Rechteck ſein. Die Winkel dfp und npf ſind daher Rechte und fpk iſt eine gemeinſchaftliche Tangente.

Ebenſo wird bewieſen, daß die Linie gql eine gemeinſchaftliche Tangente iſt.

3) Man ſoll an zwei Kreiſe eine gemeinſchaftliche Tangente ziehen, durch welche die Centrale zwiſchen ihren zwei Endpunkten geſchnitten wird.

Fig. 43.



Conſtruction. Man beſchreibe über der Centrale mn einen Kreis, ziehe in demſelben von m aus zwei Sehnen md und me, welche gleich der Summe der Radien beider Kreiſe ſind, und ziehe np || md, ns || me. Die Linien lk und gh ſind dann die verlangten Tangenten.

Beweis. Es iſt wie in 2) dieſes §. ld = kn, ferner ld || kn, daher ldkn ein Parallelogramm. Da der Winkel mdn = R iſt, ſo iſt dieſes Parallelogramm zugleich ein Rechteck und alſo ∠ mlk und ∠ nkl jeder = R. Hieraus folgt, daß lk eine gemeinſchaftliche Tangente iſt. Ebenſo wird bewieſen, daß gh eine gemeinſchaftliche Tangente iſt.

Uebungsſätze.

1) Stehen in einem Kreiſe zwei Sehnen ſenkrecht auf einander, ſo iſt jedesmal die Summe der beiden Bogen, auf welchen je zwei Scheitelwinkel ſtehen, gleich der halben Peripherie.

2) Stehen zwei Sehnen zweier Kreiſe auf der Centrale ſenkrecht, ſo liegen die vier Endpunkte der Sehnen in einer Kreislinie.

3) Berühren ſich zwei Kreiſe und man zieht an dieſelben parallele Tangenten, ſo liegen die Berührungspunkte derſelben mit dem Berührungspunkte der Kreiſe in gerader Linie.

4) Wenn der Winkel, den zwei verlängerte Sehnen bilden, von einem verlängerten Durchmeſſer halbirt wird, ſo ſind ſowohl die Sehnen als auch ihre Verlängerungen bis zum Durchſchnittspunkte einander gleich.

5) Bei zwei concentriſchen Kreiſen iſt diejenige Verbindungslinie der beiden Peripherien, welche durch den Mittelpunkt geht, die kürzeſte.

6) Wird eine Gerade, welche mit einem ihrer Endpunkte im Umfange eines Kreiſes liegt, von einem Durchmeſſer deſſelben unter einem rechten Winkel halbirt, ſo liegt auch ihr anderer Endpunkt im Umfange.

7) Schneidet man auf der Sehne eines beliebigen Bogens von ihren Endpunkten aus zwei gleiche Stücke ab und errichtet in dieſen Durchſchnittspunkten Senkrechte, die man bis zum Durchſchnitt mit dem Umkreiſe verlängert, ſo ſind dieſe von gleicher Länge.

8) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuſe doppelt ſo groß als die eine Cathete iſt, ſo verhalten ſich die Winkel wie 1 : 2 : 3.

9) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die doppelte Summe der Hypotenuse und des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises dem Umfange des Dreiecks gleich.

10) Verlängert man zwei Seiten eines Dreiecks und beschreibt zwischen den verlängerten und der dritten Seite einen Kreis, so ist jede der beiden Tangenten, welche durch Verlängerung der Dreiecksseiten entstanden sind, gleich dem halben Umfange des Dreiecks.

11) Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes im Kreise sind gleich groß.

12) Beschreibt man zwei gleiche Kreise so, daß jeder durch den Mittelpunkt des andern geht, und zieht in einem derselben eine beliebige Menge von Sehnen parallel mit der Centrale beider Kreise, so wird jede derselben durch die Peripherie des andern Kreises in zwei Stücke getheilt, von denen das eine gleich dem Kreishalbmesser ist.

13) Zieht man von einem beliebigen Punkte a außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben und fällt auf die eine derselben eine Senkrechte aus dem Berührungspunkte der andern, so ist das Stück dieser Senkrechten, welches zwischen jenem Berührungspunkte und der Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Punkte a liegt, gleich dem Radius.

14) Verbindet man die Endpunkte der drei Höhen eines Dreiecks, so werden die von jenen Verbindungslinien gebildeten Winkel durch die Höhen halbirt.

15) Zeichnet man in einem Kreise ein Dreieck und fällt von einem beliebigen Punkte der Peripherie Senkrechte auf alle drei Seiten, so liegen die drei Fußpunkte dieser Senkrechten in gerader Linie.

16) Zu einem gegebenen Bogen den Mittelpunkt zu finden.

17) Man soll an einen Kreis eine Tangente so ziehen, daß sie eine gegebene Linie unter einem bestimmten Winkel schneidet.

18) Man soll an einen Kreis eine Tangente ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

19) Man soll an einen Kreis zwei Tangenten ziehen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.

20) Man soll durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne so ziehen, daß ihr Abstand vom Mittelpunkte einer bestimmten gegebenen Größe gleich ist.

21) Man soll von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Linie durch denselben ziehen, so daß ihre Entfernung vom Mittelpunkte einer gegebenen Größe gleich ist.

22) Von einem Punkte c außerhalb eines Kreises soll eine Linie so durch den Kreis gezogen werden, daß die entstehende Sehne ab eine gegebene Länge hat.

23) Von einem Punkte c außerhalb eines Kreises soll eine Linie so durch den Kreis gezogen werden, daß die entstehende Sehne ab = bc wird.

24) In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

25) Zu zwei gegebenen Punkten a und b einen dritten Punkt c zu finden, der Art, daß ab = bc und abc ein gestreckter Winkel ist, jedoch bloß mit Hülfe des Zirkels.

26) Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

27) Um einen Kreis ein Viereck zu zeichnen, von welchem eine Seite und zwei gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

28) Von einem Vierecke, welches in einen Kreis beschrieben ist, sind bekannt zwei Seiten und ein anliegender Winkel. Die übrigen Stücke sollen hieraus bestimmt werden.

29) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges zu beschreiben, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des ersteren stehen.

30) Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise bestimmt werden, welche eine gegebene gerade Linie in einem bestimmten Punkte berühren.

31) Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise bestimmt werden, welche, mit gegebenem Radius beschrieben, eine gerade Linie berühren.

32) Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise bestimmt werden, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels berühren.

33) Es soll der geometrische Ort der Mittelpunke aller Kreise bestimmt werden, welche zwei gegebene Parallelen berühren.

34) Es soll der Mittelpunkt eines Kreises bestimmt werden, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührte.

35) Von einem gegebenen Punkte aus, welcher innerhalb oder außerhalb eines gegebenen Kreises liegt, einen Kreis zu beschreiben, welcher ersteren berührt.

36) Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise bestimmt werden, welche mit gegebenem Radius einen gegebenen Kreis von außen oder von innen berühren.

37) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei andere, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt*).

38) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen andern Kreis berührt, und durch einen innerhalb oder außerhalb desselben gegebenen Punkt geht.

39) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei andere gegebene Kreise berührt.

Achtes Capitel.

Von der Gleichheit der ebenen Figuren.

§. 78. Erklärung.

Wenn man die eine von zwei congruenten Figuren in der Art verändert, daß man auf der einen Seite ein Stück wegnimmt und dasselbe auf einer andern Seite wieder ansetzt, so decken sich im Allgemeinen die Figuren nicht mehr, aber ihre Größe ist noch dieselbe, d. h. sie lassen

---

*) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei andere berühren, ist mit Ausnahme einiger speciellen Fälle eine gekrümmte Linie.

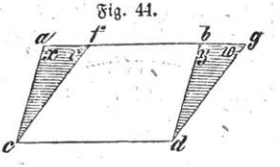
ſich durch Veränderung der Lage ihrer einzelnen Theile in congruente Figuren verwandeln. Zwei Figuren ſind alſo congruent ($a \cong b$), wenn ſie in Geſtalt und Größe, hingegen gleich ($a = b$), wenn ſie nur in der Größe übereinſtimmen.

Die Sätze über Gleichheit der Figuren ſuchen hauptſächlich zu zeigen, welche Stücke einer Figur umgeändert werden dürfen, wenn die Größe der Figur dabei unverändert bleiben ſoll.

§. 79. Lehrſatz.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe ſind gleich groß.

Fig. 44.



Beweis. Aus dem Parallelogramme abcd kann man ein Parallelogramm von gleicher Höhe und Grundlinie dadurch bilden, daß man von c aus die beliebige Linie cf nach ab und von d aus die Linie dg ∥ cf zieht. Die Parallelogramme abcd und fgcd unterſcheiden ſich alsdann durch die Stücke afc und bgd. Dieſe ſind aber congruent ($ac = bd$, $x = y$, $v = w$), daher beide Parallelogramme gleich groß.

Auf dieſelbe Art kann man aus fgcd ein neues Parallelogramm von gleicher Höhe und Grundlinie und gleicher Größe bilden und damit beliebig fortfahren. Umgekehrt kann man alſo alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe als Abänderungen ein und deſſelben Parallelogramms betrachten und dieſelben ſind daher ſämmtlich gleich groß.

Jedes Parallelogramm iſt alſo auch gleich einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe.

§. 80. Zuſatz.

Parallelogramme von gleichem Inhalte und gleicher Höhe haben nach vorigem §. auch gleiche Grundlinie, und Parallelogramme von gleichem Inhalte und gleicher Grundlinie haben gleiche Höhe.

Ferner wird der Inhalt eines Parallelogramms dadurch 2, 3, ... mmal größer, wenn man entweder die Grundlinie oder die Höhe 2, 3, ... mmal größer macht.

§. 81. Lehrſatz.

Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe ſind gleich groß.

Beweis. Jedes Parallelogramm läßt ſich durch eine ſeiner Diagonalen in zwei congruente Dreiecke zerlegen, welche dieſelbe Grundlinie

und Höhe haben, wie das Parallelogramm. Jedes Dreieck iſt alſo die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Da nun alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleich groß ſind, ſo gilt daſſelbe auch für Dreiecke.

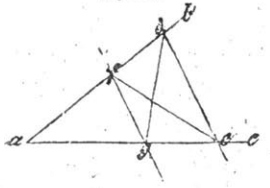
Es ergiebt ſich ferner, daß ein Dreieck die Hälfte eines Rechteckes von gleicher Grundlinie und Höhe iſt.

§. 82. Zuſätze.

1) Errichtet man über einer Linie ab beliebig viele Dreiecke, deren Spitzen ſämmtlich in einer mit ab parallelen Linie cd liegen, ſo ſind nach vorigem §. alle dieſe Dreiecke gleich groß. Die Linie cd iſt daher der geometriſche Ort für die dritte Ecke aller Dreiecke, welche dieſelbe Grundlinie ab und denſelben Inhalt haben.

2) Zieht man durch die Schenkel des Winkels bac zwei parallele Linien de und fg, ſo iſt

Fig. 45.



$\triangle$ dfg = $\triangle$ efg (nach 1),

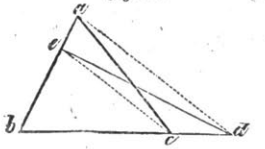
alſo auch $\triangle$ dfg + $\triangle$ fag = $\triangle$ efg + $\triangle$ fag

oder $\triangle$ dag = $\triangle$ eaf.

Dieſer Satz läßt ſich vielfach benutzen.

Soll z. B. das Dreieck abc in der Geſtalt ſo verändert werden, daß die eine Seite = bd wird und die zweite in die Richtung von ab fällt, ſo findet man die dritte Ecke dadurch, daß man zuerſt d und a verbindet und dann ce || ad zieht. Es iſt alsdann bde das geſuchte Dreieck.

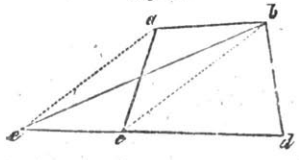
Fig. 46.



Da nämlich $\triangle$ aec = $\triangle$ dec iſt (nach 2), ſo muß auch $\triangle$ abc = $\triangle$ ebd ſein.

Soll ferner ein Viereck abcd in ein gleich großes Dreieck verwandelt werden, ſo zieht man die Diagonale bc, verlängert dc über c hinaus, zieht ae || bc und verbindet b mit e. bed iſt alsdann das geſuchte Dreieck, weil $\triangle$ ebc = $\triangle$ abc iſt.

Fig. 47.



Auf ähnliche Art laſſen ſich beliebige Vielecke in Dreiecke verwandeln.

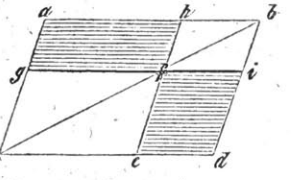
§. 83. Lehrſätze.

1) Ein Parallelogramm wird durch ſeine zwei Diagonalen in vier gleiche Dreiecke getheilt.

Der Beweis ergiebt ſich aus der Congruenz der vier Dreiecke.

2) Zieht man durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Parallelogramms zwei Linien den Seiten parallel, ſo erhält man vier Parallelogramme. Von dieſen ſind die zwei, welche von der Diagonale nicht getheilt werden, gleich groß.

Fig. 48.



Beh. ahgf = fied.

Beweis. Es iſt abc = dcb;

ferner hbf = ifb;

gcf = efc,

alſo muß auch ahgf = fied ſein.

Anm. Dieſe beiden Parallelogramme nennt man Ergänzungen an der Diagonale.

§. 84. Lehrſätze.

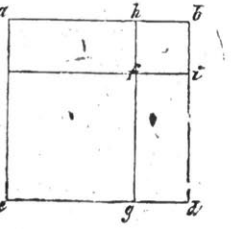
1) Das Quadrat über der Summe zweier Linien iſt gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.

2) Das Quadrat über der Differenz zweier Linien iſt gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.

Beweis zu 1. Iſt cg = m, gd = n, ſo ergiebt ſich unmittelbar aus der Figur:

$(m + n)^2 = m^2 + 2 . m . n + n^2$ *).

Fig. 49.



Beweis zu 2. Es iſt

efcg = abcd — abei — hbgd + hbfi

oder efcg = abcd — 2abei + hbfi.

Iſt nun cd = m, gd = n. ſo iſt alſo:

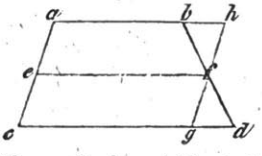
$(m — n)^2 = m^2 — 2 . m . n + n^2$.

*) m . n bedeutet das aus den Seiten m und n gebildete Rechteck, m^2 das über der Seite m errichtete Quadrat.

§. 85. Lehrſatz.

Ein Trapez iſt gleich einem Parallelogramme, welches dieſelbe Höhe, wie das Trapez, und zur Grundlinie die halbe Summe der parallelen Seiten des Trapezes hat.

Fig. 50.



Beweis. Verbindet man die Mittelpunkte e und f der nicht parallelen Seiten ac und bd, ſo iſt $ef = \frac{1}{2}(ab + cd)$ nach §. 48. Zieht man nun $gfh \parallel ac$, ſo iſt ahcg das fragliche Parallelogramm. Daſſelbe muß aber gleich abcd ſein, weil $\triangle hbf \cong \triangle gdf$ iſt ($bf = fd$, $\sphericalangle hbf = \sphericalangle gdf$, $\sphericalangle bhf = \sphericalangle dgf$).

§. 86. Lehrſatz.

Ein reguläres Vieleck iſt gleich einem Dreiecke, welches den Umfang des Vielecks als Grundlinie und den ſenkrechten Abſtand der Vielecksſeite vom Mittelpunkte als Höhe hat.

Beweis. Ein reguläres neck läßt ſich durch Linien, welche vom Mittelpunkte der Figur nach den Ecken gezogen werden, in n congruente Dreiecke zerlegen. Die Summe dieſer n congruenten Dreiecke erhält man dadurch als ein einziges Dreieck, daß man die Grundlinie eines derſelben nmal größer macht, während die Höhe unverändert gelaſſen wird. Man erhält dabei den Umfang der Figur als Grundlinie für das Dreieck.

§. 87. Lehrſatz.

Ein Kreis iſt gleich einem Dreiecke, welches die Peripherie des Kreiſes als Grundlinie und den Radius deſſelben als Höhe hat.

Beweis. Da man den Kreis als reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten, bei welchem der ſenkrechte Abſtand der Seiten vom Mittelpunkte gleich dem Radius iſt, betrachten kann, ſo ergiebt ſich dieſer Satz aus dem vorigen.

Anm. Die Ausführung dieſes Satzes findet darin ihre Schwierigkeiten, daß man kein Mittel hat, um die Peripherie *genau* als gerade Linie darzuſtellen. — Einige Methoden, welche ein annäherndes Reſultat liefern, folgen in einem ſpätern Capitel.

Uebungssätze.

1) Verbindet man in einem Trapeze die Mittelpunkte der parallelen Seiten, so wird dasselbe durch die Verbindungslinie halbirt.

2) Wenn man in einem Dreiecke die Halbirungspunkte zweier Seiten verbindet und ferner von diesen Punkten aus zwei beliebige Parallelen nach der dritten Seite zieht, so entsteht ein Parallelogramm, welches halb so groß als das Dreieck ist.

3) Zieht man in einem Trapeze vom Halbirungspunkte einer der nicht parallelen Seiten Linien nach den Endpunkten der andern, so entsteht ein Dreieck, welches gleich der Hälfte des Trapezes ist.

4) Halbirt man zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks und verbindet die Halbirungspunkte einer jeden mit den Endpunkten der andern, so entstehen zwei Dreiecke, die zusammen so groß sind als das Viereck.

5) Zwei Dreiecke sind gleich groß, wenn zwei Seiten des einen einzeln gleich zweien Seiten des andern sind, und wenn die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zusammen 2R betragen.

6) Das aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel gezeichnete Parallelogramm ist eben so groß als das Rechteck, welches man aus der dritten Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe construirt.

7) Liegen die drei Ecken eines Dreiecks in den Seiten eines Parallelogramms, so ist das Dreieck kleiner als die Hälfte des Parallelogramms.

8) Zwei Dreiecke sind gleich groß, wenn zwei Seiten des einen einzeln gleich zweien Seiten des andern sind, die dritte Seite des einen aber doppelt so groß ist als die Gerade, welche man aus dem Halbirungspunkte der dritten Seite des andern nach der gegenüberliegenden Ecke zieht.

9) Schneidet man von zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms aus gleiche Stücke auf den vier Seiten so ab, daß je zwei, die auf parallelen Seiten genommen werden, gleich sind, und verbindet diese vier Durchschnittspunkte, so ist das so entstandene Parallelogramm gleich dem Parallelogramme, welches entsteht, wenn man dieselben Stücke auf dieselbe Art von den beiden andern gegenüberliegenden Ecken aus abschneidet.

10) Wenn zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Spitze haben und ihre Grundlinien gleich und auch parallel sind, so ist die algebraische Summe ihrer Flächen halb so groß, als das durch die Grundlinien bestimmte Parallelogramm.

11) Wenn man in einem Trapeze die Halbirungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten und ferner einen beliebigen Punkt der so erhaltenen Geraden mit den vier Ecken der Figur verbindet, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Dreiecken gleich der Summe der beiden andern gegenüberliegenden.

12) Die drei Senkrechten, welche von einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten gezogen werden, sind zusammen gleich der Höhe des Dreiecks.

13) Die drei Linien, welche von den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, schneiden sich in einem Punkte.

14) Ein beliebiges Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

15) Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln.

16) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, zu welchem die Grundlinie und ein derselben anliegender Winkel gegeben sind.

17) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges mit gegebener Grundlinie zu verwandeln.

18) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges mit gegebener Höhe zu verwandeln.

19) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, dessen vier Seiten eine bestimmte Größe haben.

20) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, dessen Höhe und Umfang gegeben sind.

21) Ein Vieleck in ein Rechteck von bestimmtem Umfange zu verwandeln.

22) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einer Ecke ausgehen.

23) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Punkte in der einen Seite ausgehen.

24) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Punkte innerhalb des Dreiecks ausgehen.

25) Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie zu halbiren, welche durch einen innerhalb oder außerhalb gegebenen Punkt geht.

Neuntes Capitel.

Von der Ausmessung der geraden Linien und der ebenen Figuren.

§. 88. Erklärung.

Die Länge einer Linie A wird dadurch bestimmt, daß man angiebt, wie oft eine bekannte Linie B in derselben enthalten sei. Ist also $A = mB$ gefunden, wo m eine ganze Zahl bedeutet, so ist A durch B gemessen. Ebenso ist die Ebene D durch E gemessen, sobald man $D = nE$ hat, wo n ebenfalls eine ganze Zahl, E eine bekannte Ebene bedeutet. B und E nennt man die Maaße, m und n die Maaßzahlen. Linien und Ebenen werden daher durch die Ausmessung als benannte Zahlen dargestellt.

§. 89. Erklärung.

Ist B ein Maaß für A, so ist auch $\frac{B}{2}$, $\frac{B}{3}$ u. s. w. ein Maaß für A, oder auch B ein Maaß für 2A, 3A u. s. w. Ist $\frac{B}{2}$ ein Maaß für A, so ist $A = m \cdot \frac{B}{2}$. Da aber $m \cdot \frac{B}{2} = \frac{m}{2} \cdot B$ ist, so ist

auch $A = \frac{m}{2} . B$, wodurch ausgedrückt wird, daß $\frac{B}{2}$ ein Maaß für A sein würde. $\frac{m}{2} . B$ heißt eine gebrochene benannte Zahl.

§. 90. Erklärung.

Lassen sich zwei Linien oder zwei Ebenen durch dasselbe Maaß messen, so nennt man sie commensurabel. So sind A und B commensurabel, wenn $A = mC$ und $B = nC$ ist (wobei m und n rationale Zahlen bedeuten). Alsdann ist auch:

$$A : B = mC : nC = m : n^*).$$

Zwei Linien, die mit demselben Maaße gemessen sind, verhalten sich daher, wie ihre Maaßzahlen und stehen in einem rationalen Verhältnisse; ebenso zwei Ebenen. Es können sich also auch zwei Ebenen verhalten, wie zwei Linien, wodurch die Größenproportion entsteht:

$$aA : bA = cB : dB^{**}).$$

§. 91. Erklärung.

Da die Größenproportion:

$$aA : bA = cB : dB$$

nur richtig sein kann, wenn auch die Zahlenproportion

$$a : b = c : d$$

richtig ist, so ist man dadurch in den Stand gesetzt, das fehlende Glied einer Größenproportion zu bestimmen.

Ist $aA : bA = cB : xB$, so ist auch

$$a : b = c : x, \text{ daher}$$

$$x = \frac{bc}{a} \text{ und}$$

$$aA : bA = cB : \frac{bc}{a}B.$$

§. 92. Erklärung.

Der für Zahlenproportionen gültige Satz:

$$\text{Ist } a : b = c : d, \text{ so folgt}$$
$$(a \mp b) : b = (c \mp d) : d,$$

ist auch für Größenproportionen richtig.

$$\text{Ist } A : B = C : D, \text{ so ist auch}$$
$$(A \mp B) : B = (C \mp D) : D.$$

*) Vergleiche Arithmetik §. 85.
**) Vergleiche Arithmetik §. 118 und 125.

Dagegen sind die zwei für Zahlenproportionen gültige Sätze:

1) In jeder Proportion lassen sich die innern und auch die äußern Glieder vertauschen,
2) das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkte der innern,

nicht für alle Größenproportionen richtig. Der Lehrsatz 2) ist nur für den Fall gültig, daß bloß zwei Glieder der Größenproportion benannte Zahlen, die beiden andern aber unbenannte Zahlen sind. Die (innern oder äußern) Glieder der Proportion lassen sich nur umtauschen, wenn entweder alle Glieder gleich benannt, oder wenn nur zwei derselben benannt sind.

§. 93. Erklärung.

Lassen sich zwei Größen A und B nicht durch ein gemeinschaftliches Maaß messen, so klein man dasselbe auch wählt, so nennt man sie incommensurabel. Läßt sich also Az. B. durch C messen, so findet man beim Ausmessen von B durch C stets eine Zahl m der Art, daß m C zu klein, hingegen (m + 1) C zu groß ist. Der richtige Werth von B liegt daher zwischen m C und (m + 1) C, läßt sich aber niemals ganz genau erhalten und das Verhältniß von A und B ist also irrational. Ein Beispiel zweier incommensurabeln Linien wird in einem der nächsten Paragraphen gegeben werden.

A. Ausmessung der Linien.

§. 94. Erklärung.

Das gewöhnliche Maaß der Linien ist der preußische Fuß = 139,13 pariser Linien. Der Fuß (1′) wird eingetheilt in 12 Zoll (12″), der Zoll in 12 Linien (12‴); 12 Fuß machen eine Ruthe (1⁰), 2000 Ruthen 1 Meile.

Zum Gebrauch für Feldmesser theilt man auch die Ruthe (1669,56 pariser Linien) in 10 Fuß, den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien.

Die erstere Eintheilung nennt man das Duodecimalmaaß, letztere das Decimalmaaß. Dieses letztere hat darin eine große Bequemlichkeit, daß sich eine Summe von Ruthen, Fußen u. s. w. leicht als Decimalbruch darstellen läßt und daß man also die Verwandlung von Ruthen in Fuße u. s. w. durch bloßes Fortrücken des Komma's bewerkstelligen kann.

So ist z. B.

$$2^0\ 6'\ 3''\ 5''' = 2{,}635^0 = 26{,}35' = 263{,}5'' = 2635'''\text{;}$$

ferner $3578{,}5''' = 357{,}85'' = 35{,}785' = 3{,}5785^0$;
ferner $3^0\,5'' = 3{,}05^0 = 30{,}5' = 305'' = 3050'''$.

Das gewöhnliche französische Maaß ist der Meter = 3,186 preuß. Fuß. 1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter = 0,0000001 des Erdquadranten.

§. 95. Erklärung*).

Um zu erfahren, ob zwei gegebene Linien commensurabel sind, kann man dasselbe Verfahren anwenden, dessen man sich bedient, um den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden**). Man trägt nämlich die kleinere Linie so oft, als es möglich ist, auf der größern ab, den Rest wieder auf der kleineren, den jetzt bleibenden Rest wieder auf dem vorhergehenden, und setzt dies so lange fort, bis irgend ein Rest in dem vorhergehenden genau ein oder mehrere Male enthalten ist. Der zuletzt gebrauchte Rest ist alsdann das größte gemeinschaftliche Maaß. Der Beweis wird eben so geführt, wie für dasselbe Verfahren in Zahlen (Arith. §. 63).

§. 96.

Um das rationale oder irrationale Verhältniß zweier Linien aufzufinden, wendet man das Verfahren an, dessen man sich bedient, um das Verhältniß zweier Zahlen in Form eines Decimalbruchs darzustellen (Arithm. §. 67).

Soll z. B. das Verhältniß zwischen der Hypotenuse h und der Cathete c eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks gesucht werden, so macht man die Cathete c (als die kleinere der beiden Linien) zehnmal größer und sieht nach, wie oft jetzt die Hypotenuse h in 10c enthalten ist***). Man findet alsdann:

$$10c = 7h + r_1 \quad (r_1 \text{ bedeutet den übrig bleibenden Rest}).$$

Nun macht man wieder r_1 zehnmal größer und sieht nach, wie oft h in $10r_1$ enthalten ist. Man findet:

$$10r_1 = 0h + r_2.$$

Macht man wieder r_2 zehnmal größer und verfährt wie vorher, so ist:

$$10r_2 = 7h + r_3.$$

---

*) Die §§. 95 und 96 sind von Anfängern zunächst zu überschlagen.
**) Vergl. Arithmetik §. 63.
***) Man erreicht dies am besten, wenn man c 10 mal hinter einander auf einer Linie abträgt, die nach der Längeneinheit h abgetheilt ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man folgende Gleichungen:

$$10c = 7 \cdot h + r_1 \text{ oder } c = h \cdot 0{,}7 + \frac{r_1}{10};$$

$$10r_1 = 0 \cdot h + r_2 \;,, \quad \frac{r_1}{10} = h \cdot 0 + \frac{r_2}{100};$$

$$10r_2 = 7 \cdot h + r_3 \;,, \quad \frac{r_2}{100} = h \cdot 0{,}007 + \frac{r_3}{1000};$$

$$10r_3 = 1 \cdot h + r_4 \;,, \quad \frac{r_3}{1000} = h \cdot 0{,}0001 + \frac{r_4}{10000};$$

$$10r_4 = 0 \cdot h + r_5 \;,, \quad \frac{r_4}{10000} = h \cdot 0 + \frac{r_5}{100000};$$

$$10r_5 = 6 \cdot h + r_6 \;,, \quad \frac{r_5}{100000} = h \cdot 0{,}000006 + \frac{r_6}{1000000};$$

u. s. w.

Es ist also $c = h.\ (0{,}7 + 0{,}007 + 0{,}0001 + 0{,}000006 + \ldots)$
oder $c = h \cdot 0{,}707106 \ldots\ldots$

Dieser Werth stimmt, so weit man ihn mit Hülfe der Construction erhalten kann, überein mit $\sqrt{0{,}5}$.

Erhält man inmitten einer ähnlichen Construction den Rest 0, so haben die Linien ein rationales Verhältniß; erhält man einen Rest, den man schon einmal erhalten hatte, so ergiebt sich als Verhältnißzahl beider Linien ein periodischer Decimalbruch. Da dieser sich in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln läßt, so ist für diesen Fall das Verhältniß der Linien ebenfalls rational.

B. Ausmessung oder Inhaltsbestimmung der ebenen Figuren.

§. 97. Erklärung.

Das gewöhnliche Maaß für Ebenen sind die Quadrate, welche man über den in §. 94 angeführten Längeneinheiten errichten kann, nämlich Quadratlinien ($\square'''$), Quadratzolle ($\square''$), Quadratfuße ($\square'$), Quadratruthen ($\square^0$), Quadratmeilen ($\square M.$).

Die Abhängigkeit dieser verschiedenen Maaße von einander ist leicht zu finden. Theilt man nämlich die Seiten eines Quadrates jede in m gleiche Theile und verbindet die Theilpunkte durch Linien, welche den Quadratseiten parallel sind, so zerfällt das Quadrat in $m \cdot m$ kleinere,

einander gleiche Quadrate. Hat man also z. B. jede Seite in 6 gleiche Theile getheilt, so erhält man 6^2 oder 36 kleinere Quadrate.

Nach dem Duodecimalmaaße ist daher:

$1\ \square^0 = 144\ \square'$; $1\square' = 144\ \square''$; $1\ \square'' = 144\ \square'''$;
$1\frac{1}{3}\ \square^0 = 192\ \square'$;
$63845\ \square''' = 3\ \square'\ 11\ \square''\ 53\ \square'''$.

Nach dem Decimalmaaße ist hingegen:

$1\ \square^0 = 100\ \square'$; $1\ \square' = 100\ \square''$; $1\ \square'' = 100\ \square'''$;
$1{,}3\ \square^0 = 130\ \square' = 13000\ \square'' = 1300000\ \square'''$;
$42869\ \square''' = 428{,}69\ \square'' = 4{,}2869\ \square'$.

Beim Decimalmaaße braucht man also bloß das Komma jedesmal um 2 Stellen fortzurücken.

180 $\square^0$ sind gleich 1 Morgen, 30 Morgen gleich 1 Hufe.

§. 98. Zusatz.

Da nach vorigem §. ein Quadratfuß in $7 \cdot 7$ gleiche Quadrate über der Seite $\frac{1}{7}$ Fuß, oder ein Quadrat über der Seite a in $m \cdot m$ Quadrate über der Seite $\frac{a}{m}$ zerlegt werden kann, so ist umgekehrt das Quadrat über $\frac{1}{7}$ Fuß der 49ste Theil eines Quadratfußes, oder das Quadrat über der Seite $\frac{a}{m}$ der $(m \cdot m)$te Theil des Quadrates über der Seite a.

§. 99. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Rechtecks wird dadurch gefunden, daß man Grundlinie und Höhe mit demselben Maaße mißt, die Maaßzahlen mit einander multiplicirt und das Quadrat des Maaßes dem Produkte als Benennung hinzufügt, oder kurz:

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Anm. Linien können als benannte Zahlen nicht mit einander multiplicirt werden. Man sagt jedoch häufig der Abkürzung wegen Produkt zweier Linien, statt Produkt der Maaßzahlen zweier Linien.

Bew. Ist M ein gemeinschaftliches Maaß für die Grundlinie und Höhe, und ist dasselbe in der Grundlinie a mal, in der Höhe b mal enthalten, so theile man beide Linien nach dem Maße M ab und verbinde dann die Theilpunkte so, daß die Verbindungslinien theils mit der einen, theils mit der andern Seite des Rechtecks parallel sind. Man erhält dadurch ab Quadrate über der Seite M.

Ist also z. B. die Grundlinie = 6′, die Höhe = 3′, so zerfällt das Rechteck in 18 Quadrate über der Seite 1′, oder in 18 □′.

Erhält man bei Anwendung des Maaßes M gebrochene Maaßzahlen für die Grundlinie und Höhe, ist also die Grundlinie $= \frac{a}{b} . M$, die Höhe $= \frac{c}{d} . M$, so ist das gemeinschaftliche Maaß für beide Linien $= \frac{1}{bd} . M$. Die Grundlinie ist alsdann $= ad \frac{M}{bd}$, die Höhe $= cb \frac{M}{db}$ und das Rechteck zerfällt in ad . cb Quadrate über der Seite $\frac{M}{bd}$. Da ein solches Quadrat der (bd . bd)te Theil des Quadrates über der Seite M ist (vergl. §. 98), so folgt, daß der Inhalt $= \left(\frac{ad . cb}{bd . bd}\right) . M^2 = \left(\frac{a}{b} . \frac{c}{d}\right) . M^2$ ist.

Ist z. B. die Grundlinie $= 3\frac{1}{3}'$, die Höhe $= 2\frac{1}{4}'$, so ist das gemeinschaftliche Maaß $= \frac{1}{12}'$. Die Grundlinie zerfällt also in 40, die Höhe in 27 Zwölftelfuße, und das Rechteck in 40 . 27 Quadrate über der Seite $\frac{1}{12}'$. Da aber das Quadrat über $\frac{1}{12}' = \frac{1}{12 . 12} \square'$ ist, so erhält man für den Inhalt:

$$\frac{40 . 27}{12 . 12} \square' = 3\tfrac{1}{3} . 2\tfrac{1}{4} \square' = 7\tfrac{1}{2} \square'.$$

Anm. Sind die Seiten eines Rechtecks nicht mit demselben Maaße gemessen, so müssen dieselben, wie sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergiebt, auf ein gemeinschaftliches Maaß reducirt werden.

Beispiele.

Höhe.	Grundlinie.	Inhalt.
a) Decimalmaß:		
2′ 5″	3′ 2″	(2, 5 . 3, 2) □′ = 8 □′;
3° 4′ 2″ 3‴	6° 4″	(3, 423 . 6, 04) □° = 20, 67492 □° = = 20 □° 67 □′ 49 □″ 20 □‴;
3° 8″	4′ 5‴	(3, 8 . 0, 405) □° = 1, 2474 □° = = 1 □° 24 □′ 74 □″;
b) Duodecimalmaß:		
6° 4′	2° 5′	(76 . 29) □′ = 2204 □′ = 15 □° 44 □′;
3′ 6″	2′ 6″	$(3\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2})$ □′ = $8\frac{3}{4}$ □′ = 8 □′ 96 □″;
3′ 6″	5″	(42 . 5) □″ = 210 □″ = 1 □′ 66 □″.

§. 100. Zusatz.

Sind Grundlinie und Höhe eines Rechtecks incommensurabel, d. h. nicht durch ein und dasselbe Maaß meßbar, ist also z. B. die Höhe $= 6'$, die Grundlinie $= \sqrt{2}' = 1{,}41421\ldots.'$, so ist $6 . 1{,}41422\ \square'$ der Inhalt eines etwas größeren, $6 . 1{,}41421\ \square'$ der Inhalt eines etwas kleineren Rechtecks. Der (unbekannte) Inhalt obigen Rechtecks liegt also zwischen $6 . 1{,}41421\ \square'$ und $6 . 1{,}41422\ \square'$. Zwischen denselben Gränzen liegt auch der Werth des Ausdruckes $6 . \sqrt{2}\ \square'$. Legt man die Gränzen, zwischen welchen der Inhalt des Rechtecks liegen muß, immer näher und näher, so findet man, daß die nämlichen Gränzen stets auch für den Ausdruck $6 . \sqrt{2}\ \square'$ gelten. Man ist daher berechtigt, $6 . \sqrt{2}\ \square'$ oder das Produkt aus Grundlinie und Höhe als den richtigen Ausdruck für den Inhalt des Rechtecks anzusehen. Der Inhalt eines jeden Rechtecks von ganz beliebigen Seiten ist also gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Der Inhalt eines Quadrates ist gleich dem Quadrate einer Seite.

Anm. Der Inhalt eines Rechtecks mit incommensurabeln Seiten läßt sich natürlich niemals ganz genau in Zahlen angeben, jedoch hat man in der Praxis auch nicht nöthig, für die irrationale Zahl viel Decimalstellen zu suchen, da ein Unterschied von 0,00001 Ruthe selbst mit Hülfe einer Loupe kaum noch zu erkennen ist.

§. 101. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt sich noch:

1) Rechtecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.
2) Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.
3) Rechtecke von beliebigen Höhen und Grundlinien verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinien und Höhen.

§. 102. Zusatz.

Ist der Inhalt eines Rechtecks gegeben und ferner eine Seite (d. h. Grundlinie oder Höhe), so erhält man die andere, indem man mit der Maaßzahl der gegebenen Seite in die Maaßzahl des Inhalts dividirt. Das Maaß des Inhaltes muß jedoch das Quadrat über dem Maaße der gegebenen Seite sein.

Ist der Inhalt eines Quadrates gegeben, so erhält man die Seite desselben, indem man die zweite Wurzel aus der Maaßzahl des Inhaltes zieht.

§. 103. Lehrsätze.

Aus den bisher entwickelten Sätzen über Gleichheit der Figuren und über Inhaltsbestimmung der Rechtecke ergeben sich folgende Sätze:

1) Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

2) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Haben also zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke gleiche Höhen, so verhalten sie sich wie die Grundlinien; haben sie gleiche Grundlinien, so verhalten sie sich wie die Höhen, und haben sie beliebige Höhen und Grundlinien, so verhalten sie sich wie die Produkte aus denselben.

3) Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der parallelen Seiten und aus der zugehörigen Höhe.

4) Der Inhalt eines regulären ecks ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange und dem senkrechten Abstande irgend einer Seite vom Mittelpunkte.

Zwei beliebige reguläre ecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich daher wie die Produkte aus einer Seite und der Höhe.

5) Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie und dem Radius.

Anm. Da die Peripherie, wie in einem spätern Capitel entwickelt werden wird, stets gleich ist dem Durchmesser multiplicirt mit der irrationalen Zahl 3,14159.... ($=\pi$), da also $P = d\pi = 2r\pi$ ist, so ist der Inhalt eines Kreises $= \frac{P \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \pi \cdot r}{2} = r^2\pi$.

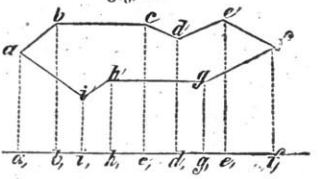
Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich daher auch wie die Radien, und die Inhalte wie die Quadrate der Radien.

§. 104. Zusatz.

Der Inhalt eines irregulären Vielecks wird dadurch gefunden, daß man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und die erhaltenen Dreiecke berechnet, oder dadurch, daß man das Vieleck in ein Dreieck verwandelt (§. 82) und den Inhalt desselben bestimmt, oder dadurch, daß man eine beliebige Gerade zur Grundlinie wählt, von allen Ecken des Vielecks Senkrechte auf dieselbe fällt, und die erhaltenen Trapeze berechnet.

Beispiel. Es soll der Inhalt des Vielecks abcdefghi berechnet werden.

Fig. 51.



Auflöſung. Iſt $a_1 f_1$ die angenommene Grundlinie und ſind aa_1, bb_1 u. ſ. w. die gezogenen Senkrechten, ſo berechnet man zuerſt den Inhalt von $abcdeff_1 a_1$ und zieht hernach den Inhalt von $aihgff_1 a_1$ ab.

Man erhält:

$$\begin{cases} \text{Trapez } a_1abb_1 = \frac{1}{2}(aa_1 + bb_1) \cdot (a_1b_1); \\ \text{„ } b_1bcc_1 = \frac{1}{2}(bb_1 + cc_1) \cdot (b_1c_1); \\ \text{„ } c_1cdd_1 = \frac{1}{2}(cc_1 + dd_1) \cdot (c_1d_1); \\ \text{„ } d_1dee_1 = \frac{1}{2}(dd_1 + ee_1) \cdot (d_1e_1); \\ \text{„ } e_1eff_1 = \frac{1}{2}(ee_1 + ff_1) \cdot (e_1f_1); \end{cases}$$

Ferner:

$$\begin{cases} \text{Trapez } a_1aii_1 = \frac{1}{2}(aa_1 + ii_1) \cdot (a_1i_1); \\ \text{„ } i_1ihh_1 = \frac{1}{2}(ii_1 + hh_1) \cdot (i_1h_1); \\ \text{„ } h_1hgg_1 = \frac{1}{2}(hh_1 + gg_1) \cdot (h_1g_1); \\ \text{„ } g_1gff_1 = \frac{1}{2}(gg_1 + ff_1) \cdot (g_1f_1). \end{cases}$$

Zieht man die Summe letzterer Ausdrücke von der Summe der erſteren ab, ſo erhält man den Inhalt von abcdefghi.

Anm. Iſt die Grundlinie durch die Figur hindurchgegangen, ſo werden ſämmtliche Trapeze addirt.

Aufgaben.

1) Die Grundlinie eines Parallelogramms iſt 60° 4′ 8″ 5‴, die Höhe 4° 7′ 9″ 3‴. Wie groß iſt der Inhalt? *)

2) Die Grundlinie eines Parallelogramms iſt 10° 8″ 5‴, die Höhe 8° 3′ 7‴. Wie groß iſt der Inhalt?

3) Die Grundlinie eines Dreiecks iſt 8′ 7″ 3‴, die Höhe 1° 3‴. Wie groß iſt der Inhalt?

4) Die Grundlinie eines Dreiecks iſt 20° 8′, die Höhe 8° 7′ 6″ 3‴. Wie groß iſt der Inhalt?

5) Die Grundlinie eines Dreiecks iſt 8° 7′ 6″, die Höhe 6° 7′ 3″ (beides Duodecimalmaaß). Wie groß iſt der Inhalt?

6) Die parallelen Seiten eines Trapezes ſind 6° 3′ 8‴ und 5° 3′ (Duodecimalmaaß), die Höhe iſt 6′ 3″. Wie groß iſt der Inhalt?

7) Der Inhalt eines Parallelogramms iſt 86 □° 7 □′, die Grundlinie iſt 8° 6′ 7″. Wie groß iſt die Höhe?

8) Der Inhalt eines Dreiecks iſt 12 □° 83 □′, die Grundlinie iſt 4 □° 3″. Wie groß iſt die Höhe?

9) Der Inhalt eines Dreiecks iſt 4 □′ 8 □″, die Höhe 7′ 8″. Wie groß iſt die Grundlinie?

10) Der Inhalt eines Quadrates iſt 8 □′ 7 □″. Wie groß iſt die Seite?

*) Wo nicht das Gegentheil bemerkt iſt, ſoll Decimalmaaß genommen werden.

11) Der Halbmeſſer eines Kreiſes iſt 7′ 8‴. Wie groß iſt der Inhalt?
12) Der Halbmeſſer eines Kreiſes iſt 4′ 7″. Wie groß iſt der Inhalt?
13) Der Inhalt eines Kreiſes iſt 20 □′ 88 □″. Wie groß iſt der Halbmeſſer?
14) Der Inhalt eines Kreiſes iſt 12 □′ 88 □″. Wie groß iſt der Halbmeſſer?

Auflöſungen.

1) 289 □° 90 □′ 46 □″ 5 □‴; 2) 83 □° 77 □′ 60 □″ 95 □‴;
3) 43 □′ 78 □″ 9,5 □‴; 4) 91 □° 13 □′ 52 □″;
5) 28 □° 69 □′ 27 □″; 6) 2 □° 143 □′ 61 □″;
7) 9° 9′ 2″ 7,3 ...‴; 8) 6° 3′ 6″ 7,2 ..‴; 9) 1° 4″ 6,1 ..‴; 0,1236
10) 2′ 8″ 4,07 ...‴; 11) 1 □° 57 □′ 47,6 .. □″;
12) 69 □′ 39,7 .... □″; 13) 2′ 5″ 7 ...‴;
14) 2 □′ 2,4 ... □‴.

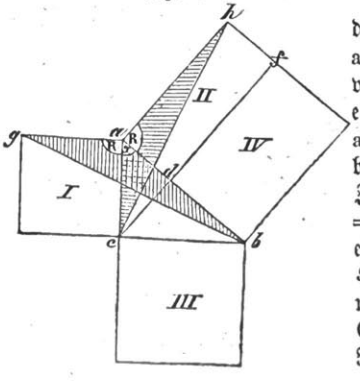
Zehntes Capitel.

Der pythagoräiſche Lehrſatz.

§. 105. Lehrſatz.

Das Quadrat über der Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks iſt gleich der Summe der Quadrate über den beiden Catheten.

Fig. 52.

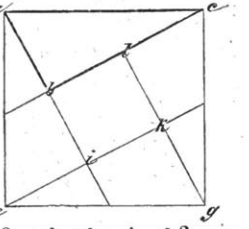


Bew. I. Zeichnet man über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks acb die drei Quadrate, zieht ferner vom Scheitel c des rechten Winkels eine Senkrechte cd auf die Hypotenuſe ab und verlängert cd bis f, ſo läßt ſich beweiſen, daß I = II, III = IV iſt. Zieht man nämlich gb, ſo iſt △ gba = der Hälfte des Quadrates I, weil es dieſelbe Grundlinie ag und dieſelbe Höhe wie das Quadrat hat. Zieht man ferner ch, ſo iſt aus demſelben Grunde △ cha = der Hälfte des Rechtecks II. Da nun aber △ gba ≅

△ cha iſt, (ag = ac, ab = ah, < x + R = < x + R), ſo ſind die Hälften von I und II einander gleich, alſo auch I = II. Daß III = IV iſt, wird auf dieſelbe Art bewieſen.

Bew. II. Zeichnet man über der Hypotenuſe ac des rechtwinkligen Dreiecks abc das Quadrat aegc, verlängert ab und cb bis zu den Seiten des Quadrats und zieht von den zwei Ecken e und g Linien dieſen verlängerten Seiten parallel, ſo entſtehen die congruenten Dreiecke aie, ekg, dlg, glc und cba und das Quadrat blik. Der Inhalt des Dreiecks abc iſt nun $= \frac{ab \cdot bc}{2}$, alſo der Inhalt aller vier Dreiecke $= 2 \cdot ab \cdot bc$. Ferner iſt der Inhalt des Quadrats blik $= bi^2 = (bc - ab)^2 =$
$= bc^2 - 2ab \cdot bc + ab^2$.

Fig. 53.



Es iſt alſo $ac^2 = 2 \cdot ab \cdot bc + bc^2 - 2 \cdot ab \cdot bc + ab^2 =$
$= bc^2 + ab^2$.

Anm. Neben dieſen zwei Beweiſen giebt es noch verſchiedene andere, jedoch iſt für Anfänger Beweis I der leichteſte. Der angemeſſenſte Beweis, wie auch der (für das Syſtem) angemeſſenſte Ort findet ſich indeß erſt bei der Aehnlichkeit der Dreiecke. Im nächſten §. folgt noch ein dritter Beweis, der den pythagoräiſchen Lehrſatz als einen ſpeciellen Fall des Lehrſatzes des Pappus hinſtellt.

§. 106. Lehrſatz (des Pappus).

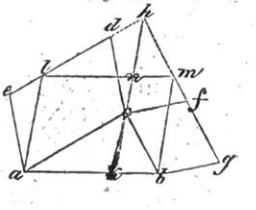
Beſchreibt man über zwei Seiten ac und bc eines Dreiecks abc zwei beliebige Parallelogramme acde und bcfg, verlängert ihre den Seiten des Dreiecks parallelen Seiten ed und gf bis zum Durchſchnittspunkte h, zieht dann die Linie hck und ſchließlich von b und a aus die Linien bm und al parallel mit hk, ſo entſteht ein Parallelagramm lmba, welches gleich der Summe der beiden erſten Parallogramme iſt.

Vor. eh || ac, gh || bc,
la || hk || mb.

Beh. 1) lmba = ##,
2) lmba = edca + fgbc.

Bew. Es iſt la || hc || mb,
alſo la || mb;
ferner iſt la = hc,
mb = hc,
alſo la = mb.

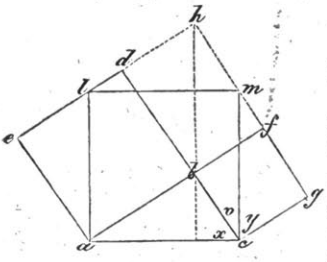
Fig. 54.



Aus la ‖ mb und la = mb folgt aber lmba = ▯.
Nun iſt acde = achl = lnak (Grundlinie la),
ebenſo bcfg = bchm = nmkb (Grundlinie bm),
folglich acde + bcfg = lnak + nmkb = lmba.

Für den Fall, daß die beiden Seiten einen rechten Winkel einſchließen und daß die beiden Parallelogramme Quadrate ſind, erhält man den pythagoräiſchen Lehrſatz.

Fig. 55.



Vor. ∠ abc = R;
edba = ab^2; fgcb = bc^2.
Beh. lmac = ac^2 = ab^2 + bc^2.
Bew. Es iſt lmca = edba + fgbc
= ab^2 + bc^2
und es bleibt alſo bloß noch zu beweiſen, daß lmac = ac^2 iſt. Nun iſt gh = = ab + bc, ferner mh = bc, alſo gm = ab. Außerdem iſt gc = cb, ∠ mgc = ∠ abc, daher △ mgc ≅ △ abc und mc = ac.

Ferner iſt y = x, alſo auch x + v = y + v = R.
Aus mc = ac und aus x + v = R ergiebt ſich aber lmca = ac^2.

§. 107. Zuſätze.

Aus den vor. §§. ergeben ſich folgende Conſtructionen:

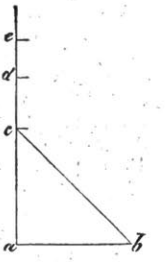
1) Soll die Seite eines Quadrates gefunden werden, welches gleich der Summe von zwei andern Quadraten iſt, ſo zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die beiden Catheten gleich den Seiten der gegebenen Quadrate ſind. Die Hypotenuſe iſt alsdann die geſuchte Seite.

2) Soll die Seite eines Quadrates gefunden werden, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate iſt, ſo wiederholt man dieſes Verfahren.

3) Soll die Seite eines Quadrates gefunden werden, welches gleich der Differenz von zwei gegebenen Quadraten iſt, ſo zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck aus der Seite des größeren Quadrates als Hypotenuſe und der des kleinern Quadrates als Cathete. Die zweite Cathete iſt die geſuchte Seite.

Anm. Sollen die Seiten verſchiedener Quadrate gefunden werden, welche beziehlich 2, 3, 4.... m mal größer als ein gegebenes Quadrat

Fig. 56.



(ab^2) ſind, ſo zeichne man einen rechten Winkel, deſſen einer Schenkel ab iſt. Macht man nun $ac = ab$, ſo iſt $bc^2 = 2 . ab^2$. Macht man ferner $ad = bc$, ſo iſt $bd^2 = 3 . ab^2$; macht man wiederum $ae = db$, ſo iſt $be^2 = 4 . ab^2$ u. ſ. w.

Iſt jedoch das Verhältniß etwas groß, ſoll z. B. ein Quadrat geſucht werden, welches 76 mal größer iſt als ab^2, ſo ſetzt man $76 . ab^2 = 64 . ab^2 + 9 . ab^2 + 4 . ab^2 - 1ab^2 = (8ab)^2 + (3ab)^2 + (2ab)^2 - ab^2$.

Jetzt hat man bloß noch vier Quadrate zu vereinigen, was mit Hülfe von 1, 2 und 3 dieſes §. leicht auszuführen iſt.

Da jede Zahl ſich als algebraiſche Summe von höchſtens vier Quadraten darſtellen läßt, ſo iſt obiges Verfahren überall anzuwenden.

§. 108. Zuſatz.

Da der Inhalt eines Quadrates durch das Quadrat ſeiner Maaßzahl dargeſtellt wird, ſo müſſen für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Quadrate der Maaßzahlen dieſelbe Beziehung zu einander haben, wie die über den Seiten errichteten Quadrate, und es muß ſich daher jede aus den beiden andern berechnen laſſen. Iſt die Maaßzahl der Hypotenuſe $= 10$, die der einen Cathete $= 8$ (beide natürlich mit demſelben Maße gemeſſen), ſo iſt die Maßzahl der andern Cathete $= \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$. Iſt die Maaßzahl der Hypotenuſe $= 1$, das Dreieck dabei gleichſchenklig, ſo iſt $1^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, $x^2 = 0,5$ und $x = \sqrt{0,5} = 0,707106 \ldots$.

Anm. 1. Dieſe Uebereinſtimmung in den Beziehungen zwiſchen den Flächen und zwiſchen den Maaßzahlen gilt auch für die folgenden Sätze. Man kann ſich unter ab ebenſowohl ein aus den Seiten a und b gebildetes Rechteck, wie das Produkt der beiden Maaßzahlen für a und b denken.

Anm. 2. Sind nicht die Maaßzahlen von zwei Seiten, ſondern die Summe die Maaßzahlen der Seiten oder das Produkt derſelben u. ſ. w. gegeben, ſo laſſen ſich alle drei Seiten ebenfalls berechnen.

§. 109. Lehrſatz.

Iſt in einem Dreiecke das Quadrat der einen Seite ſo groß als die Summe, oder ſo groß als die Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten, ſo iſt das Dreieck rechtwinklig.

Im erſteren Falle iſt die erwähnte Seite Hypotenuſe, im letzteren Falle Cathete.

Der Beweis ergiebt ſich leicht indirekt.

Anm. Sind die Maßzahlen der Seiten eines Dreiecks = 3, 4, 5, ſo iſt das Dreieck, weil $5^2 = 4^2 + 3^2$ iſt, rechtwinklig. Hierauf gründet ſich ein bequemes Verfahren, auf freiem Felde einen rechten Winkel abzuſtecken. Rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten rational ſind, wie (3, 4, 5), (5, 12, 13) u. ſ. w. nennt mit pythagoräiſche.

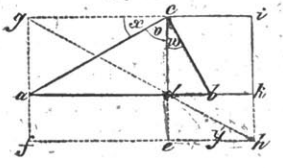
§. 110. Lehrſatz.

1) Die Quadrate über den beiden Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten ſich wie die Abſchnitte, in welche die Hypotenuſe getheilt wird.

Der Beweis ergiebt ſich aus §. 105.

2) Das Quadrat über der nach der Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks gezogenen Höhe iſt gleich dem Rechtecke aus den beiden durch die Höhe gebildeten Abſchnitten der Hypotenuſe.

Fig. 57.



Beweis I.

Vor. $\sphericalangle$ acb = R,
$\sphericalangle$ bdc = R.

Beh. $cd^2 = ad \cdot db$.

Verlängert man cd um das Stück de = db, und zieht durch e und c Parallelen zu ba, durch a eine Parallele zu ce, ſo iſt adfe = ad . bd.

Zieht man ferner die Linie gdh und zieht hi || ce, ſo muß cdki = cd^2 ſein. Es iſt nämlich w + v = R, x + v = R, daher x = w; ferner iſt x = $\sphericalangle$ cgd, $\sphericalangle$ cgd = y, alſo ſchließlich auch w = y.

Aus w = y, $\sphericalangle$ bdc = $\sphericalangle$ hed, db = ed ergiebt ſich aber $\triangle$ bdc $\cong$ deh und hieraus cd = eh = dk = ci. Es iſt alſo cdki = cd^2. Da nun cidk und adfe als Ergänzungen an der Diagonale gleich groß ſind, ſo folgt $cd^2 = ad \cdot db$.

Bew. II. (Siehe Fig. 52.) Es iſt $cd^2 = ac^2 - ad^2$, ferner $ac^2 = ad \cdot ab$, alſo $cd^2 = ad \cdot ab - ad^2 = ad \cdot (ab - ad) = ad \cdot db$.

3) Iſt $ac^2 = ad \cdot ab$ oder $cb^2 = bd \cdot ba$ oder $cd^2 = ad \cdot db$, ſo iſt das Dreieck abc rechtwinklig. (Siehe Fig. 57.)

Der Beweis ergiebt ſich indirekt.

§. 111. Zuſatz.

Die in vorigem §. aufgeſtellten Gleichungen:

$$cd^2 = ad \cdot db,$$
$$ac^2 = ad \cdot ab,$$
$$cb^2 = bd \cdot ba$$

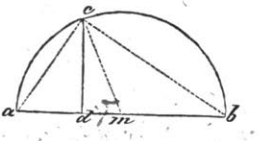
liefern ein Mittel, um jedes beliebige Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Man legt nämlich die zwei verſchiedenen Seiten des Rechtecks an einander, oder auf einander, und beſchreibt über dieſer Linie einen Halbkreis.

1) Sind ad und bd die aneinander gelegten Seiten und iſt $< adc = R$, ſo iſt

$$cd^2 = ad \cdot db.$$

Fig. 58.



2) Sind ad und ab die aufeinandergelegten Seiten, ſo iſt $ca^2 = ad \cdot ab$.

3) Sind bd und ba die aufeinandergelegten Seiten, ſo iſt $cb^2 = bd \cdot ba$.

§. 112. Zuſatz.

Bezeichnet man in voriger Figur dm durch v, $ma = mb = mc$ durch r, ſo iſt $ad = (r - v)$, $bd = (r + v)$.

Da nun $cd^2 = cm^2 - dm^2 = r^2 - v^2$,
ferner $cd^2 = ad \cdot db = (r - v) \cdot (r + v)$ iſt,
ſo folgt $r^2 - v^2 = (r + v) \cdot (r - v)$, d. h.:

die Differenz zweier Quadrate iſt gleich dem Rechtecke, deſſen Seiten durch die Summe und durch die Differenz der Seiten beider Quadrate gebildet werden.

§. 113. Zuſatz.

Die in der Arithmetik entwickelten Formeln:

$$(a + b)m = am + bm,$$
$$(a - b)m = am - bm,$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

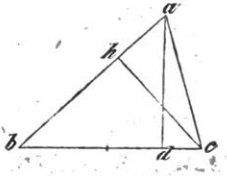
haben nach den bisherigen Entwicklungen noch ihre Richtigkeit, wenn man unter diesen Produkten Rechtecke oder Quadrate versteht.

Verschiedene Sätze lassen sich daher ebensowohl durch eine geometrische, wie durch eine arithmetische Betrachtung entwickeln.

§. 114. Lehrsatz.

Zieht man in dem spitzwinkligen Dreiecke abc die Höhe ad, so ist $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd$.

Fig. 59.



Bew. Es ist $ac^2 = ad^2 + dc^2$,

ferner $ad^2 = ab^2 - bd^2$,

also $ac^2 = ab^2 + dc^2 - bd^2$.

Nun ist $cd^2 = (bc - bd)^2 =$

$= bc^2 - 2.bc.bd + bd^2$,

also $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd +$

$+ bd^2 - bd^2$,

oder $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd.$ (1)

Zieht man die Höhe ch, so ergiebt sich auf dieselbe Art $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot ba \cdot bh$. (2).

Vergleicht man 1) und 2), so ergiebt sich ferner:

$$bc \cdot bd = ba \cdot bh.$$

Anm. Die Linie bd, welche dadurch erhalten wird, daß man von a aus die Senkrechte ad nach bc zieht, nennt man die Projection von ab auf bd. Ebenso ist dc die Projection von ac auf bc, ferner bh die Projection von cb auf ab u. s. w.

§. 115. Zusatz.

Die Gleichungen 1), 2), 3) des vor. §. werden folgendermaaßen in Worten ausgedrückt:

1) Das Quadrat der Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den zwei andern Seiten vermindert um das doppelte Rechteck, welches aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe erhalten wird.

2) Giebt man den Schenkeln eines spitzen Winkels eine beliebige Länge und projicirt beide Schenkel auf einander, so sind die Rechtecke, welche aus je einem Schenkel und der Projection des andern gebildet werden, gleich groß.

§. 116. Lehrſatz.

Zieht man in dem ſtumpfwinkligen Dreiecke abc die Höhe ad, ſo iſt $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot bc \cdot bd$.

Bew. Es iſt $ac^2 = ad^2 + dc^2$,

ferner $ad^2 = ab^2 - db^2$,

daher $ac^2 = ab^2 + dc^2 - db^2$.

Nun iſt $dc^2 = (db + bc)^2 =$

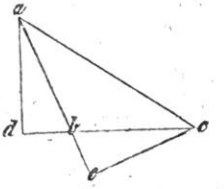
$= db^2 + 2 \cdot db \cdot bc + bc^2$,

alſo $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot db \cdot bc +$

$+ db^2 - db^2$,

oder $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot db \cdot bc$. (1).

Fig. 60.



Zieht man die Höhe ce, ſo erhält man auf dieſelbe Art:

$ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot ab \cdot be$. (2).

Das Quadrat der Dreiecksſeite, welche einem ſtumpfen Winkel gegenüberliegt, iſt alſo gleich der Summe der Quadrate über den zwei andern Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck, welches aus einer dieſer Seiten und der Projection der andern auf dieſelbe gebildet wird.

Vergleicht man ferner 1) und 2), ſo ergiebt ſich:

$ba \cdot be = bc \cdot bd$, d. h.:

Giebt man den Schenkeln eines ſtumpfen Winkels eine beliebige Länge und projicirt jeden Schenkel auf die Verlängerung des andern, ſo ſind die Rechtecke, welche aus je einem Schenkel und der Projection des andern gebildet werden, gleich groß.

Anm. Die drei verſchiedenen Gleichungen für das Quadrat einer Dreiecksſeite, die entweder einem rechten, oder ſpitzen, oder ſtumpfen Winkel gegenüberliegt, laſſen ſich durch eine gemeinſchaftliche Form ausdrücken, wenn man die Beſtimmung trifft, daß jede Projektion, die außerhalb des Dreiecks liegt, das negative Vorzeichen erhalten ſoll.

§. 117. Lehrſatz.

Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, ſo liegt a einem rechten Winkel gegenüber, wenn $a^2 = b^2 + c^2$, hingegen einem ſtumpfen Winkel, wenn $a^2 > b^2 + c^2$, und einem ſpitzen Winkel, wenn $a^2 < b^2 + c^2$ iſt. Daſſelbe gilt für die Seiten b und c.

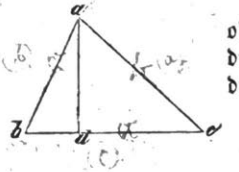
Der Beweis ergiebt ſich indirekt.

§. 118. Zuſatz.

Mit Hülfe des pythagoräiſchen Lehrſatzes läßt ſich die Höhe und der Inhalt eines Dreiecks aus den Maaßzahlen der drei Seiten berechnen.

Es iſt nämlich:

Fig. 61.



$$ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd,$$

oder, wenn die Maaßzahlen der verſchiedenen Linien durch einzelne Buchſtaben bezeichnet werden (ac durch a, ab durch b, bc durch c, bd durch p),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot p,$$

$$\text{daher } p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Nun iſt ad^2 oder $h^2 = b^2 - p^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2$

$$\text{oder } h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(2cb + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2cb - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2},$$

$$\text{oder } 4c^2h^2 = \left((b + c)^2 - a^2\right) \cdot \left(a^2 - (b - c)^2\right) =$$

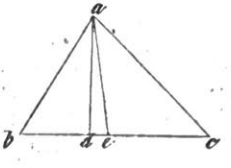
$$= (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Bezeichnet man dies Produkt durch SABC, ſo iſt $2c \cdot h = \sqrt{SABC}$, daher $\frac{c \cdot h}{2}$ (oder der Inhalt des $\triangle$ abc) $= \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$.

§. 119. Lehrſatz.

Halbirt man in einem Dreiecke eine Seite, ſo iſt die Summe der Quadrate der nicht halbirten Seiten gleich dem doppelten Quadrate der halbirenden Linie vermehrt um das halbe Quadrat der halbirten Linie.

Fig. 62.



Vor. be = ec.

Beh. $ab^2 + ac^2 = 2 \cdot ae^2 + \frac{1}{2} \cdot bc^2$.

Bew. Zieht man die Höhe ad, ſo iſt:

$$ab^2 = ae^2 + be^2 - 2 \cdot be \cdot de,$$

$$ac^2 = ae^2 + ec^2 + 2 \cdot ec \cdot de =$$

$$= ae^2 + be^2 + 2 \cdot be \cdot de.$$

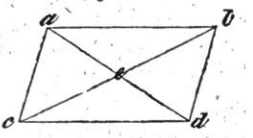
(weil be = ec),

daher $ab^2 + ac^2 = 2 \cdot ae^2 + 2 \cdot be^2 = 2 \cdot ae^2 + \frac{1}{2} \cdot bc^2$.

§. 120. Lehrſatz.

Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Parallelogramms iſt gleich der Summe der Quadrate über den zwei Diagonalen.

Fig. 63.



Bew. Es iſt $ab^2 + ac^2 = 2 . ae^2 + \frac{1}{2} . bc^2$,

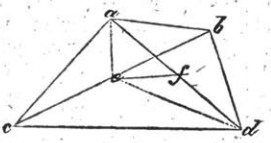
$db^2 + dc^2 = 2 . de^2 + \frac{1}{2} . bc^2$,

alſo $ab^2 + ac^2 + bd^2 + cd^2 = ad^2 + bc^2$.

§. 121. Lehrſatz.

Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Vierecks iſt gleich der Summe der Quadrate über den zwei Diagonalen vermehrt um das vierfache Quadrat über der Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

Fig. 64.



Vor. $ce = eb$,

$af = fd$.

Beh. $ab^2 + ac^2 + cd^2 + db^2 =$

$= ad^2 + bc^2 + 4 . ef^2$.

Bew. Es iſt nach §. 119:

$ac^2 + ab^2 = 2 . ae^2 + \frac{1}{2} . bc^2$,

$db^2 + dc^2 = 2 . de^2 + \frac{1}{2} . bc^2$,

alſo $ac^2 + ab^2 + db^2 + dc^2 = bc^2 + 2 (ae^2 + de^2)$.

Nun iſt $ae^2 + de^2 = 2 . ef^2 + \frac{1}{2} . ad^2$,

alſo $ac^2 + ab^2 + db^2 + dc^2 = bc^2 + ad^2 + 4 . ef^2$.

Der vorige Lehrſatz iſt ein ſpecieller Fall dieſes Satzes.

Dieſer letztere läßt ſich indeß noch allgemeiner ausdrücken.

Nennt man nämlich die zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten und ferner das Diagonalenpaar die drei Paare von Gegenſeiten, ſo iſt jedesmal die Summe der Quadrate über zwei Paaren von Gegenſeiten gleich der Summe der Quadrate über den zwei noch übrigen Gegenſeiten vermehrt um das vierfache Quadrat über der Linie, welche die Mittelpunkte dieſer zwei Gegenſeiten verbindet.

Der Beweis für den zweiten Fall wird ebenſo geführt, wie oben.

Uebungssätze.

1) Zieht man in einem Dreiecke eine Höhe, so ist das Rechteck, welches aus der Summe und aus der Differenz der Segmente der Grundlinie gebildet wird, eben so groß wie das Rechteck aus der Summe und der Differenz der beiden andern Seiten.

2) Errichtet man aus einem beliebigen Punkte einer Linie ab eine Senkrechte, so haben jedesmal die Quadrate über den zwei Linien, welche einen beliebigen Punkt dieser Senkrechten mit a und b verbinden, ein und denselben Unterschied.

3) Wenn in einem Vierecke eins von den drei Paaren der Gegenseiten sich (nöthigenfalls verlängert) unter einem rechten Winkel schneidet, so sind die Quadratsummen des zweiten und dritten Paares unter einander gleich.

4) Schneiden sich in einem Vierecke alle drei Paare der Gegenseiten unter rechten Winkeln, so sind die Quadratsummen derselben alle unter einander gleich.

5) Ist in einem Dreiecke einer der Winkel halb so groß als die Summe der beiden andern, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden andern Seiten kleiner, als die Summe der Quadrate dieser beiden andern Seiten.

6) Halbirt man in einem Rechtecke alle innern Winkel, so bilden die Halbirungslinien ein Quadrat, welches halb so groß ist, als das Quadrat über der Differenz der zwei verschiedenen Rechtecksseiten; halbirt man hingegen die äußern Winkel, so entsteht ein Quadrat, welches halb so groß ist, als das Quadrat über der Summe der zwei Rechtecksseiten.

7) Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Senkrechte auf die Seiten desselben, so ist die Summe der Quadrate von drei solchen Seitenstücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen.

8) Errichtet man in der Ecke eines Dreiecks Senkrechte auf den zwei sich hier schneidenden Seiten und giebt diesen Senkrechten die Länge der Seiten, auf welchen sie senkrecht stehen, und verbindet dann die Endpunkte derselben, so ist das Quadrat dieser Verbindenden und das Quadrat der dritten Dreiecksseite zusammen doppelt so groß als die Summe der Quadrate der beiden genannten Dreiecksseiten.

9) Schneidet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von ihren Endpunkten aus Stücke ab, welche gleich den Catheten sind, so ist das Quadrat der Linie, welche zwischen diesen beiden Durchschnittspunkten liegt, doppelt so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die beiden Catheten.

10) Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Winkel halbirenden Linien eine Senkrechte auf eine der Seiten, so ist das Quadrat derselben halb so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und die andere Cathete.

11) Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten eines Dreiecks mit den Gegenecken, so ist die vierfache Summe der Quadrate dieser Linien gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

12) Wenn man jede der Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigne Länge verlängert und jeden der Endpunkte mit der Gegenecke verbindet, so ist die Summe der Quadrate dieser vier Verbindenden siebenmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

13) Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigne Länge und verbindet diese beiden Endpunkte mit der Spitze des rechten Winkels, so ist die Summe der Quadrate der Verbindenden fünfmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

14) In jedem Trapeze ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der beiden nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten.

15) Nimmt man außerhalb eines gleichseitigen Dreiecks einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, die ihn mit den Ecken des Dreiecks verbinden, dreimal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Höhendurchschnitt des Dreiecks (d. h. den Punkt, in welchem sich die drei Höhen schneiden) mit einer seiner Ecken und mit eben jenem Punkte außerhalb verbinden.

16) Nimmt man in der Ebene eines Quadrates einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, welche ihn mit den Ecken der Figur verbinden, viermal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Durchschnittspunkt der Diagonalen mit einer der Ecken und mit eben jenem Punkte verbinden.

17) Verbindet man in einem Fünfecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten der nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten und dritten dieser Halbirenden um $^3/_4$ der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

18) Verbindet man in einem necke von ungerader Seitenzahl jede Ecke mit den Halbirungspunkten der nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten, dritten, fünften u. s. w. dieser Halbirenden um $^3/_4$ der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

19) Verbindet man in einem Vierecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten der beiden gegenüberliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten.

20) Verfährt man ebenso bei einem necke von gerader Seitenzahl, so ist die Summe der Quadrate aller ersten, dritten, fünften u. s. w. Halbirenden gleich der Quadratsumme der zweiten, vierten u. s. w.

21) Die Summe der Quadrate aller der Linien, welche man erhält, indem man jede Ecke eines Fünfecks mit den Halbirungspunkten aller gegenüberliegenden Seiten verbindet, ist $^3/_4$ mal so groß als die Quadratsumme aller Umfangsseiten.

22) Bei einem Sechsecke ist erstere Summe dreimal so groß als letztere.

23) Bei einem necke ist sie $\frac{(n-2).3}{4}$ mal so groß.

24) Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspunkte von je zwei Gegenseiten, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindenden viermal so klein als die Quadratsumme aller Seiten.

Elftes Capitel.

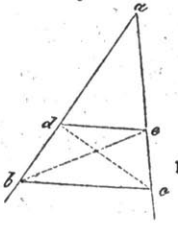
Von den proportionirten Linien und von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

A. Proportionirte Linien.

§. 122. Lehrſatz.

Zieht man durch die Schenkel eines Winkels zwei parallele Linien, ſo werden beide Schenkel nach demſelben Verhältniſſe getheilt*).

Fig. 65.



Vor. de ‖ bc.

Beh. ad : db = ae : ec.

Bew. Zieht man be und dc, ſo iſt
△ bde = △ cde (§. 82).
Ferner iſt △ ade : △ dbe = ad : db (§. 103),
und △ aed : △ ecd oder △ aed : △ dbe = ae : ec.
Hieraus folgt aber ad : db = ae : ec.

§. 123. Zuſatz.

Aus obiger Proportion laſſen ſich noch folgende Proportionen ableiten:

1) ad : ae = db : ec,
2) (ad + db) : db = (ae + ec) : ec oder ab : db = ac : ec,
3) ab : ad = ac : ae.

Es iſt alſo: ab : ac = ad : ae = db : ec, d. h.:

zwiſchen den ganzen Linien, zwiſchen den obern und zwiſchen den untern Abſchnitten beſteht daſſelbe Verhältniß.

Anm. Sind in einer der erwähnten Proportionen die Linien in Zahlen gegeben, hat man alſo z. B. die Zahlenproportion m : n = v : w, ſo iſt auch m . w = n . v. Es hat alſo das Rechteck aus zwei Linien, welche die äußern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden, denſelben Inhalt, wie das Rechteck aus den beiden andern Linien, welche die innern Glieder bilden.

*) Ueber Verhältniſſe der Linien vergleiche die §§. 90 u. f. w.

§. 124. Zuſatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt ſich ferner, daß die Schenkel eines Winkels durch beliebig viele Parallelen ebenfalls in proportionirte Abſchnitte getheilt werden. Sind die Abſchnitte der einen Linie einander gleich, ſo ſind es auch die Abſchnitte der andern; ſind zwei Abſchnitte des einen Schenkels incommenſurabel, ſo ſind es auch die gleichliegenden Abſchnitte des andern Schenkels.

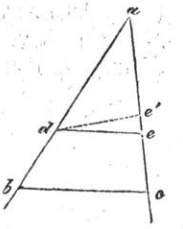
Anm. Mit Hülfe dieſes §. kann man ſehr leicht eine Linie nach vorgeſchriebenem Verhältniſſe theilen. Ferner beruht auf dieſem Satze die Eintheilung eines verjüngten Maaßſtabes.

§. 125. Lehrſatz.

Trägt man auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus proportionirte Stücke ab, ſo ſind die Verbindungslinien der Endpunkte dieſer proportionirten Stücke einander parallel.

Vor. ad : ab = ae : ac.

Fig. 66.



Beh. de || bc.

Bew. Zieht man von d aus die Linie de' parallel bc, ſo iſt:

ad : ab = ae' : ac. Nun iſt aber auch

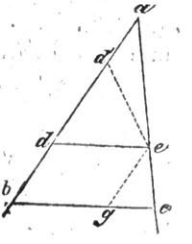
ad : ab = ae : ac,

folglich ae = ae', d. h. die Punkte e und e' fallen zuſammen und de iſt alſo parallel bc.

§. 126. Lehrſatz.

Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Linien durchſchnitten, ſo verhalten ſich die zwiſchen den Schenkeln liegenden Abſchnitte der Parallelen wie die von ihnen abgeſchnittenen Stücke.

Fig. 67.



Vor. de || bc.

Beh. de : bc = ae : ac = ad : ab.

Bew. Zieht man eg || ab, ſo iſt:

ae : ac = bg : bc, oder, da bg = de iſt,

ae : ac = de : bc,

oder de : bc = ae : ac = ad : ab.

§. 127. Zuſatz.

Schlägt man in Fig. 67 von e aus mit ed einen Bogen, ſo ſchneidet dieſer den Schenkel ab in noch einem Punkte d'. Es iſt alsdann ed = ed', folglich auch:

$$ae : ac = d'e : bc.$$

Da nun d'e nicht parallel bc iſt, ſo folgt, daß der Lehrſatz des vorigen §. ſich nicht umkehren läßt.

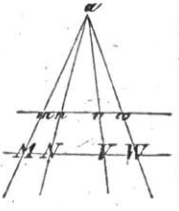
Hat man die Proportion ae : ac = d'e : bc, ſo iſt entweder d'e ∥ bc, oder ∠ ad'e + ∠ abc = 2R.

Es iſt alſo d'e ∥ bc, wenn ae : ac = d'e : bc und wenn ∠ ad'e + + ∠ abc $\gtrless$ 2R iſt. (Vergleiche §. 37.)

§. 128. Lehrſätze.

1) Zieht man von einem Punkte aus verſchiedene Linien (Strahlen) nach beliebigen Richtungen, ſo werden alle Parallelen, die man durch dieſe Linien hindurchzieht, nach demſelben Verhältniſſe getheilt.

Fig. 68.



Vor. mw ∥ MW.

Beh. mn : nv : vw = MN : NV : VW.

Bew. Es iſt am : aM = an : aN = av : aV = aw : aW.

Ferner mn : MN = am : aM,

nv : NV = an : aN,

vw : VW = av : aV,

folglich mn : MN = nv : NV = vw : VW oder

mn : nv : vw = MN : NV : VW.

Außerdem iſt auch am : aM = an : aN = av : aV = aw : aW = = mn : MN = nv : NV u. ſ. w.

2) Werden zwei oder mehrere Parallelen durch beliebige gerade Linien proportionirt getheilt, ſo ſchneiden ſich dieſe Linien in einem Punkte.

Der Beweis ergiebt ſich aus dem vorigen.

Anm. Der zu 1) gegebene Beweis ſtützt ſich bloß darauf, daß mn ∥ MN, nv ∥ NV, vw ∥ VW iſt, und bleibt ungeändert, wenn mnvw und MNVW nicht gerade, ſondern gebrochene Linien vorſtellen, deren einzelne Theile parallel ſind. Die Lehrſätze 1) und 2) laſſen ſich daher auch auf gebrochene Linien ausdehnen.

§. 129. Lehrſätze.

1) Halbirt man einen innern Winkel eines Dreiecks und verlängert die Halbirungslinien bis zur gegenüberliegenden Seite, ſo haben die einſchließenden Seiten daſſelbe Verhältniß, wie die Abſchnitte der dritten Seite.

Vor. v = w.

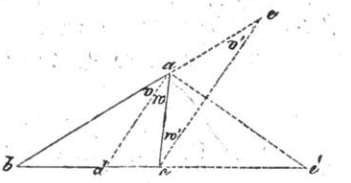
Beh. ab : ac = bd : dc.

Bew. Zieht man ce || ad, ſo iſt v = v', w = w', alſo v' = w', daher ac = ae.

Nun iſt ba : ae = bd : dc,

daher auch ba : ac = bd : dc.

Fig. 69.



2) Halbirt man den äußern Winkel eines Dreiecks, ſo verhalten ſich die Seiten, welche den Nebenwinkel einſchließen, wie die Abſchnitte der dritten Seite.

Es iſt alſo ab : ac = be' : ce'.

Der Beweis iſt leicht zu führen, wenn man von e' aus eine Parallele zu ac zieht.

3) Iſt (in Fig. 69) ab : ac = bd : dc, oder ab : ac = = be' : ce', ſo iſt < bac, oder im andern Falle < cae halbirt.

Der Beweis wird in ähnlicher Art geführt, wie der Beweis zu 1.

§. 130. Zuſatz.

Aus dem Bisherigen ergeben ſich ſehr leicht die Beweiſe folgender Sätze:

1) Haben zwei Dreiecke einen gleichen Winkel und iſt das Produkt der den Winkel einſchließenden Seiten in beiden Dreiecken daſſelbe, ſo haben die beiden Dreiecke denſelben Inhalt.

2) Halbirt man alle Seiten eines beliebigen Vierecks und verbindet die aufeinanderfolgenden Halbirungspunkte derſelben, ſo entſteht ein Parallelogramm, welches halb ſo groß als das Viereck iſt.

3) Werden die parallelen Seiten eines Trapezes proportionirt getheilt, ſo daß ſich je zwei proportionirte Stücke gegenüberliegen, ſo geht die Verbindungslinie je zweier gleichliegenden Theilpunkte durch den Durchſchnittspunkt der nicht parallelen Seiten.

§. 131. Aufgaben.

1) Zu drei gegebenen Linien soll die vierte Proportionale gefunden, oder zu einem Rechtecke von gegebenem Inhalte und gegebener Grundlinie soll die Höhe gefunden werden.

Die Auflösung ergiebt sich aus §. 122.

2) Zu zwei gegebenen Linien soll die mittlere Proportionale gefunden, oder ein Rechteck soll in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandelt werden.

Die Auflösung ergiebt sich aus §. 111.

B. Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

§. 132. Erklärung.

Zwei geradlinige Figuren heißen ähnlich (A $\sim$ B), wenn sie dieselbe Form oder Gestalt haben, wenn also alle Winkel der einen in Größe und Reihenfolge mit den Winkeln der andern übereinstimmen und wenn ferner die Seiten der einen den gleichliegenden Seiten der andern proportionirt sind. Gleichliegende Seiten sind aber solche Seiten, welche denselben Winkeln gegenüberliegen, oder welchen gleiche Winkelpaare anliegen.

Anm. Die Möglichkeit, daß zwei Dreiecke oder Vielecke ähnlich sein können, ergiebt sich aus den §§. 122, 125 und 128; sind nämlich in Fig. 128 die Linien mnvw und MNVW gebrochen, so ist amnvw $\sim$ aMNVW, da die Winkel in Größe und Lage übereinstimmen, und da am : aM = = mn : MN = nv : NV = vw: VW = aw : aW ist.

§. 133. Zusatz..

Aus der obigen Erklärung ergeben sich folgende Sätze:

1) Zwei congruente Figuren sind auch ähnlich.

2) Zwei Figuren, die einer dritten congruent oder ähnlich sind, sind auch einander ähnlich.

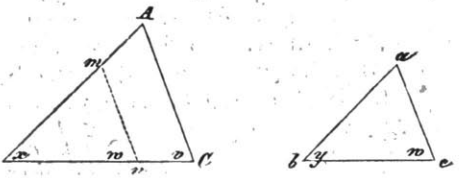
3) Zieht man durch die Schenkel eines Dreiecks eine Linie parallel mit der dritten Seite, so schneidet diese Linie ein Dreieck ab, welches ersterem ähnlich ist.

§. 134. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen einzeln gleich zwei Winkeln des andern sind.

Vor. $x = y$, $v = w$.

Fig. 70.



Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Bew. Denkt man ſich $\triangle abc$ ſo auf $\triangle ABC$ gelegt, daß y auf x, bc der Richtung nach auf BC, ba der Richtung nach auf BA fällt, ſo bekommt $\triangle abc$ die Lage von $\triangle mBn$. Aus $w = v$ folgt alsdann $mn \parallel AC$ und hieraus:

$$\triangle ABC \sim \triangle mBn \sim \triangle abc.$$

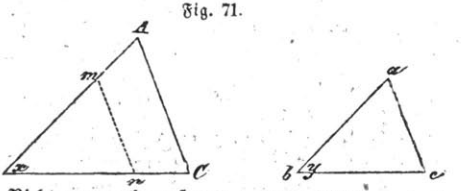
§. 135. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern iſt und wenn ferner die dieſen Winkel einſchließenden Seiten in beiden Dreiecken proportionirt ſind.

Vor. $x = y$;

$AB : ab = BC : bc$.

Fig. 71.



Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Bew. Denkt man ſich $\triangle abc$ ſo auf $\triangle ABC$ gelegt, daß y auf x, bc der Richtung nach auf BC, ba der Richtung nach auf BA fällt, ſo bekommt $\triangle abc$ die Lage von $\triangle mBn$.

Es iſt alsdann nach der Vorausſetzung:

$$AB : mB = CB : nB, \text{ daher } mn \parallel AC.$$

Hieraus folgt aber $\triangle ABC \sim \triangle mBn \sim \triangle abc$.

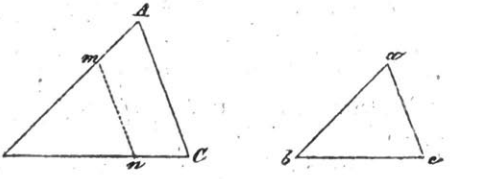
§. 136. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind ähnlich, wenn die Seiten des einen den Seiten des andern proportionirt ſind.

Vor. $AB : ab = AC : ac = BC : bc$.

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Fig. 72.



Beweis. Schneidet man auf BC das Stück $Bn = bc$ ab, und zieht $mn \parallel AC$, ſo iſt

$\triangle ABC \sim \triangle mBn$.

Es iſt alsdann AB : mB = CB : nB. Es iſt aber auch

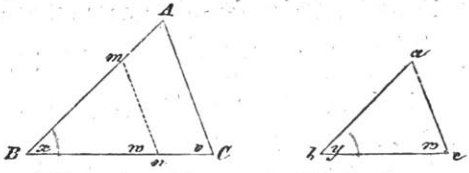
AB : ab = CB : bc.

Da ferner nB = bc iſt, ſo folgt aus dieſen beiden Proportionen, daß mB = ab iſt. Ebenſo erhält man mn = ac. Es iſt alsdann △ mBn ≅ △ abc und hieraus ergiebt ſich, daß auch △ abc ähnlich △ ABC iſt.

§. 137. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke ſind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern iſt, wenn ferner zwei Seiten des einen, welche dieſen Winkel nicht einſchließen, den zwei gleichliegenden Seiten des andern proportionirt ſind, und wenn ferner die andern nicht von dieſen Seiten eingeſchloſſenen Winkel gleichartig ſind.

Fig. 73.



Vor. x = y;

$v + w \gtrless 2R.$

AB : ab = AC : ac.

Beh. △ABC ∾ △abc.

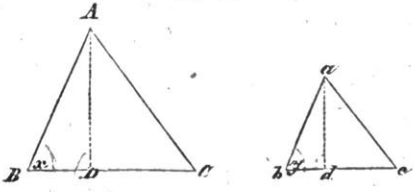
Beweis. Da y = x iſt, ſo kann man △ abc ſo auf △ ABC gelegt denken, daß es die Lage von △ mBn erhält.

Es iſt alsdann AB : mB = AC : mn und ferner ſind v und w gleichartig; hieraus folgt (nach §. 127) mn ∥ AC und hieraus △ ABC ∾ △ mBn ∾ △ abc.*)

§. 138. Lehrſatz.

In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten ſich die Höhen, die auf zwei gleichliegenden Grundlinien ſtehen, wie zwei gleichliegende Seiten.

Fig. 74.



Vor. △ ABC ∾ △ abc;

< ADB = < adb = R.

Beh. AD : ad = AB : ab.

Beweis. Es iſt x = y (nach der Vorausſetzung) und < ADB = < adb, daher △ ABD ∾ △ abd.

Hieraus folgt aber AD : ad = AB : ab = BC : bc = AC : ac.

*) Vergleiche die vier Congruenzſätze.

§. 139. Zuſatz.

Auf ähnliche Art läßt ſich nachweiſen, daß alle Linien, die in zwei ähnlichen Dreiecken eine gleiche Lage haben, (Halbirungslinien der Winkel, der Seiten u. ſ. w.) ſich ebenſo verhalten, wie zwei gleichliegende Seiten, und daß alſo für alle gleichliegenden Linien ein und daſſelbe Verhältniß beſteht.

§. 140. Lehrſätze.

1) Errichtet man auf jeder Seite eines Dreiecks oder auf den Verlängerungen der Seiten je eine Senkrechte, ſo ſchneiden ſich entweder dieſe drei Senkrechten in einem Punkte, oder ſie ſchließen ein dem erſteren ähnliches Dreieck ein.

2) Zieht man von zwei Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien, ſo theilt jede dieſer Linien die andere in zwei Theile, die ſich wie 1 : 2 verhalten.

Die Beweiſe ſind mit Hülfe der vorhergehenden Sätze leicht zu führen.

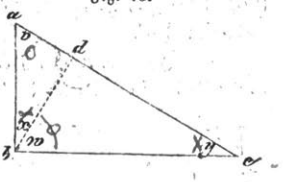
§. 141. Lehrſatz.

Zieht man von dem Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks eine Senkrechte nach der Hypotenuſe, ſo theilt dieſe Senkrechte das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke, welche ſowohl untereinander, wie auch dem urſprünglichen Dreiecke ähnlich ſind.

Vor. $\sphericalangle abc = R$; $\sphericalangle adb = R$.

Beh. $\triangle abc \sim \triangle adb \sim \triangle bdc$.

Fig. 75.



Beweis. Es iſt $x + w = x + v$, daher $w = v$; ferner $x + w = y + w$, daher $x = y$. Aus $x = y$, $v = w$ folgt $\triangle bad \sim \triangle cbd$ und aus $v = v$, $x = y$ folgt $\triangle bad \sim \triangle cab$.

§. 142. Zuſatz.

Aus $\triangle abc \sim \triangle adb$ folgt $ab : ac = ad : ab$ oder
$ab^2 = ac \cdot ad$ (1).

Aus $\triangle abc \sim \triangle bdc$ folgt $ac : bc = bc : dc$ oder
$bc^2 = ac \cdot dc$ (2).

Aus $\triangle adb \sim \triangle bdc$ folgt $ad : db = bd : dc$ oder
$bd^2 = ad \cdot dc$ (3).

Jede Cathete ist also die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der Hypotenuse selbst.

Ferner ist die vom Scheitel aus nach der Hypotenuse gezogene Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Durch Addition von 1) und 2) erhält man schließlich den pythagoräischen Lehrsatz.

§. 143. Lehrsätze.

Für ähnliche Vielecke ergeben sich aus der Erklärung der Aehnlichkeit und aus den vorigen §§. unmittelbar folgende Lehrsätze.

1) Die gleichliegenden Diagonalen verhalten sich, wie zwei gleichliegende Seiten.

2) Gleichliegende Diagonalen schließen gleiche Winkel ein.

3) Gleichliegende Diagonalen schneiden ähnliche Figuren ab.

4) Zieht man von zwei gleichliegenden Ecken aus Diagonalen nach den übrigen Ecken, so wird jedes Vieleck in Dreiecke zerlegt, welche den gleichliegenden Dreiecken des andern ähnlich sind.

5) Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn alle gleichliegenden Seiten und die von zwei gleichliegenden Ecken aus gezogenen Diagonalen proportionirt sind.

6) Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in beiden die Umfangswinkel, und die von den Diagonalen an zwei gleichliegenden Ecken gebildeten Winkel in Lage und Größe übereinstimmen.

7) Zwei ähnliche Vielecke lassen sich so aufeinanderlegen, daß alle gleichliegenden Linien entweder aufeinander fallen, oder parallel sind.

8) In zwei ähnlichen Vielecken besteht zwischen je zwei gleichliegenden Linien ein und dasselbe Verhältniß.

§. 144. Lehrsätze.

1) Alle regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

2) Die Seiten zweier regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der eingeschriebenen und wie die Radien der umschriebenen Kreise.

Beweis zu 2) Zieht man vom Mittelpunkte eines jeden der beiden Vielecke Linien (Radien) nach allen Ecken, so entstehen in beiden Figuren gleichschenklige Dreiecke von gleichem Mittelpunktswinkel. Dieselben sind also ähnlich und es verhalten sich daher die Radien der umschriebenen Kreise wie die Seiten, und umgekehrt. Ferner verhalten sich auch

die Seiten, wie die zugehörigen Höhen, d. h. wie die Radien der eingeschriebenen Kreise.

Anm. Der Lehrsatz 2) ist nur ein specieller Fall des Lehrsatzes 8) in §. 143.

C. Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren.

§. 145. Lehrsätze.

1) Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei gleichliegende Seiten.

Beweis. Sind die Seiten beider Vielecke ausgedrückt durch A, B, C, D ... und a, b, c, d..., so ist $A:a=B:b=C:c=D:d=\ldots$ und daher $(A+B+C+D+\ldots):(a+b+c+d\ldots)=A:a=B:b$ u. s. w.*)

2) Die Umfänge regulärer Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der eingeschriebenen und wie die Radien der umschriebenen Kreise.

Der Beweis ergiebt sich aus 1) und aus §. 144.

§. 146. Lehrsätze.

1) Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Linien.

Beweis. Sind A und a zwei gleichliegende Seiten, H und h die zugehörigen Höhen, so ist $A : a = H : h$, daher $h = \frac{a \cdot H}{A}$.

Die Inhalte beider Dreiecke verhalten sich nun wie

$$A \cdot H : a \cdot h \text{ oder wie } A \cdot H : a \cdot \frac{a \cdot H}{A} \text{ oder wie } A^2 : a^2.$$

Die Inhalte verhalten sich also wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder nach §. 139 wie die Quadrate zweier beliebigen gleichliegenden Linien.

2) Die Inhalte zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Beweis. Zieht man in beiden Vielecken von zwei gleichliegenden Ecken aus Diagonalen nach den übrigen Ecken, so sind je zwei gleichliegende Dreiecke ähnlich und verhalten sich nach 1) wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Für je zwei gleichliegende Dreiecke besteht also dasselbe Verhältniß und dieses gilt daher auch für die Summe dieser Dreiecke oder für die erwähnten Vielecke.

*) Arithmetik §. 123.

3) Die Inhalte zweier regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten ſich wie die Quadrate der Radien der eingeſchriebenen, oder der umſchriebenen Kreiſe.

Der Beweis ergiebt ſich aus 2) und aus §. 144.

§. 147. Lehrſatz.

Wenn je drei gleichliegende Seiten dreier ähnlichen Vielecke ſich zu einem rechtwinkligen Dreiecke zuſammenſetzen laſſen, ſo iſt das eine Vieleck ſo groß, als die beiden andern zuſammengenommen.

Beweis. Sind a, b, c drei gleichliegende Seiten der erwähnten drei Vielecke und iſt a die Hypotenuſe des rechtwinkligen aus dieſen drei Seiten gebildeten Dreieckes, ſo iſt $a^2 = b^2 + c^2$.

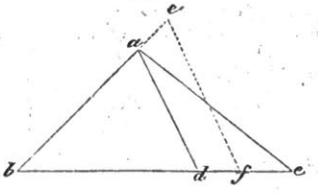
Bezeichnet man ferner die Inhalte jener Vielecke durch A, B, C, ſo iſt: $B : C = b^2 : c^2$ oder $(B + C) : C = (b^2 + c^2) : c^2$ oder $(B + C) : C = a^2 : c^2$. Ferner iſt: $A : C = a^2 : c^2$, daher $A = B + C$.

Anm. Aus dieſem Satze, der eine Erweiterung des pythagoräiſchen Lehrſatzes iſt, ergiebt ſich leicht eine Conſtruction zur Beſtimmung eines Vielecks, welches ſo groß wie zwei einander ähnliche Vielecke, und ferner dieſen ähnlich iſt.

§. 148. Aufgabe.

Es ſoll ein Dreieck ſo verwandelt werden, daß es einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird.

Fig. 76.



Auflöſung. Man verwandle zunächſt erſteres Dreieck in ein anderes, welches mit dem gegebenen Dreiecke einen Winkel gemeinſchaftlich hat. Iſt nun abc das ſo erhaltene Dreieck, abd das Dreieck, dem es ähnlich werden ſoll, ſo ſuche man zu bd und bc die mittlere geometriſche Proportionale bf und ziehe fe || ad. Es iſt alsdann ebf das geſuchte Dreieck.

Beweis. Es iſt $\triangle abd : \triangle ebf = bd^2 : bf^2$, ferner

$\triangle abd : \triangle abc = bd : bc$, daher

$\triangle abc : \triangle ebf = bd \cdot bc : bf^2$.

Da nun $bf^2 = bd \cdot bc$ iſt,*) ſo folgt $\triangle abc = \triangle ebf$.

*) Als mittlere Proportionale.

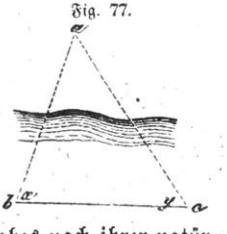
§. 149. Anhang.

Die Lehrſätze über Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke finden ihre Anwendung unter Anderem in der Feldmeßkunſt. Die Aufgabe derſelben iſt, von einzelnen Theilen der Erdoberfläche ein nach einem beſtimmten Verhältniſſe verkleinertes, ähnliches Bild zu geben. Zur Entwerfung eines ſolchen Bildes zerlegt man ſich die aufzunehmende Ebene in Dreiecke, indem man geeignete hervorragende Punkte (Thurmſpitzen, Stangen u. ſ. w.) durch Linien verbunden denkt, und entwirft von jedem Dreiecke ein ähnliches Bild, indem man theils die Winkel mißt, theils die Linien nach einem beſtimmten Verhältniſſe verkleinert. Die Winkel beſtimmt man mit Hülfe des Meßtiſches, oder der Bouſſole, oder des Theodoliten, Sextanten u. a. Inſtrumente, die Linien mit der Meßkette. Man verkleinert die gemeſſenen Linien proportional mit Hülfe des verjüngten Maaßſtabes. Iſt auf demſelben die Länge einer Ruthe z. B. 25000 mal kleiner als in der Wirklichkeit, ſo iſt folglich jede Linie der Zeichnung 25000 mal kleiner als die entſprechende Linie auf der Erdoberfläche.

Aufgabe. Es ſoll die Entfernung zweier Punkte beſtimmt werden, wenn bloß einer derſelben zugänglich iſt.

Auflöſung. Sind a und b die beiden Punkte und iſt b zugänglich, ſo wählt man einen dritten Punkte, von dem aus b und a geſehen werden können und von dem man nach b hin meſſen kann.

Fig. 77.

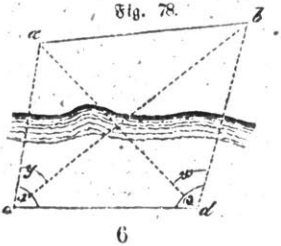


Mißt man nun die Linie bc, ferner die Winkel x und y, ſo hat man die zur Conſtruction nöthigen Stücke. Hat man bc mit Hülfe des verjüngten Maaßſtabes aufgetragen, ſo iſt die Linie ab in der Zeichnung mit Hülfe dieſes Maaßſtabes nach ihrer natürlichen Größe leicht zu beſtimmen.

Aufgabe. Es ſoll die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte beſtimmt werden, wenn beide von zwei zugänglichen Punkten aus geſehen werden können.

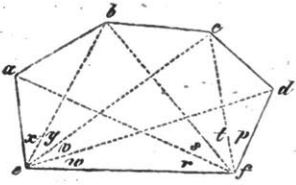
Auflöſung. Sind c und d die zugänglichen Punkte, ſo mißt man die Linie cd, ferner die Winkel x, y, v, w. Trägt man dieſe Winkel, ferner die Linie cd (nach dem verjüngten Maaßſtabe) in der Zeichnung ein, ſo iſt dadurch ab beſtimmt.

Fig. 78.



Aufgabe. Es ſoll ein Syſtem von Punkten (a, b, c, d) nach Lage und Entfernung beſtimmt werden.

Fig. 79.



Auflöſung. Sind die zu beſtimmenden Punkte von einem Punkte e aus ſichtbar und zugänglich, ſo mißt man die Winkel x, y, v und die Linien ea, eb, ec und ed, wodurch alſo die gebrochene Linie abcd beſtimmt iſt. Statt ea, eb, ec und ed zu meſſen, kann man auch ea, ab, bc, cd meſſen, muß aber alsdann auf die Natur der Winkel abe, bce, cde Rückſicht nehmen (vergleiche §. 137). Hat man aber noch einen zweiten Punkt f, von dem aus man a, b, c, d ſehen, und von dem man nach e gelangen kann, ſo mißt man x, y, v, w, ferner ef und r, s, t, p. Hierdurch ſind die Punkte a, b, c, d ebenfalls vollſtändig beſtimmt.

Anm. Neben den angeführten Löſungen laſſen ſich noch viele andere auffinden, da die Stücke, von welchen die Aehnlichkeit abhängt, ſich in mannigfacher Verbindung auswählen laſſen. Eine ausführlichere Behandlung obigen Stoffes erlaubt jedoch der Plan dieſes Lehrbuches nicht.

Uebungsſätze.

1) Zieht man aus der Ecke eines Dreiecks zwei gleich große Linien nach der Gegenſeite, und bilden dieſelben mit der Gegenſeite Winkel, welche gleich dem Winkel ſind, von deſſen Scheitel obige Linien ausgehen, ſo ſind die beiden auf dieſe Art abgeſchnittenen Dreiecke ſich ſelbſt und dem Urdreiecke ähnlich.

2) Das Rechteck aus einer jener Linien und der Seite, nach welcher dieſelbe gezogen iſt, iſt gleich dem Rechtecke aus den beiden andern Seiten des Dreiecks.

3) Das Quadrat einer jeden der erwähnten Linien iſt gleich dem Rechtecke aus den Stücken der Gegenſeite, welche von dieſen Linien abgeſchnitten werden.

4) Wenn zwei ähnliche Dreiecke von verſchiedener Größe eine ſolche Lage haben, daß je zwei gleichliegende Seiten auch parallel ſind, ſo ſchneiden ſich die Verbindungslinien je zweier gleichliegenden Ecken in einem Punkte.

5) Wenn man in einem Dreiecke Linien von den Winkelſpitzen nach den Mitten der Gegenſeiten zieht und jede über die Seite hinaus um den dritten Theil ihrer eigenen Größe verlängert, dann die drei Endpunkte verbindet, ſo entſteht ein Dreieck, welches dem gegebenen congruent iſt, und deſſen Seiten durch obige Linien halbirt werden.

6) Verbindet man die Spitzen zweier Dreiecke, welche eine gemeinſchaftliche Grundlinie haben, durch eine gerade Linie, und verlängert dieſelbe, wenn es nöthig iſt, bis ſie die Grundlinie oder die Verlängerung derſelben ſchneidet, ſo verhalten ſich die Stücke dieſer Linien, zwiſchen den Spitzen der Dreiecke und der Grundlinie, wie die Flächenräume der Dreiecke.

7) Wenn zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen, und man zieht durch dieselben eine Linie parallel mit der Grundlinie, so sind von dieser Parallelen die zwei Stücke, welche innerhalb der beiden Dreiecke liegen, gleich groß.

8) Zieht man durch den Halbirungspunkt der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks eine Linie bis zum Durchschnitte mit dem einen Schenkel und der Verlängerung des andern, so ist dieselbe stets größer als die dritte Seite.

9) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse mit der auf sie vom Scheitel des rechten Winkels aus gefällten Senkrechten größer, als die Cathetensumme.

10) Ist in einem gleichschenkligen Dreiecke die Grundlinie größer als jeder Schenkel, und schneidet man auf erstere von ihren beiden Endpunkten aus Stücke ab, welche gleich der Schenkellänge sind, und verbindet diese Punkte mit der Gegenecke, so ist in dem so entstandenen gleichschenkligen Dreiecke jeder Schenkel die mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie dieses zweiten und dem Schenkel des ersten Dreiecks.*)

11) Wenn man in einem Vierecke alle Seiten halbirt und die Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten durch gerade Linien verbindet, so halbiren sich diese Verbindungslinien.

12) Wenn man in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und auch die beiden Diagonalen halbirt und die Halbirungspunkte durch gerade Linien verbindet, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Umfang so groß, wie die Summe der beiden nicht halbirten Linien ist.

13) Wenn man in einem Trapeze die beiden parallelen Seiten halbirt und die Halbirungspunkte verbindet, so geht diese Verbindungslinie durch den Schneidungspunkt der Diagonalen.

14) Verbindet man in einem Trapeze den Schneidungspunkt der nicht parallelen Seiten mit dem Schneidungspunkte der Diagonalen, so werden durch diese Linien die beiden parallelen Seiten halbirt.

15) Halbirt man in einem Trapeze eine der beiden Diagonalen und zieht durch den Halbirungspunkt eine Parallele zu den parallelen Seiten, so halbirt diese auch die andere Diagonale.

16) Die geometrische mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen ungleichen Linien ist immer kleiner als die halbe Summe dieser Linien.

17) Durch einen außerhalb zweier convergirenden Linien gegebenen Punkt eine Linie so zu legen, daß sich diese drei Linien bei gehöriger Verlängerung in einem Punkte schneiden.

18) Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

19) Ein Dreieck durch eine Gerade zu halbiren, welche parallel mit einer der Dreiecksseiten geht.

20) Ein Dreieck durch Linien, welche parallel der Grundlinie gehen, in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

21) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie und die von den Ecken derselben nach den Mitten der zwei andern Seiten gezogenen Linien gegeben sind.

22) Ein Dreieck zu construiren, wenn die von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Linien gegeben sind.

---

*) Dieser Satz liefert eine bequeme Construction zur Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

23) Ein Dreieck aus den drei Höhen zu construiren.*)

24) Ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, zu dem die Winkel gegeben sind.

25) Zwei gerade Linien sind der Lage nach gegeben. Es soll der geometrische Ort der Punkte gefunden werden, deren senkrechte Abstände von beiden Linien ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

26) Man soll in der Grundlinie eines Dreiecks einen Punkt bestimmen der Art, daß die Linien, die man von demselben nach den beiden Seiten unter gleichen Winkeln zieht, ein gegebenes Verhältniß haben.

27) Zwei gerade Linien ab und ac sind der Größe und Lage nach gegeben. Es soll der geometrische Ort für die Punkte gefunden werden, deren Verbindungslinien mit a, b und c jedesmal zwei Dreiecke von bestimmtem Inhaltsverhältnisse bilden.

28) Es ist ein Dreieck gegeben. Man soll einen Punkt finden der Art, daß die von demselben nach den drei Seiten gezogenen Senkrechten ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

29) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

30) Ein Dreieck ist gegeben und eine gerade Linie ab der Lage nach. Durch eine mit ab parallele Linie soll das Dreieck in zwei Theile getheilt werden, die sich wie zwei gegebene Linien m und n verhalten.

31) Es ist ein neck gegeben. Es soll ein demselben ähnliches gezeichnet werden, so daß die Umfänge beider sich verhalten, wie zwei gegebene Linien p und q.

32) Zu einem neck ein ähnliches von gegebenem Inhalte zeichnen.

33) Ein Dreieck soll gezeichnet werden, wenn man die Grundlinie, das Verhältniß der beiden andern Seiten, und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel kennt.

34) Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist gegeben das Verhältniß der Summe beider Catheten zur Hypotenuse. Es soll dasselbe so beschrieben werden, daß es einen gegebenen Inhalt faßt.

35) Man soll in einem Dreiecke abc eine zur Grundlinie bc parallele Linie so ziehen, daß das von ab unten abgeschnittene Stück gleich dem von ac oben abgeschnittenen Stücke wird.

36) Zu einem Viereck sind gegeben eine Seite und die beiden derselben anliegenden Winkel; es soll dasselbe so beschrieben werden, daß die drei übrigen Seiten desselben gleich groß werden.**)

37) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Summe der ersten und dritten Seite, die Summe der zweiten und dritten Seite, und der von der ersten und zweiten Seite eingeschlossene Winkel gegeben sind.***)

38) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Differenz der ersten und dritten, die Differenz der zweiten und dritten Seite, und der der kleinsten Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

39) Ein Viereck zu construiren aus einer Diagonale und den vier Winkeln, welche an der andern liegen.

---

*) Auflösung. Man construire ein Dreieck aus den drei Höhen als Seiten, und darauf ein zweites aus den Höhen des ersteren. Dieses zweite Dreieck ist dem gesuchten ähnlich.

**) Auflösung. Man zeichnet zuerst aus den drei gleichen Seiten, deren Größe man beliebig annimmt, und aus den zwei Winkeln ein Viereck. Dieses ist dem gesuchten ähnlich.

***) 37) und 38) werden mit Hülfe von 36) gelöst.

Zwölftes Capitel.

Von den Proportionen beim Kreiſe.

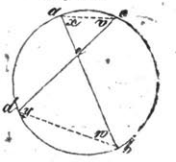
§. 150. Lehrſatz.

Schneiden ſich zwei demſelben Kreiſe angehörende gerade Linien innerhalb oder außerhalb deſſelben, ſo bilden die Abſchnitte der einen die Proportionalen zwiſchen den Abſchnitten der andern, oder das Rechteck aus den Abſchnitten der einen iſt gleich dem Rechtecke aus den Abſchnitten der andern.

Es ſind verſchiedene Fälle möglich:

a) Zwei Sehnen ſchneiden ſich innerhalb des Kreiſes.

Fig. 80.

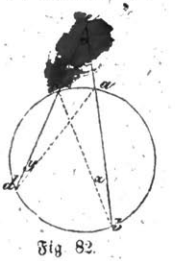


Beh. ae : ce = de : be.

Beweis. Aus x = y und v = w folgt △ aec ∼ △ deb, daher ae : ce = de : be, oder ae . be = ce . de.

b) Zwei verlängerte Sehnen (Secanten) ſchneiden ſich außerhalb des Kreiſes.

Fig. 81.



Beh. ae : ce = de : be.

Beweis. Aus x = y, v = v folgt

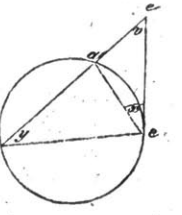
△ bec ∼ △ dea, daher

be : de = ce : ae, oder

ae . be = ce . de.

c) Eine Secante und eine Tangente ſchneiden ſich.

Fig 82.



Beh. ae : ce = ce : be.

Beweis. Aus x = y, v = v folgt △ aec ∼ △ ceb, daher ae : ce = ce : be, oder ae . be = ce².

Die Tangente iſt alſo das geometriſche Mittel zwiſchen der Secante und dem außerhalb des Kreiſes liegenden Stücke derſelben.

Anm. Schneiden ſich zwei Tangenten, ſo ſind dieſelben gleich groß, alſo obige Proportion noch richtig.

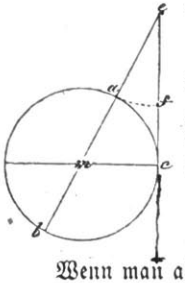
§. 151. Zuſatz.

Die Sätze des vorigen §. laſſen ſich umkehren. Findet bei zwei ſich ſchneidenden Linien eine jener Proportionen Statt, ſo liegen die beziehlichen Theilpunkte in einer Kreislinie.

§. 152. Erklärung.

Iſt in c) des §. 150 die Tangente gleich dem Durchmeſſer, ferner die Secante ein verlängerter Durchmeſſer, ſo iſt alſo:

Fig. 83.



ea : ec = ec : eb, oder, wenn man ec = ab durch d, ea durch v bezeichnet, v : d = d : (v + d).

Die Linie eb = v + d iſt alsdann in zwei Abſchnitte der Art getheilt, daß der kleinere ſich zum größeren wie der größere zur ganzen Linie verhält, und heißt nach ſtetiger Proportion geſchnitten.

Aus v : d = d : (v + d) folgt ferner

(d — v) : v = v : d.

Wenn man alſo das Stück v auf dem Stücke d (alſo auf ab oder auf ec) abträgt, ſo wird dadurch d ebenfalls nach ſtetiger Proportion geſchnitten. Es iſt alſo, wenn ef = ea iſt, cf : fe = fe : ce.

Wenn man umgekehrt die nach ſtetiger Proportion geſchnittene Linie cf über e hinaus um den größeren Abſchnitt fe verlängert, ſo iſt die ſo entſtehende Linie im Punkte e ebenfalls nach ſtetiger Proportion geſchnitten.

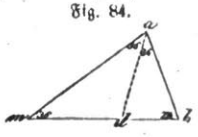
Anm. 1. Es iſt leicht nachzuweiſen, daß bei einer nach ſtetiger Proportion geſchnittenen Linie die Linie ſelbſt und ihre Theile incommenſurabel ſind; ſind aber zwei nach ſtetiger Proportion geſchnittenen Linien zu einander commenſurabel, ſo ſind es auch die ſich entſprechenden Abſchnitte.

Anm. 2. Die Löſung der Aufgabe, eine Linie nach ſtetiger Proportion zu theilen, ergiebt ſich aus obiger Figur ſehr leicht.

§. 153. Lehrſatz.

Trägt man die Seite des regulären Zehnecks im Kreiſe auf dem Radius ab, ſo wird dieſer dadurch nach ſtetiger Proportion geſchnitten.

Fig. 84.



Beweis. Es ſei ab = v die Zehnecksſeite, ma = mb = r zwei Radien, ſo iſt ∠ bma = 36°, ∠ mab = ∠ mba = 72°.

Halbirt man nun ∠ mab, ſo entſtehen zwei

gleichſchenklige Dreiecke dma und adb. Es iſt alsdann md = ad = = ab = v, db = r — v.

Da nun < mab halbirt iſt, ſo folgt (nach §. 129)

$$am : ab = md : db \text{ oder}$$

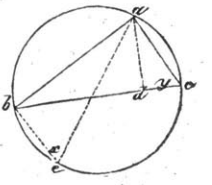
$$r : v = v : (r - v).$$

Der Radius iſt alſo durch Abtragen der Zehnecksſeite nach ſtetiger Proportion geſchnitten. Mit Hülfe des vorhergehenden §. läßt ſich alſo aus dem Radius die Zehnecksſeite und aus der Zehnecksſeite der Radius finden.

§. 154. Lehrſatz.

Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks iſt gleich dem Rechtecke aus der zur dritten Seite gehörigen Höhe und dem Durchmeſſer des umſchriebenen Kreiſes.

Fig. 85.



Beweis. Es ſei ad eine Höhe, ae der Durchmeſſer des umſchriebenen Kreiſes, ſo folgt aus x = y und aus < abe = < cda (= R) : △ abe ∾ △ adc und hieraus:

$$ab : ad = ae : ac \text{ oder}$$

$$ab \cdot ac = ad \cdot ae.$$

Sind die Linien in Zahlen gegeben, ſo iſt ferner:

$$ad = \frac{ab \cdot ac}{ae} \text{ und}$$

$$\frac{ad \cdot bc}{2} = \frac{ab \cdot ac \cdot bc}{2 \cdot ae}$$

Der Inhalt des Dreiecks iſt alſo gleich dem Produkte aus den drei Seiten dividirt durch den doppelten Durchmeſſer des umſchriebenen Kreiſes.

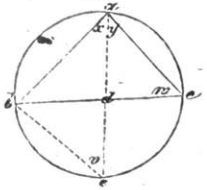
Sind ferner a, b, c die in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks, *I* der Inhalt deſſelben, r der Radius des umſchriebenen Kreiſes, ſo iſt

$$r = \frac{abc}{4I} = \frac{abc}{\sqrt{SABC}} \text{ (vergleiche §. 118).}$$

§. 155. Lehrſatz.

Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks iſt gleich dem Quadrate über der Linie, welche den von dieſen Seiten eingeſchloſſenen Winkel halbirt, vermehrt um das Rechteck aus den Abſchnitten der dritten Seite.

Fig. 86.



Vor. $x = y$.

Beh. $ab \cdot ac = ad^2 + bd \cdot dc$.

Beweis. Schlägt man um abc einen Kreis, und verlängert ad bis e, ſo folgt aus $x = y$ und $v = w$:

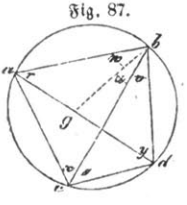
$$\triangle abe \sim \triangle adc.$$

Es iſt deßhalb $ab : ae = ad : ac$ oder $ab \cdot ac = ae \cdot ad = ad^2 + ad \cdot ae = ad^2 + bd \cdot dc$ (nach §. 150, a).

§. 156. Lehrſatz.

Das Rechteck aus den Diagonalen eines Vierecks im Kreiſe iſt gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten (Lehrſatz des Ptolemäus).

Fig. 87.



Beh. $bc \cdot ad = ab \cdot cd + ac \cdot bd$.

Beweis. Trägt man von den an der Ecke b durch die Diagonale gebildeten Winkeln den kleineren Winkel v auf dem größeren ab, ſo iſt $v = w$.

Aus $v = w$ und $s = r$ folgt nun

$\triangle cbd \sim \triangle abg$, daher

$cb : cd = ab : ag$ oder

1) $cb \cdot ag = cd \cdot ab$.

Ferner folgt aus $(w + u) = (v + u)$ und aus $x = y$:

$\triangle cab \sim \triangle dgb$ und hieraus

$ca : cb = dg : db$ oder

2) $cb \cdot dg = ca \cdot db$.

Addirt man 1) und 2), ſo ergiebt ſich:

$bc \cdot ad = ab \cdot cd + ac \cdot bd$.

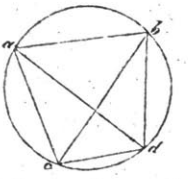
Anm. 1. Sind beide Diagonalen zugleich Durchmeſſer, ſo iſt abcd ein Rechteck. Alsdann iſt $bc^2 = ab^2 + ac^2$. Sind die beiden Diagonalen gleich groß, ſo iſt abcd ein Trapez und folglich ſind auch die beiden nicht parallelen Seiten gleich groß. Man erhält alsdann den pythagoräiſchen Lehrſatz für ſpitzwinklige, oder für ſtumpfwinklige Dreiecke.

Anm. 2. Obiger Satz läßt ſich umkehren. Der Beweis wird auf die Art geführt, daß man zunächſt entwickelt, wie bei jedem Vierecke mit hohlen Winkeln, um welches ſich kein Kreis ſchlagen läßt, das Rechteck aus den Diagonalen kleiner als die Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten ſein muß.

§. 157. Lehrſatz.

Die Diagonalen eines Vierecks im Kreiſe verhalten ſich wie die Summen der Rechtecke aus den Seiten, welche in den Endpunkten der Diagonalen zuſammenſtoßen.

Fig. 88.



Beh. $ad : bc = (ab . ac + db . dc) : (ba . bd + ca . cd)$.

Beweis. Es iſt:

$$\triangle abd + \triangle acd = \triangle abc + \triangle bdc,$$

folglich nach §. 154, wenn D den Durchmeſſer bedeutet,

$$\frac{ab . bd . ad}{2D} + \frac{ac . cd . ad}{2D} = \frac{ab . bc . ac}{2D} + \frac{bd . dc . bc}{2D}.$$

Hieraus folgt $(ab . bd + ac . cd) . ad = (ab . ac + db . dc) . bc$, und hieraus $ad : bc = (ab . ac + db . dc) : (ab . bd + ac . cd)$.

Anm. Durch Umſtellung der Summanden in der erſten Gleichung gelangt man zum Verhältniſſe der Seiten. Man findet alsdann:

$ab : cd = (ac . ad - bc . bd) : (ca . cb - da . db)$ und

$bd : ac = (ba . bc - da . dc) : (ab\ ad - cb . cd)$.

Uebungsſätze.

1) Schneidet man auf einem Durchmeſſer von einem ſeiner Endpunkte (a) aus drei ſolche Stücke ab, daß das eine die mittlere Proportionale zwiſchen den beiden andern iſt, errichtet in dieſen Theilpunkten Senkrechte, die man bis zur Peripherie verlängert (bis d, e, f), ſo iſt eine der drei Linien ad, ae, af die mittlere Proportionale zu den beiden andern.

2) Wenn in einem eingeſchriebenen Vierecke eine der Diagonalen verlängert durch den Durchſchnittspunkt der beiden Tangenten geht, welche man an die Endpunkte der andern Diagonale zieht, oder mit dieſen Tangenten parallel läuft, ſo ſind die Rechtecke aus je zwei Gegenſeiten gleich groß.

3) Legt man durch irgend einen Punkt der gemeinſchaftlichen Sehne zweier Kreiſe verſchiedene Sehnen, welche dem einen oder andern Kreiſe angehören, ſo ſind alle die Sehnen, welche in jenem Punkte halbirt werden, gleich groß.

4) Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreiſes nach einem beliebigen Punkte einer Sehne eine Gerade, ſo iſt das Quadrat des Radius ſo groß als das Quadrat dieſer Geraden, vermehrt oder vermindert um das Rechteck aus den beiden Abſchnitten der Sehne, je nachdem obiger Punkt in der Sehne ſelbſt, oder in ihrer Verlängerung liegt.

5) Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreiſes beliebige Gerade nach verſchiedenen Punkten beliebiger Sehnen, ſo giebt das Quadrat einer ſolchen Geraden vermehrt um das Rechteck aus den Stücken der zugehörigen Sehne ſtets dieſelbe Summe.

6) Zieht man von dem einen Endpunkte a einer beliebigen Sehne ab einen Durchmesser und fällt auf denselben von b aus eine Senkrechte, so ist jene Sehne ab die mittlere Proportionale zwischen jeder andern von a aus gezogenen Sehne und dem Stücke derselben, welches vom Punkte a und jener Senkrechten begränzt wird.

7) In jedem spitzwinkligen Dreiecke ist das Quadrat jeder Seite vermehrt um das Quadrat vom obern Abschnitte der zu ihr gehörigen Höhe gleich dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Kreises. (Der obere Abschnitt ist der zwischen der Ecke und dem Durchschnittspunkte der Höhen liegende Theil.)

8) Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks über ihre Fußpunkte hinaus um die Länge ihrer untern Abschnitte, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

9) Wenn ein Viereck im Kreise durch die eine Diagonale in zwei gleich große Dreiecke getheilt wird, so verhalten sich die beiden Dreiecke, in welche es die zweite Diagonale theilt, wie die Quadrate der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.

10) Wenn bei einem Vierecke im Kreise zwei einander gegenüberliegende Seiten sich wie die beiden übrigen Seiten zu einander verhalten, so muß es durch die eine Diagonale in zwei gleich große Dreiecke zerlegt werden.

11) Wenn bei einem Vierecke im Kreise die beiden Diagonalen sich so schneiden, daß die Abschnitte der einen gleich groß sind, so müssen die Abschnitte der andern sich verhalten, wie die Quadrate der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.

12) Berühren sich zwei Kreise von innen und man zieht in dem größern eine Sehne bc, welche den kleinern in einem Punkte a berührt, und verbindet ferner die drei Punkte b, c und a mit dem Berührungspunkte m, so wird der Winkel bmc durch die Linie ma halbirt.

13) Theilt man den Durchmesser ab eines Kreises in zwei beliebige Stücke ac und cb, beschreibt über jedem dieser Stücke einen Halbkreis, errichtet ferner in c die Senkrechte cd bis zur Peripherie des obigen Kreises und verbindet schließlich d mit a und b, so verhalten sich die Stücke von da und db, welche innerhalb der beiden kleinern Halbkreise liegen, wie die dritten Potenzen von da und db.

14) Ist ein Kreisbogen ab in den Punkten c, d, e ... m in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, und man verbindet den zweiten Theilpunkt d mit dem letzten m und verlängert diese Linie dm bis zum Durchschnitte s mit der verlängerten Sehne ab, so ist diese Verlängerung ms gleich der Sehne am. (Als Hülfssatz zu 15.)

15) Theilt man einen Kreisbogen ab in den Punkten c, d, e ... m in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und verbindet a mit diesen Theilpunkten, so verhält sich die kleinste dieser Linien (ac) zur nächstfolgenden (ad), wie irgend eine andere zur Summe der ihr vorhergehenden und nachfolgenden, also z. B. wie ag zu (af + ah).

16) Zwei sich schneidende Diagonalen eines regulären Fünfecks theilen sich nach stetiger Proportion, und zwar ist das größere Stück jeder Diagonale gleich der Fünfecksseite.

17) Verlängert man zwei Seiten eines regulären Fünfecks bis zu ihrem Durchschnittspunkte, so ist die Verlängerung einer jeden gleich der Diagonale, und die verlängerte Seite wird in der Ecke nach stetiger Proportion geschnitten.

18) Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke, deſſen Seiten in ſtetiger Proportion ſtehen, eine Senkrechte vom Scheitel aus nach der Hypotenuſe, ſo iſt die kleinere Cathete gleich dem nicht anliegenden Hypotenuſenabſchnitte.

19) Es ſind eine Linie und zwei Punkte gegeben. Man ſoll einen Kreis conſtruiren, der durch die beiden Punkte geht und zu dem die gegebene Linie Tangente iſt.

20) Es ſind zwei Linien und ein Punkt gegeben. Man ſoll einen Kreis conſtruiren, der durch dieſen Punkt geht, und zu dem die gegebenen Linien Tangenten ſind.

21) Es ſind zwei Linien und ein Kreis gegeben. Man ſoll einen Kreis conſtruiren, der den andern berührt, und zu dem die gegebenen Linien Tangenten ſind.

22) Es iſt eine gerade Linie ab gegeben und ferner zwei außerhalb derſelben liegende Punkte m und n. Es ſoll in ab ein Punkt x beſtimmt werden der Art, daß die Summe der beiden Linien mx und nx einer gegebenen Linie gleich ſei.

23) Ein Dreieck ſoll conſtruirt werden aus der Grundlinie, der zugehörigen Höhe und der Summe der beiden andern Seiten.

24) Ueber einer gegebenen Geraden als Hypotenuſe ein Dreieck zu beſchreiben, deſſen Seiten eine ſtetige Proportion bilden.

25) Durch den Berührungspunkt a zweier gegebenen Kreiſe eine dieſelben in m und n treffende Linie zu ziehen, ſo daß am + an oder daß am — an einer gegebenen Linie gleich ſei.

26) Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, zu dem entweder der Umfang oder die Differenz der anliegenden Seiten gegeben ſind.

Anhang zum elften und zwölften Capitel.

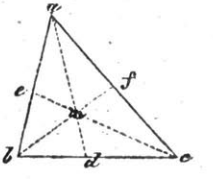
A. Von den Transverſalen des Dreiecks.

1. Erklärung. Jede beliebige Linie, welche eine Figur oder ein Syſtem von Linien durchſchneidet, heißt eine Transverſale derſelben. Wo nicht das Gegentheil bemerkt wird, ſind unter Transverſalen nur gerade Linien zu verſtehen.

2. Lehrſatz. Zieht man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks liegenden Punkt von den drei Ecken aus Transverſalen nach den gegenüberſtehenden Seiten, ſo wird jede dieſer Seiten in zwei Abſchnitte der Art getheilt, daß das Produkt aus drei nicht aneinander liegenden Abſchnitten gleich iſt dem Produkte aus den drei andern.

Beh. bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Fig. 89.



Beweis. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundlinien. Alſo iſt:

Δ bam : Δ bmd = am : md,
Δ cam : Δ cmd = am : md,
folglich Δ bam : Δ cam = Δ bmd : Δ cmd
und Δ bam : Δ cam = bd : dc (1).

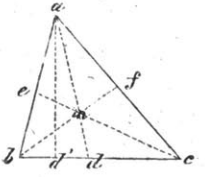
Ebenſo erhält man: Δ cbm : Δ abm = cf : fa (2),
Δ acm : Δ bcm = ae : eb (3).

Multiplicirt man 1, 2 und 3, ſo ergiebt ſich:
bam . cbm . acm : cam . abm . bcm = bd . cf . ae : dc . fa . eb
oder bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Liegt der Punkt m außerhalb des Dreiecks, ſo wird der Beweis in derſelben Art geführt.

3. Lehrſatz. Zieht man von jeder Ecke eines Dreiecks eine Transverſale nach der gegenüberſtehenden Seite oder deren Verlängerung ſo, daß das Produkt aus drei nicht aneinander liegenden Abſchnitten gleich dem Produkte aus den drei andern wird, ſo ſchneiden ſich die Transverſalen in einem Punkte.

Fig. 90.



Vor. Es ſei bd' . cf . ae = d'c . fa . eb (1).

Beweis. Je zwei der Transverſalen ad', ce, bf ſchneiden ſich in einem Punkte. Schneiden ſich bf und ce in m, ſo könnte die Transverſale ad' neben m vorbeigehen.

Zieht man nun durch m eine neue Transverſale ad, ſo iſt nach vorigem Satze:
bd . cf . ae = dc . fa . eb (2).

Aus der Verbindung von 1) und 2) ergiebt ſich:
bd' : bd = d'c : dc oder
(bd' + d'c) : d'c = (bd + dc) : dc
oder bc : d'c = bc : dc
oder d'c = dc.

Die Linien ad und ad' fallen alſo auf einander, und die drei Transverſalen ſchneiden ſich in einem Punkte.

Sind die Transverſalen nach den Verlängerungen der Seiten gezogen, ſo wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

4. Lehrſatz. Die Transverſalen, welche die drei innern Winkel eines Dreiecks halbiren, ſchneiden ſich in einem Punkte.

Fig. 91.

Beweis. Nach §. 129 iſt:
ab : ac = bd : dc,
bc : ba = cf : fa,
ca : cb = ae : eb.

Multiplicirt man dieſe drei Gleichungen, ſo ergiebt ſich:
bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Die Transverſalen ſchneiden ſich alſo (nach 3) in einem Punkte (im Mittelpunkte des eingeſchriebenen Kreiſes).

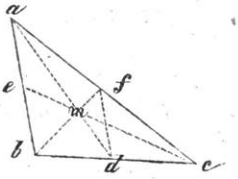
5. Lehrſatz. Die Transverſalen, welche einen innern und die beiden dieſem nicht anliegenden äußern Winkel halbiren, ſchneiden ſich in einem Punkte (im Mittelpunkte eines äußern berührenden Kreiſes).

Der Beweis wird mit Hülfe von §. 129 auf ähnliche Art geführt, wie der Beweis zu 4.

6. Lehrſatz. Die von den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Transverſalen ſchneiden ſich in einem Punkte, und jede Transverſale wird in dieſem Punkte in zwei Stücke getheilt, die ſich wie 1 : 2 verhalten.

Beweis. Es iſt bd . cf . ae = dc . fa . eb, alſo ſchneiden ſich die Linien in einem Punkte.

Fig. 92.



Ferner iſt fd || ab, daher Δ fmd $\sim$ Δ bma und alſo:

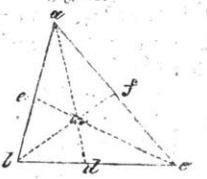
fm : bm = fd : ba = cf : ca = 1 : 2.

Der Punkt m wird der Schwerpunkt des Dreiecks genannt.

7. Lehrſatz. Die drei Höhen eines Dreiecks ſchneiden ſich in einem Punkte.

Beweis. Das Dreieck kann ſpitzwinklig, ſtumpfwinklig, oder rechtwinklig ſein.

Fig. 93.



a) In dem ſpitzwinkligen Dreiecke abc ergiebt ſich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bda und bec, cfb und cda, aec und afb:

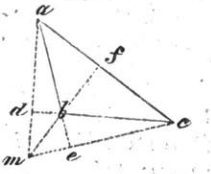
1) bd : be = ba : bc,
2) cf : cd = cb : ca,
3) ae : af = ac : ab.

Durch Multiplication von 1, 2 und 3 erhält man:

bd . cf . ae = dc . af . be,

und die drei Höhen ſchneiden ſich daher in einem Punkte.

Fig. 94.

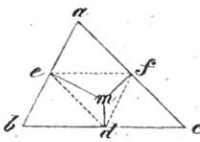


b) In dem ſtumpfwinkligen Dreiecke abc liegen zwei Höhen ad und ce außerhalb des Dreiecks. Man verlängert nun dieſelben bis m und zieht mf ſenkrecht auf ac. Alsdann muß mf als dritte Höhe des ſpitzwinkligen Dreiecks mac durch den Punkt b gehen, und umgekehrt ſchneiden ſich deßhalb bf, ce und ad in einem Punkte.

c) Für das rechtwinklige Dreieck ergiebt ſich der Beweis von ſelbſt.

8. **Lehrſatz.** Die drei Senkrechten auf den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks ſchneiden ſich in einem Punkte.

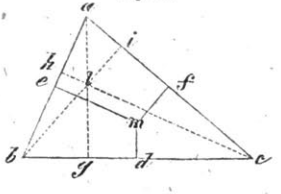
Fig. 95.



Beweis. Da die drei Seiten ab, ac, bc in e, f und d halbirt ſind, ſo folgt fd || ab, ed || ac, ef || bc. Es ſtehen daher die auf ab, ac und bc errichteten Senkrechten auch ſenkrecht auf df, ed und fd, und ſind alſo die Höhen des Dreiecks efd. Als ſolche müſſen ſie ſich aber in einem Punkte ſchneiden.

9. **Zuſatz.** Zieht man außer den drei erwähnten Senkrechten noch die drei Höhen des Dreiecks abc, ſo iſt:

Fig. 96.



Δ emd $\sim$ Δ cla
(weil je zwei Seiten parallel ſind).

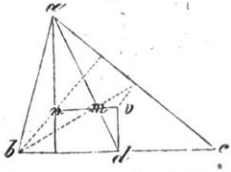
Hieraus folgt aber:

md : la = ed : ca = 1 : 2.

Der obere Theil jeder Höhe iſt alſo doppelt ſo groß, wie die Senkrechte, die vom Mittelpunkte des umſchriebenen Kreiſes nach der jener Höhe zugehörigen Grundlinie gezogen wird.

10. **Lehrſatz.** Der Durchſchnittspunkt der Höhen, der Mittelpunkt des umſchriebenen Kreiſes und der Schwerpunkt liegen bei jedem Dreiecke in gerader Linie und zwar liegt der Schwerpunkt zwiſchen den beiden andern Punkten ſo, daß er vom Durchſchnittspunkte der Höhen doppelt ſo weit entfernt iſt, als vom Mittelpunkte des umſchriebenen Kreiſes.

Fig. 97.



Vor. Es iſt n der Durchſchnittspunkt der Höhen, m der Schwerpunkt, v der Mittelpunkt des umſchriebenen Kreiſes.

Beh. 1) $\sphericalangle$ nmv = 2R;
2) nm = 2mv.

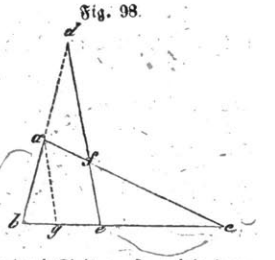
Beweis. Es iſt an = 2vd (nach 9), am = 2md (nach 6), $\sphericalangle$ nam = $\sphericalangle$ vdm, alſo Δ anm $\sim$ Δ dvm. Hieraus folgt:

1) $\sphericalangle$ amn = $\sphericalangle$ dmv und alſo $\sphericalangle$ nmv = 2R (weil $\sphericalangle$ amd = 2R);
2) nm : vm = an : dv : 2 : 1.

11. **Lehrſatz.** Werden die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von einer beliebigen geradlinigen Transverſale geſchnitten, ſo theilt dieſe Transverſale jede Seite des Dreiecks in zwei ſolche Abſchnitte, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderliegenden Abſchnitten gleich iſt dem Produkte aus den drei andern (Satz des Menelaus).

Beh. be . cf . ad = ec . fa . db.

Fig. 98.



Beweis. Zieht man aus a die Linie ag parallel mit de, ſo iſt:

da : db = eg : eb,
cf : fa = ce : eg.

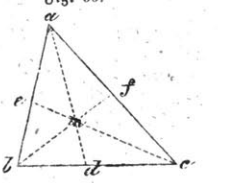
Durch Multiplication beider Gleichungen erhält man:

da . cf : db . fa = ce : eb oder
da . cf . eb = db . fa . ce.

Trifft die Transverſale die Verlängerungen der drei Seiten, ſo wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

12. Zuſatz. Aus obigem Lehrſatze läßt ſich der Lehrſatz 2) ſehr leicht ableiten. Zieht man nämlich im Dreiecke abc die drei Transverſalen ce, bf und ad durch den Punkt m, ſo iſt ad Transverſale des Dreiecks bec, fb Transverſale des Dreiecks aec. Alsdann erhält man:

Fig. 99.



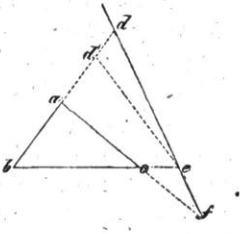
1) bd . cm . ea = dc . me . ab,
2) cf . ab . em = fa . be . mc.

Durch Multiplication von 1) und 2) erhält man aber:

bd . cf . ea = dc . fa . eb.

13. Lehrſatz. Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten oder auf den Verlängerungen aller drei Seiten drei Punkte ſo annimmt, daß das Produkt von drei nicht aneinander liegenden Stücken gleich iſt dem Produkte der drei andern, ſo läßt ſich durch dieſe drei Punkte eine gerade Linie ziehen.

Fig. 100.



Vor. be . cf . ad = ce . fa . bd.
Beh. ∠ fed = 2R.

Beweis. Wäre fed nicht eine gerade Linie, ſo könnte man eine gerade Linie fed′ ziehen.

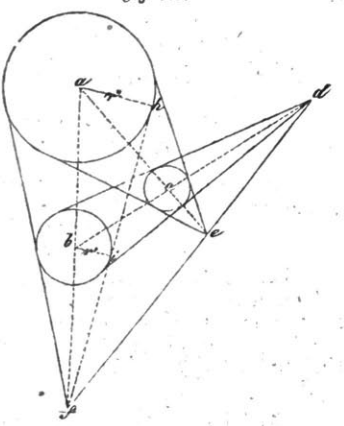
Alsdann wäre: be . cf . ad′ = ce . fa . bd′.

Nun iſt aber be . cf . ad = ce . fa . bd,
folglich ad : ad′ = bd : bd′ oder
(bd — ad) : ad = (bd′ — ad′) : ad′ oder
ad = ad′.

Die beiden Linien fed und fed′ fallen alſo zuſammen.

14. Lehrſatz. Die Schneidungspunkte je zweier gemeinſchaftlichen äußern Tangenten dreier Kreiſe liegen in gerader Linie.

Fig. 101.



Beweis. Da die Linien abf, ace und dcb gerade ſein müſſen, ſo ergiebt ſich, wenn man die Radien ah (= r″) und bi (= r′) nach den Berührungspunkten h und i zieht, Δ fbi ∽ Δ fah, alſo:

1) fb : fa = bi : ah = r′ : r″.

Bezeichnet man den Radius des dritten Kreiſes durch r, ſo iſt ebenſo:

2) dc : db = r : r′,

3) ea : ec = r″ : r.

Aus 1, 2 und 3 erhält man

fb . dc . ea = af . bd . ce.

Die Linie def iſt alſo (nach 13) eine geradlinige das Dreieck abc in den Verlängerungen der Seiten durchſchneidende Transverſale.

15. Lehrſätze. 1) Wenn man zu einem Dreiecke den eingeſchriebenen, oder einen auswärts berührenden Kreis conſtruirt und die Berührungspunkte der einzelnen Seiten mit den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, ſo ſchneiden ſich dieſe Verbindungslinien ſtets in einem Punkte.

2) Conſtruirt man zu einem Dreiecke ſämmtliche auswärts berührende Kreiſe und verbindet diejenigen ihrer Berührungspunkte, welche auf den Seiten des Dreiecks (nicht auf den Verlängerungen) liegen, mit den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks, ſo ſchneiden ſich dieſe Verbindungslinien in einem Punkte.

3) Wenn man um ein Dreieck einen Kreis beſchreibt und durch die Spitzen des Dreiecks Tangenten an dieſen Kreis zieht, ſodann dieſe Tangenten bis zum Durchſchnitte mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks verlängert, ſo liegen dieſe Durchſchnittspunkte in gerader Linie.

4) Wenn man um ein Dreieck einen Kreis beſchreibt und von einem beliebigen Punkte der Peripherie nach den drei Seiten des Dreiecks Linien zieht, welche mit den Seiten gleiche Winkel bilden (nach derſelben Seite hin gerechnet), ſo liegen die Fußpunkte dieſer drei Linien in einer geraden Linie.

Die Beweiſe ſind mit Hülfe der vorhergehenden Sätze zu führen.

B. Von den harmoniſchen Punkten.

16. Erklärung. Bilden vier Größen a, b, c, d die Proportion

$$(a - b) : (c - d) = a : d,$$

ſo ſtehen ſie in harmoniſcher Proportion.

Die harmoniſche Proportion heißt ſtetig, wenn $b = c$,
wenn alſo $(a - b) : (b - d) = a : d$ iſt,
wie z. B. $(6 - 4) : (4 - 3) = 6 : 3$.

Aus $(a - b) : (b - d) = a : d$ folgt

$$b = \frac{2ad}{a + d}.$$

Iſt umgekehrt $b = \frac{2ad}{a + d}$, ſo läßt ſich hieraus wieder ableiten:

$$(a - b) : (b - d) = a : d.$$

17. Erklärung. Liegen vier Punkte a, b, c, d in gerader Linie und verhalten ſich die Abſtände der Punkte a und b von c ebenſo, wie die Abſtände dieſer Punkte von d, iſt alſo

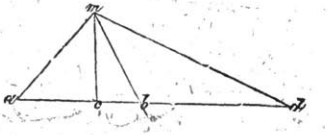
$$ac : bc = ad : bd,$$

ſo läßt ſich dieſe Proportion auch in folgender Weiſe ſchreiben:

$$(ad - cd) : (cd - bd) = ad : bd,$$

und es bilden daher die Linien ad, cd und bd eine ſtetige harmoniſche Proportion. Die Punkte a, b, c und d heißen harmoniſche Punkte; a und b heißen die Hauptpunkte, c der innere, d der äußere Theilungspunkt. Aus obiger Proportion ergiebt ſich:

Fig. 102.



$$1)\ cd = \frac{2ad \cdot bd}{ad + bd},$$

$$2)\ db : cb = da : ca,$$

d. h. Hauptpunkte und Theilungspunkte können ihre Bedeutung vertauſchen.

Ferner ergeben ſich folgende Beſtimmungen:

1) Je geringer der Unterſchied zwiſchen ac und bc wird, deſto weiter rückt d nach rechts.

2) Iſt $ac = bc$, ſo wird ad unendlich groß.

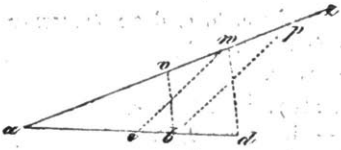
4) Iſt $ac < bc$, ſo muß d nach links fallen.

Verbindet man die Punkte a, b, c, d mit einem beliebigen, außerhalb der Linie ad liegenden Punkte m, ſo heißen ma, mb, mc und md harmoniſche Strahlen, m der Strahlpunkt.

18. Aufgabe. Zu drei harmoniſchen Punkten ſoll der vierte gefunden werden.

Auflöſung. Iſt der innere Theilungspunkt c zu den Punkten a, b und d zu ſuchen, ſo ziehe man eine beliebige Linie az, ferner zwei beliebige

Fig. 103.



Parallelen bv und dw aus b und d, mache wp = wv, ziehe pb und hierauf wc || pb, ſo iſt c der innere Theilungspunkt.

Beweis. Es iſt:

$$ac : cb = aw : wp = aw : vw,$$

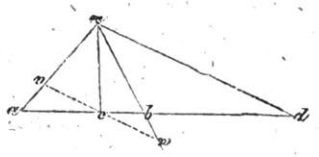
ferner $ad : bd = aw : vw$,

alſo $ac : cb = ad : bd$.

Iſt der äußere Theilungspunkt zu ſuchen, ſo ziehe man zuerſt die Parallelen cw und bp, mache dann $vw = wp$, ziehe vb und hierauf wd || vb. Es iſt alsdann d der geſuchte äußere Theilungspunkt.
Der Beweis wie vorher.

19. Lehrſatz. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer gegebenen Linie, die in a, b, c und d harmoniſch getheilt iſt, die vier harmoniſchen Strahlen ma, mb, mc und md, ſo wird jede mit md parallele Transverſale durch die drei andern Strahlen halbirt.

Fig. 104.



Vor. $ac : ad = cb : bd$;
$vw \parallel md$.

Beh. $vc = cw$.

Beweis. Es iſt $\Delta\, cav \sim \Delta\, dam$, alſo:

1) $ac : ad = cv : dm$;

ferner $\Delta\, cbw \sim \Delta\, dbm$, alſo:

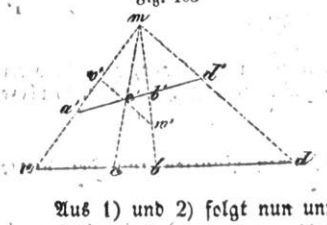
2) $cb : db = cw : dm$.

Da nun $ac : ad = cb : bd$ iſt, ſo folgt $cv : dm = cw : dm$ und hieraus $cv = cw$.

Iſt aber $cv = cw$, ſo müſſen auch alle übrigen mit md parallel gezogenen Linien durch ma, mc und mb halbirt werden. — Aus dieſem Satze ergiebt ſich zugleich eine einfache Conſtruction zur Auffindung eines der vier harmoniſchen Punkte aus den drei übrigen.

20. Lehrſatz. Jede Transverſale, welche vier harmoniſche Strahlen durchſchneidet, wird von denſelben harmoniſch geſchnitten.

Fig. 105



Vor. $ac : cb = ad : bd$.

Beh. $a'c' : c'b' = a'd' : b'd'$.

Beweis. Zieht man $v'w' \parallel md$, ſo iſt:

$v'c' = c'w'$ (nach 19).

Nun iſt $\Delta\, c'b'w' \sim \Delta\, d'b'm$, alſo

1) $c'b' : d'b' = c'w' : d'm$;

ferner iſt $\Delta\, a'c'v' \sim \Delta\, a'd'm$, alſo

2) $a'c' : a'd' = c'v' : d'm = c'w' : d'm$.

Aus 1) und 2) folgt nun unmittelbar:

$a'c' : a'd' = c'b' : d'b'$ oder

$a'c' : c'b' = a'd' : b'd'$.

Vier harmoniſche Strahlen ſchneiden alſo jede Transverſale harmoniſch, wenn ſie nur eine derſelben harmoniſch ſchneiden, und vier harmoniſche Punkte beſtimmen vier harmoniſche Strahlen, (von denen auch die Verlängerungen über den Strahlpunkt hinaus genommen werden können).

21. Zuſatz. Der vorige Satz läßt ſich als ſpecieller Fall des folgenden allgemeinen betrachten:

Vier von einem Punkte ausgehende Strahlen ſchneiden jede Transverſale ſo, daß jedes der drei Doppelverhältniſſe, die ſich aus den Abſtänden je zweier Durchſchnittspunkte von den beiden übrigen bilden laſſen, einen unveränderlichen Werth hat.

Sind alſo ma, mc, mb, md (Fig. 105) beliebige Strahlen, ſo iſt:

$$1)\quad \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = \frac{a'b'}{d'b'} : \frac{a'c'}{d'c'};$$

$$2)\quad \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \frac{a'b'}{c'b'} : \frac{a'd'}{c'd'};$$

$$3)\quad \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}.$$

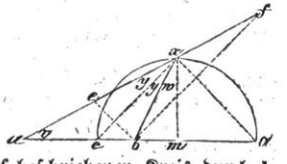
Der Beweis wird dadurch eingeleitet, daß man von d' aus eine Linie parallel mit ad zieht. Bezeichnet man die Punkte, in welchen dieſelbe von den übrigen Strahlen geſchnitten wird, durch a'', b'', c'', ſo wird Δ a'a''d' von den Transverſalen mc und mb, ferner Δ c'c''d' von den Transverſalen ma und mb, ferner Δ b'b''d' von den Transverſalen mc und ma geſchnitten. Entwickelt man (nach 11) die ſich hieraus ergebenden Gleichungen, ſo erhält man die obigen Behauptungen.

22. Lehrſatz. Sind a, b, c, d vier harmoniſche Punkte und beſchreibt man über cd als Durchmeſſer eine Kreislinie, ſo iſt dieſelbe der geometriſche Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche auf der Grundlinie ab ſtehen, und deren zwei andere Seiten ſich verhalten wie ac : bc.

Vor. ac : cb = ad : bd;
$\sphericalangle$ cxd = R.

Beh. xa : xb = ac : cb.

Fig. 106.



Beweis. Zieht man be ∥ xd und macht dann xf = ex, ſo iſt bf ∥ xc (ſiehe 18). Aus bf ∥ xc, be ∥ xd und $\sphericalangle$ cxd = R folgt aber $\sphericalangle$ ebf = R.

Es muß alſo ein über dem Durchmeſſer exf beſchriebener Kreis durch b gehen, und es muß daher xb = xe = xf ſein. Da nun

ac : cb = ax : xf iſt, ſo folgt hieraus

ac : cb = ax : xb.

23. Zuſatz. Soll der geometriſche Ort für die Spitzen der Dreiecke geſucht werden, die auf der Grundlinie ab ſtehen, und deren zwei andere Seiten ſich verhalten wie m : n, ſo theilt man zuerſt ab im Punkte c nach

dieſem Verhältniſſe, ſucht zu a, b, c den vierten harmoniſchen Punkt d und ſchlägt über cd als Durchmeſſer einen Kreis.

In ähnlicher Art läßt ſich die Aufgabe löſen, ein Parallelogramm aus den beiden Diagonalen und dem Verhältniſſe der Seiten zu conſtruiren.

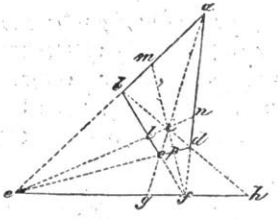
24. Zuſatz. Aus der Proportion ac : cb = ax : xb (in 22) folgt $\sphericalangle$ axc = $\sphericalangle$ cxb oder y = y. Zieht man noch den Radius mx, ſo iſt $\sphericalangle$ mcx = $\sphericalangle$ mxc = y + w. Ferner iſt $\sphericalangle$ bcx = y + v, daher v = w. Aus v = w und aus $\sphericalangle$ xma = $\sphericalangle$ bmx folgt aber $\triangle$ amx $\sim$ $\triangle$ xmb und hieraus am : mx = mx : mb oder am . mb = mx^2 = mc^2.

Halbirt man alſo cd in m, ſo iſt cm die mittlere Proportionale zu am und bm.

25. Erklärung. Verlängert man in einem Vierecke abcd (ſiehe Fig. 107) je zwei Seiten bis zu ihrem Durchſchnittspunkte, alſo ab und dc bis e, bc und ad bis f, ſo nennt man die ſo entſtehende Figur abcdef ein vollſtändiges Viereck. Das vollſtändige Viereck beſteht aus drei einfachen Vierecken abcd, aecf und bedf, (bei welchem ſich zwei gegenüberliegende Seiten nicht erſt in der Verlängerung, ſondern auf den Seiten ſelbſt ſchneiden). Die Linie ef, welche wie bd und ac die Schneidungspunkte zweier Seitenpaare verbindet, heißt die dritte Diagonale.

26. Lehrſatz. Verlängert man die beiden erſten Diagonalen ac und bd eines vollſtändigen Vierecks abcdef bis zu ihren Durchſchnittspunkten g und h mit der dritten Diagonale ef, ſo wird jede Diagonale durch die beiden andern harmoniſch getheilt.

Fig. 107.



Beweis I. Betrachtet man e und f als zwei Strahlpunkte, von welchen je drei harmoniſche Strahlen eh, ed, ea, ferner fe, fb, fa ausgegangen ſind, und ſucht man zu dieſen Strahlen die vierten Strahlen en und fm, ſo wird durch dieſe Strahlen ſowohl ag wie auch bh harmoniſch getheilt. Der Schneidungspunkt der beiden Strahlen en und fm muß alſo ſowohl in der Linie ag, wie in der Linie bh, alſo im Schneidungspunkte i der beiden Diagonalen liegen, und es ſind alſo a, i, c, g vier harmoniſche Punkte. Sind aber a, i, c, g harmoniſche Punkte, ſo gilt daſſelbe (nach 20) auch für b, i, d, k und e, g, f, h.

Beweis II. Da das Dreieck aef von der Transverſale bh geſchnitten wird, ſo iſt ab . eh . fd = be . fh . da. (1.)

Da ſich ferner die drei Transverſalen ag, ed, fb des Dreiecks aef in einem Punkte ſchneiden, ſo iſt:

ab . eg . fd = be . gf . da (2).

Aus 1) und 2) ergiebt ſich aber:

eh : eg = fh : gf oder

eg : gf = eh : fh.

Sind aber e, g, f, h vier harmoniſche Punkte, ſo ſind auch (nach 20) b, i, d, h und a, i, c, g harmoniſche Punkte.

27. Zuſatz. Aus vorigem Satze ergeben ſich mit Hinzuziehung des Lehrſatzes 20. noch folgende Beziehungen:

Es ſind a, n, d, f und a, m, b, e und d, p, c, e und b, l, c, f harmoniſche Punkte, weil ſie von harmoniſchen Strahlen getroffen werden. Es werden alſo auch die Seiten harmoniſch getheilt.

Ferner ſind auch m, i, p, f und n, i, l, e harmoniſche Punkte.

Da der Durchſchnittspunkt je zweier Diagonalen immer den vierten harmoniſchen Punkt zu drei gegebenen liefert, ſo liegt in obigem Satze ein Mittel, eine gegebene Linie bloß mit Hülfe des Lineals harmoniſch zu theilen, indem man ein vollſtändiges Viereck conſtruirt.

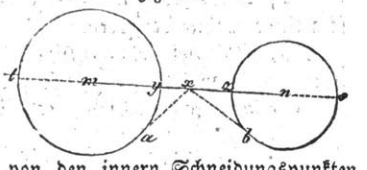
Ferner läßt ſich auf dieſelbe Art die Aufgabe löſen, von einem Punkte zwiſchen zwei convergirenden geraden Linien eine dritte Linie nach dem Durchſchnittspunkte der beiden erſteren zu ziehen, ohne daß man dieſen Durchſchnittspunkt kennt.

C. Von den Potenzlinien der Kreiſe.

28. Erklärung. Die Potenzlinie zweier Kreiſe iſt der geometriſche Ort für die Schneidungspunkte der gleichen Tangenten beider Kreiſe. Zieht man alſo von einem beliebigen Punkte der Potenzlinie (vier) Tangenten nach beiden Kreiſen, ſo ſind dieſe ſämmtlich gleich groß.

29. Aufgabe. Es ſoll der Punkt beſtimmt werden, in welchem die Centrale von der Potenzlinie durchſchnitten wird, wenn die Kreiſe ſich nicht ſchneiden.

Fig. 108.



Iſt x der zu ſuchende Punkt, ſo iſt $xa = xb$.

Nun iſt $xa^2 = xy \,.\, xt$, ferner

$xb^2 = xz \,.\, xs$, alſo

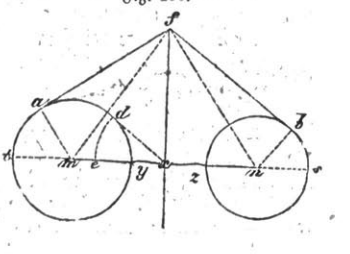
$xy \,.\, xt = xz \,.\, xs$ und

$xy : xz = xs : xt$.

Die Entfernungen des Punktes x von den innern Schneidungspunkten der Centrale und der Peripherieen verhalten ſich alſo umgekehrt, wie die Entfernungen von den äußern Schneidungspunkten.

30. Lehrſatz. Errichtet man in dem erwähnten Punkte x eine Senkrechte auf der Centrale, ſo iſt dieſe Senkrechte die Potenzlinie beider Kreiſe.

Fig. 190.



Vor. $xy : xz = xs : xt$;

$\sphericalangle fxy = R$; $\sphericalangle fam = R$; $\sphericalangle fbn = R$.

Beh. $fa = fb$.

Beweis. Es iſt:

$fa^2 = fm^2 - am^2 = fx^2 + mx^2 - am^2 =$

$= fx^2 + (my + yx)^2 - am^2 =$

$= fx^2 + (my + yx)^2 - my^2 =$

$= fx^2 + yx\,(yx + 2my) = fx^2 + yx \,.\, xt.$

Ebenso erhält man:

$$fb^2 = fx^2 + xz(xz + 2zn) = fx^2 + xz \,.\, xs.$$

Da nach der Voraussetzung $yx \,.\, xt = xz \,.\, xs$ ist, so folgt

$$fb = fa.$$

31. Zusatz. Zieht man von x aus die Tangente xd, so ist: $xd^2 = xy.xt$, also $fa^2 = fx^2 + xd^2 = fx^2 + xe^2$ (wenn man $xe = xd$ macht) $= fe^2$. Eine ähnliche Gleichung erhält man für den andern Kreis.

Es ergiebt sich aber aus der Gleichung $fa^2 = fe^2$, daß alle die Kreise, deren Mittelpunkte in der Potenzlinie liegen und deren Radien gleich der von dem jedesmaligen Mittelpunkte gezogenen Tangente sind, durch den Punkt e gehen müssen.

32. Zusatz. Für jeden Punkt der Potenzlinie sind nicht nur die Tangenten gleich groß, die man von demselben aus ziehen kann, sondern auch die Rechtecke aus den Secanten und ihren obern Abschnitten. Der Inhalt eines solchen Rechtecks heißt Potenz (daher der Name Potenzlinie).

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich noch:

Die Potenzlinie ist bekannt, wenn man nur einen Punkt derselben kennt.

Die Halbirungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen in gerader Linie.

33. Lehrsätze. 1) Die Potenzlinie zweier sich berührenden Kreise ist die gemeinschaftliche Tangente derselben.

2) Die Potenzlinie zweier sich schneidenden Kreise ist die gemeinschaftliche Sehne derselben.

3) Für zwei ganz innerhalb oder außerhalb einander liegende Kreise liegt die Potenzlinie ganz außerhalb.

Die Beweise ergeben sich aus dem Vorigen.

34. Lehrsätze. 1) Die drei Potenzlinien dreier Kreise haben stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Der Durchschnittspunkt zweier Potenzlinien ist nothwendig ein Punkt der dritten Potenzlinie, da man von demselben aus sechs gleiche Tangenten ziehen kann.

2) Die drei gemeinschaftlichen Tangenten dreier sich berührenden Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Die drei Tangenten sind zugleich Potenzlinien und schneiden sich also in einem Punkte.

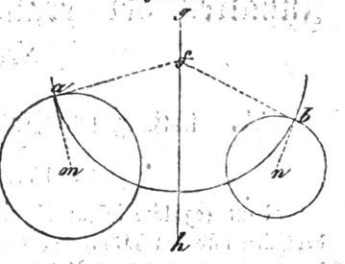
3) Die drei gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich schneidenden Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Der Beweis wie bei 2.

35. Erklärung. Der Winkel, unter welchem sich zwei Kreise schneiden, ist derjenige, den die beiden Tangenten bilden, welche man in einem der Durchschnittspunkte an beide Kreise ziehen kann. Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so ist der nach dem Schneidungspunkte gezogene Radius des einen zugleich Tangente des andern.

36. **Lehrſatz.** Beſchreibt man von einem Punkte in der Potenzlinie zweier Kreiſe einen dritten Kreis mit der von dieſem Punkte aus gezogenen Tangente, ſo ſchneidet dieſer Kreis die beiden andern rechtwinklig.

Fig. 110.



Beweis. Da der Radius fa Tangente iſt, ſo muß auch der Radius fb zugleich Tangente ſein. Alsdann iſt $\sphericalangle$ maf $=$ R und $\sphericalangle$ nbf $=$ R, alſo der Satz erwieſen.

Es ergiebt ſich zugleich, daß der Mittelpunkt eines Kreiſes, der zwei andere rechtwinklig ſchneidet, in der Potenzlinie dieſer beiden Kreiſe liegen muß.

37. **Lehrſätze.** 1) Zwei Kreiſe, die zwei andere ganz außer einander liegende Kreiſe rechtwinklig ſchneiden, müſſen ſich ſelbſt immer ſchneiden.

Beweis. Die Mittelpunkte der erſteren Kreiſe müſſen in der Potenzlinie liegen, und müſſen daher durch dieſelben zwei Punkte der Centrale gehen. (Vergleiche 31.)

2) Zwei Kreiſe, welche zwei andere ſich ſchneidende rechtwinklig ſchneiden, liegen ganz auseinander.

3) Die Peripherie aller der Kreiſe, welche zwei andere, von denen jeder ganz außerhalb des andern liegt, rechtwinklig ſchneiden, gehen durch dieſelben Punkte der Centrale dieſer letztern, haben alſo dieſe Centrale zur gemeinſchaftlichen Potenzlinie.

4) Wenn ein beliebiger Kreis zwei andere rechtwinklig ſchneidet, ſo haben die vier Durchſchnittspunkte ſtets eine ſolche gegenſeitige Lage, daß ſich vier Kreiſe beſchreiben laſſen, von denen jeder die gegebenen Kreiſe in zweien dieſer Punkte berührt.

Die Beweiſe ergeben ſich aus dem Vorigen.

Dreizehntes Capitel.

Von der Bestimmung des Umfanges und Inhaltes der regulären Vielecke und des Kreises.

A. Umfang und Inhalt der regulären Vielecke.

§. 158. Erklärung.

Eine reguläre Figur ist genau bestimmt, sobald man die Anzahl der Ecken und den Radius des eingeschriebenen oder umschriebenen Kreises kennt, aber mit den Hülfsmitteln der elementaren Geometrie ist man nur im Stande, einige wenige Gruppen von Vielecken zu zeichnen oder zu berechnen.

Nach dem Bisherigen lassen sich von den eingeschriebenen Figuren geometrisch construiren:

1) Die Seite des regulären Dreiecks, Vierecks, Sechsecks (§. 73).
2) Die Seite des regulären Zehnecks (§. 153).
3) Die Seite des regulären Funfzehnecks. Da diese den 15ten Theil der Peripherie abschneidet, so erhält man sie als Sehne zu der Differenz der Bogen, welche die Sechsecks- und Zehnecksseite abschneiden ($\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$).
3) Die Seiten aller 2necke, wenn die Seiten der necke bekannt sind.

Ferner lassen sich (nach Gauß) alle diejenigen necke*) construiren, bei welchen n eine Primzahl und von der Form $2^x + 1$ ist.

Dies sind nach jetziger Kenntniß die Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537.

Die geometrische Construction der regulären necke beschränkt sich also auf necke von folgender Seitenanzahl:

3,	6,	12,	24, ...
4,	8,	16,	32, ...
5,	10,	20,	40, ...
15,	30,	60,	120, ...
17,	34,	68,	136, ...
257,	514,	1028,	2056, ...
65537,	131074,	262148,	524296, ...

Anm. Die Construction der umschriebenen necke ist (nach §. 72) jedesmal möglich, sobald sich das eingeschriebene neck construiren läßt.

*) Da gegenwärtiges Capitel nur von regulären Figuren handelt, so ist diese Bezeichnung meistens nicht hinzugefügt.

§. 159. Erklärung.

Iſt der Radius eines Kreiſes in Zahlen gegeben, ſo laſſen ſich die Seiten der erwähnten eingeſchriebenen necke ebenfalls in Zahlen angeben. Bezeichnet man den Radius eines Kreiſes mit r, ſo ergiebt ſich für die eingeſchriebenen Figuren:

1) Die Seite des regulären Sechsecks $= r$ (§. 73).
2) „ „ „ „ Vierecks $= r \cdot \sqrt{2}$
3) „ „ „ „ Dreiecks $= r \cdot \sqrt{3}$.

Die Beweiſe für 2) und 3) ergeben ſich mit Hülfe des pythagoräiſchen Lehrſatzes aus §. 73.

4) Die Seite des regulären Zehnecks $= r \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis. Iſt die Zehnecksſeite $= a$, ſo iſt nach §. 153:

$r : a = a : (r - a)$ oder $a^2 + ar = r^2$, daher

$$a = \frac{-r}{2} + \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = r \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

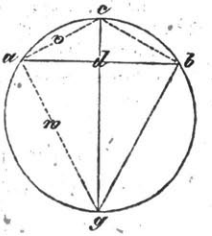
Die Beſtimmung der Seiten für die übrigen necke ergiebt ſich aus den folgenden Sätzen.

§. 160. Aufgabe.

Aus der Seite des eingeſchriebenen necks ſoll die Seite des eingeſchriebenen 2necks berechnet werden.

Auflöſung. Iſt $ab = u$ die Seite des necks, $ac = v$ die Seite des 2necks, $cg = 2r$ der Durchmeſſer, $ag = bg = w$, ſo iſt:

Fig. 111.



$ac \cdot bg + cb \cdot ag = cg \cdot ab$ (§. 156) oder

$2vw = 2ru$ oder $v^2w^2 = r^2u^2$ (1).

Da nun $w^2 = 4r^2 - v^2$ iſt, ſo folgt aus (1):

$v^2(4r^2 - v^2) = r^2u^2$ oder $v^4 - 4r^2v^2 = -r^2u^2$ (2),

daher $v = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - u^2}}$. *)

*) Alle bei dieſen Rechnungen vorkommenden Wurzeln können das negative oder auch das poſitive Vorzeichen haben. In den meiſten Fällen iſt die Wurzel jedoch eindeutig, ſobald man den Zahlenwerth für eine Linie ſucht. In gegenwärtigem Beiſpiele hat die Wurzel zwei Werthe. Der eine Werth gehört, wie leicht zu erweiſen iſt, zur Linie ac, der andere zur Linie ag.

Setzt man in dieſer Gleichung $u = p \cdot r$, ſo iſt:

$$v = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}},$$

welche Gleichung die geeignetſte iſt zur Berechnung der Seiten der ſpätern Vielecke aus den Seiten der frühern.

Da z. B. die Seite des eingeſchriebenen Sechsecks $= r$ iſt, (alſo $u = 1 \cdot r$) ſo ergiebt ſich für die Seite des eingeſchriebenen Zwölfecks:

$$v = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

und für die Seite des Vierundzwanzigecks (wo $u = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ iſt)

$$v = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Aus der Gleichung 2) ergiebt ſich ferner:

$$u = \frac{v}{r}\sqrt{4r^2 - v^2}, \text{ oder wenn } v = qr \text{ geſetzt wird,}$$

$$u = qr\sqrt{4 - q^2}.$$

So erhält man aus der Zehnecksſeite $v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r = q \cdot r$ die Fünfecksſeite $u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} =$

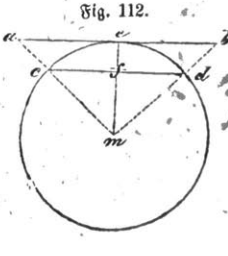
$$= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \cdot r.$$

Anm. Obige Aufgabe kann auch allgemeiner gefaßt werden: Aus der Länge einer Sehne die Länge der zum halben Bogen gehörigen Sehne zu berechnen. Eine ähnliche allgemeinere Form iſt auch für die Aufgabe des folgenden §. gültig.

§. 161. Aufgabe.

Aus der Seite u des eingeſchriebenen necks ſoll die Seite x des umſchriebenen necks berechnet werden.

Fig. 112.



Auflöſung. Iſt $ab = x$ die Seite des umſchriebenen, $cd = u$ die Seite des eingeſchriebenen necks und wird $fm = z$ geſetzt, ſo iſt:

$$x : u = r : z, \text{ alſo } x = \frac{u \cdot r}{z}.$$

Nun iſt $z^2 = r^2 - \frac{u^2}{4}$ oder $z = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - u^2}$,

daher $x = \frac{2ur}{\sqrt{4r^2 - u^2}}$. Setzt man $u = pr$, so ist $x = \frac{2rp}{\sqrt{4 - p^2}}$.
Mit Hülfe dieser Formel erhält man aus der Seite des eingeschriebenen 2ncks,

$$\text{also aus } v = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} = r \,.\, P$$

die Seite y des umschriebenen 2ncks, nämlich:

$$y = \frac{2rP}{\sqrt{4 - P^2}} = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}} =$$

$$= \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} \,.\, \sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}} \,.\, \sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}} = \frac{2rp}{2 + \sqrt{4 - p^2}}.$$

§. 162. Zusatz.

Ist also die Seite des eingeschriebenen ncks bekannt, und bezeichnet man die Seiten des eingeschriebenen ncks und 2ncks, ferner die des umschriebenen ncks und 2ncks durch e_n, e_{2n}, u_n, u_{2n}, so ist:

$$e_n = p \,.\, r,$$

$$e_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} \,.\, r$$

$$u_n = \frac{2p}{\sqrt{4 - p^2}} \,.\, r$$

$$u_{2n} = \frac{2p}{2 + \sqrt{4 - p^2}} \,.\, r.$$

§. 163. Aufgabe.

Aus der Seite des eingeschriebenen ncks ($e_n = p \,.\, r$) soll der Inhalt des eingeschriebenen ncks und 2ncks, ferner des umschriebenen ncks und 2ncks berechnet werden.

Auflösung. Der Inhalt der umschriebenen regulären Figuren wird erhalten, wenn man den halben Umfang mit dem Abstande einer Seite vom Mittelpunkte, also mit dem Radius multiplicirt. Da nach vorigem §. die Seiten, also auch der Umfang der ncke, bekannt sind, so ist der Inhalt derselben leicht zu finden. Da ferner die eingeschriebenen und umschriebenen regulären ncke von gleicher Seitenanzahl einander ähnlich sind und ihre Inhalte sich demnach verhalten, wie die Quadrate der Seiten, so läßt sich auch der Inhalt der eingeschriebenen Figuren mit Hülfe des vorigen §. leicht berechnen. Bezeichnet man den Inhalt

des eingeschriebenen ecks, 2ecks, ferner des umschriebenen ecks und 2ecks durch E_n, E_{2n}, U_n, U_{2n}, so erhält man, wenn man diese Rechnungen ausführt,

$$E_n = \frac{np\sqrt{4-p^2}}{4} \cdot r^2,$$

$$E_{2n} = \frac{np}{2} \cdot r^2,$$

$$U_n = \frac{np}{\sqrt{4-p^2}} \cdot r^2,$$

$$U_{2n} = \frac{2np}{2+\sqrt{4-p^2}} \cdot r^2.$$

Für das eingeschriebene Sechseck ist $p = 1$, also der Inhalt $=$

$$= \frac{6}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot r^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot r^2.$$

Für das umschriebene Quadrat ist $p = \sqrt{2}$, also der Inhalt $=$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot r^2 = 4r^2 \text{ *)}.$$

§. 164. Zusatz.

Vergleicht man die Resultate des vorigen §., so ergeben sich folgende Beziehungen:

1) $E_{2n} = \sqrt{E_n \cdot U_n}$,

2) $U_{2n} = \frac{2 \cdot E_{2n} \cdot U_n}{E_{2n} + U_n}$.

Die Fläche des eingeschriebenen 2ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen und umschriebenen ecks.

Die Fläche des umschriebenen 2ecks ist das harmonische**) Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen 2ecks und umschriebenen ecks.

Anm. Zu obigen Gleichungen kann man auch auf rein geometrischem Wege gelangen. Die geometrische Lösung wird dem mündlichen Vortrage überlassen.

---

*) Aus den vorigem §. ergiebt sich, daß nur von den in §. 158 angeführten ecken die Berechnung des Umfanges und Inhaltes möglich ist. Für die übrigen ecke ist diese Berechnung nur mit Hülfe der Trigonometrie möglich.

**) Siehe Anhang zum 11. und 12. Capitel (16).

B. Rectification und Quadratur des Kreises.

§. 165. Erklärung.

Unter Rectification des Kreises versteht man die Berechnung seines Umfanges, unter Quadratur die Berechnung seines Inhaltes.

Zur Auffindung des Inhaltes gelangt man durch die Vergleichung der Inhalte für die eingeschriebenen und umschriebenen regulären Vielecke. Die Inhalte eines eingeschriebenen und umschriebenen ecks unterscheiden sich nämlich immer weniger von einander, je größer n genommen wird, und für einen großen Werth von n muß daher dieser Unterschied so gering werden, daß man ihn vernachlässigen kann. Folgende Beispiele mögen dies veranschaulichen:

n	E_n	U_n
4	2,00000 ..... r^2	4,00000 ..... r^2
8	2,82842 ..... r^2	3,31370 ..... r^2
16	3,06146 ..... r^2	3,18259 ..... r^2
128	3,14033 ..... r^2	3,14222 ..... r^2
1024	3,14159 ..... r^2	3,14160 ..... r^2.

Aus dem letzten Beispiele ergiebt sich, daß der Inhalt eines Kreises zwischen 3,14158 . r^2 und 3,14160 . r^2 liegen muß.

Durch Fortsetzung dieser Rechnung oder durch Anwendung der höhern Mathematik gelangt man zu noch engern Gränzen.

Man erhält alsdann für den Inhalt des Kreises:

$$I = r^2 \,.\, 3{,}14159265358979323846 \ldots\ldots$$

Der irrationale, nicht periodische Decimalbruch 3,14159... heißt auch die Ludolffsche Zahl und wird durch den griechischen Buchstaben π bezeichnet. Der Inhalt ist also $I = r^2\pi$.

Bezeichnet man die Peripherie des Kreises durch P, so ist nach §. 103 auch:

$$I = \frac{P \,.\, r}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{P \,.\, r}{2} = r^2 \,.\, \pi \text{ und}$$

$$P = 2r\pi$$

$$D = \frac{P}{\pi},$$

$$\pi = \frac{P}{2r} = \frac{P}{d}\ ^*).$$

*) d ist der Durchmesser.

Die Zahl π drückt also das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser aus.

Anm. Für die Praxis ist der Näherungswerth $3\frac{1}{7}$ (Archimedes) oder noch genauer $\frac{377}{120}$ (Ptolemäus) meistens ausreichend. Man darf hierbei nicht denken, daß 3,14 genauer ist, als $3\frac{1}{7}$, denn letzterer Bruch ist gleich 3,14285 ..... und weicht daher weniger von dem wirklichen Werthe ab, als 3,14 .....

§. 166. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich noch:

1) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie die Radien.

2) Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

3) Ein Kreis hat denselben Umfang, wie verschiedene andere Kreise zusammen, wenn sein Radius gleich der Summe der Radien der übrigen ist.

4) Ein Kreis hat denselben Inhalt, wie verschiedene andere Kreise zusammen, wenn das Quadrat seines Radius gleich der Summe der Quadrate der übrigen Radien ist.

5) Ein Kreis hat zum Inhalt den Unterschied zweier Kreisflächen, wenn das Quadrat seines Radius gleich der Differenz der Quadrate der beiden andern Radien ist.

Anm. Die Constructionen für hierher gehörige Aufgaben ergeben sich theils von selbst, theils entsprechen sie den in §. 107 gegebenen. Die Aufgabe, die Differenz zweier Kreise oder eine ringförmige Figur in einen Kreis zu verwandeln, läßt sich lösen wie die entsprechende Aufgabe in §. 107 oder dadurch, daß man den kleinern Kreis concentrisch in den größern hineinzeichnet und von der Peripherie des größern eine Tangente an den kleinern zieht. Diese Tangente ist alsdann der Radius des gesuchten Kreises.

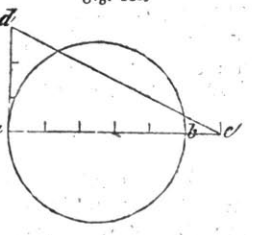
§. 167. Zusatz.

Da die Zahl π irrational ist, so läßt sich die Kreisfläche nicht genau als Quadrat und die Peripherie nicht genau als gerade Linie angeben. Ein ziemlich genaues Resultat läßt sich jedoch für beide Aufgaben erreichen.

1) Soll die Peripherie eines Kreises als gerade Linie dargestellt werden, so verlängere man den Durchmesser ab um das Stück $bc = \frac{1}{6}ab$, errichte auf a die Senkrechte $da = \frac{3}{5}ab$ und verbinde d und c.

Es ist alsdann $ad + ac + dc = P$.

Fig. 113.



Beweis. Iſt $ab = d$, ſo iſt $ae = \frac{6}{5}d$, $ad = \frac{3}{5}d$, alſo

$$de = \sqrt{(\tfrac{6}{5}d)^2 + (\tfrac{3}{5}d)^2} =$$

$$d\sqrt{\tfrac{9}{5}} = d \,.\, 1{,}3416407\ldots$$

Es iſt alſo $ae = 1{,}2000000\ldots . d$

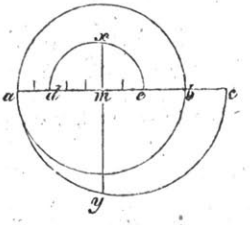
$ad = 0{,}6000000\ldots . d$

$de = 1{,}3416407\ldots . d$

folglich $ae + ad + de = 3{,}1416407\ldots . d = \pi \,.\, d$ (annähernd).

2) Soll die Fläche eines Kreiſes in ein Quadrat verwandelt werden, ſo ziehe man den Durchmeſſer amb, theile am in fünf, mb in zwei gleiche Theile und verlängere mb um ſeine Hälfte bis c. Schlägt man nun einen Halbkreis über de($ad = \frac{2}{5}r$) und ebenſo einen Halbkreis über ac($ac = 2\frac{1}{2}r$), ſo iſt die im Punkte m ſenkrecht auf ab gezogene Linie xy gleich der Seite des geſuchten Quadrates.

Fig. 114.



Beweis. Es iſt:

$$xm^2 = dm \,.\, me = \tfrac{3}{5}\,r \,.\, \tfrac{1}{2}r = \frac{3r^2}{10}, \text{ alſo}$$

$$xm = r \,.\, \sqrt{0{,}3}.$$

Ferner iſt $ym^2 = am \,.\, mc = r \,.\, \frac{3}{2}r$, alſo

$$ym = r \,.\, \sqrt{1{,}5}.$$

Es iſt alſo $(xm + ym)^2 = (r \,.\, \sqrt{0{,}3} + r\sqrt{1{,}5})^2 =$

$= r^2.0{,}3 + r^2.1{,}5 + 2r^2\sqrt{0{,}45} = r^2.0{,}3 + r^2.1{,}5 + r^2.1{,}3416407\ldots$

oder $xy^2 = r^2 \,.\, 3{,}1416407\ldots\ldots = r^2 \,.\, \pi$ (annähernd).

§. 168. Lehrſätze.

1) Zwei verſchiedene Bogen deſſelben Kreiſes verhalten ſich wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel.

2) Zwei verſchiedene Ausſchnitte deſſelben Kreiſes verhalten ſich wie die zugehörigen Bogen oder Mittelpunktswinkel.

Der Beweis ergiebt ſich daraus, daß zu gleichen Bogen auch gleiche Mittelpunktswinkel und Ausſchnitte gehören.

Anm. Da ſich die Mittelpunktswinkel verhalten wie die zugehörigen Bogen, ſo iſt die Größe derſelben genau bekannt, wenn man die Bogen und den Radius kennt. Für den Radius 1 iſt die Peripherie $= 2\pi$, und durch den Bogen 2π iſt alſo ein Winkel von 4R bezeichnet. Ebenſo bedeutet π

einen gestreckten, $\frac{\pi}{2}$ einen rechten Winkel, $\frac{\pi}{4}$ einen Winkel von 45° u. s. w. Die Größe eines Winkels kann also durch eine unbenannte Zahl angegeben werden. Ist a der Bogen eines Winkels x, so findet man den Winkel x durch die Proportion $a : 2\pi = x : 4R$.

§. 169. Aufgabe.

Es soll der Inhalt eines Kreisausschnittes aus dem Radius r und dem zugehörigen Mittelpunktswinkel x oder dem zugehörigen Bogen b berechnet werden.

Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Inhalt durch I, so hat man die Proportionen:

$$I : r^2\pi = x : 360 \quad \text{oder} \quad I : r^2\pi = b : 2r\pi, \quad \text{daher}$$

$$I = \frac{x}{360} \cdot r^2\pi \quad \text{oder} \quad I = \frac{b \cdot r}{2}.$$

Anm. Die Flächen der Ausschnitte, die zu verschiedenen Kreisen gehören, aber gleiche Mittelpunktswinkel haben, verhalten sich also wie die Quadrate der Radien, die zugehörigen Bogen wie die Radien.

Aufgaben.

1) Wie groß ist die Peripherie und wie groß der Inhalt eines Kreises, dessen Radius 7′ 6″ beträgt? (Decimalmaaß.)
2) Wie groß ist die Peripherie und wie groß der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 1° 7′ 9″ beträgt?
3) Die Peripherie eines Kreises beträgt 4′ 2″. Wie groß ist der Inhalt und wie groß der Radius?
4) Der Inhalt eines Kreises beträgt 11 □°, 3 □′, 7 □″, 19 □‴. Wie groß ist der Durchmesser und wie groß die Peripherie?
5) Wie groß ist der Bogen und wie groß der Kreisausschnitt zu dem Durchmesser 12′ 6″ und dem Mittelpunktswinkel 37° 18′?
6) Wie groß ist der Bogen und wie groß der Kreisausschnitt zu dem Durchmesser 1′ 7″ und dem Mittelpunktswinkel 44° 18′ 19″?
7) Die Länge eines Bogens beträgt 4′ 3″ 2‴, die Länge des zugehörigen Kreisdurchmessers 9° 7′ 4″ 6‴. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel und der Inhalt des Kreisausschnittes?
8) Für welchen Mittelpunktswinkel ist der Bogen so groß wie der Halbmesser?
9) Der Halbmesser eines Kreises beträgt 9′ 7″, der Mittelpunktswinkel eines Ausschnittes 60°. Wie groß ist der zugehörige Abschnitt?
10) Die Ringfläche zwischen zwei concentrischen Kreisen ist 42 □′, der Halbmesser des innern Kreises 9′. Wie breit ist der Ring?
11) Ein concentrischer Ring enthält 87 □′ 3 □″, seine Breite beträgt 3′. Wie groß ist der Halbmesser des kleinern Kreises?

Aus dem Radius r die Seite zu finden für das reguläre eingeschriebene:

12) 8eck; 13) 16eck; 14) 32eck; 15) 20eck; 16) 40eck;

ferner die Seite für das reguläre umschriebene:
17) 3eck; 18) 6eck; 19) 12eck; 20) 4eck; 21) 8eck; 22) 16eck;
23) 5eck; 24) 10eck;
ferner den Inhalt für das reguläre eingeschriebene:
25) 3eck; 26) 6eck; 27) 12eck; 28) 24eck; 29) 5eck; 30) 10eck;
ferner den Inhalt für das reguläre umschriebene:
31) 3eck; 32) 6eck; 33) 12eck; 34) 5eck; 35) 10eck.

Auflösungen.

1) $P = 4^\circ\ 7'\ 7{,}5\ldots''$; $I = 1\ \Omega^0\ 81\ \Omega'\ 45{,}8\ldots\Omega''$;
2) $P = 5^\circ\ 6'\ 2{,}3\ldots''$; $I = 2\ \Omega^0\ 51\ \Omega'\ 64{,}9\ldots\Omega''$;
3) $D = 1'\ 3{,}3\ldots''$; $I = 1\ \Omega'\ 40{,}3\ldots\Omega''$;
4) $D = 3^\circ\ 7'\ 4{,}7\ldots''$; $P = 11^\circ\ 7'\ 7{,}4\ldots''$;
5) Bogen $= 4'\ 1{,}01\ldots''$; Ausschnitt $= 12\ \Omega'\ 91{,}9\ldots\Omega''$;
6) Bogen $= 6''\ 5{,}7\ldots'''$; Ausschnitt $= 27\ \Omega''\ 93{,}1\ldots\Omega'''$;
7) Winkel $= 5^\circ\ 4'\ 45{,}5\ldots''$; Ausschnitt $= 1\ \Omega^0\ 5\ \Omega'\ 25{,}6\ldots\Omega''$;
8) Winkel $= 57^\circ\ 29'\ 58{,}\ldots''$; 9) Abschnitt $= 8\ \Omega'\ 52{,}4\ldots\Omega''$;
10) Breite $= 7''\ 1{,}2\ldots'''$; 11) Halbmesser $= 3'\ 1''\ 1{,}7\ldots'''$;

12) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$; 13) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

14) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; 15) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$;

16) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$; 17) $2r \cdot \sqrt{3}$; 18) $\frac{2r \cdot \sqrt{3}}{3}$;

19) $2r \cdot (2-\sqrt{3})$; 20) $2r$; 21) $2r \cdot (\sqrt{2}-1)$;

22) $2r \cdot \{\sqrt{2(2+\sqrt{2})} - 1 - \sqrt{2}\}$; 23) $2r \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

24) $2r \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$; 25) $\frac{3}{4}r^2 \cdot \sqrt{3}$; 26) $\frac{3}{2}r^2 \cdot \sqrt{3}$;

27) $3r^2$; 28) $6r^2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$; 29) $\frac{5}{8}r^2 \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

30) $\frac{5}{4}r^2 \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$; 31) $3r^2 \cdot \sqrt{3}$; 32) $2r^2 \cdot \sqrt{3}$;

33) $12r^2 \cdot (2-\sqrt{3})$; 34) $5r^2 \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

35) $10r^2 \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.

Vierzehntes Capitel.

Von vermischten geometrisch-algebraischen Aufgaben und von der geometrischen Construction algebraischer Formeln.

A. Geometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 170. Aufgaben.

I. Der Inhalt I eines Dreiecks soll aus den Seiten*) a, b, c berechnet werden.

Auflösung. Es ist:

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{SABC} \text{ (vergleiche §. 118).}$$

Anm. Ist das Dreieck gleichseitig, so ist $I = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a.a.a.a} =$
$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

II. Der Inhalt I eines Dreiecks soll aus den drei Höhen a, b, c berechnet werden.

Auflösung. Bezeichnet man die drei zugehörigen Seiten durch x, y, z, so ist $2I = ax$, $2I = by$, $2I = cz$, also $y = \frac{ax}{b}$ und $z = \frac{ax}{c}$. Nach I. ist also:

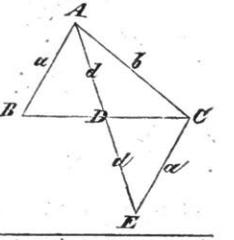
$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(x+\tfrac{ax}{b}+\tfrac{ax}{c}\right)\left(-x+\tfrac{ax}{b}+\tfrac{ax}{c}\right)\left(x-\tfrac{ax}{b}+\tfrac{ax}{c}\right)\left(x+\tfrac{ax}{b}-\tfrac{ax}{c}\right)} =$$
$$= \frac{x^2}{4b^2c^2}\sqrt{(bc+ac+ab)(-bc+ac+ab)(bc-ac+ab)(bc+ac-ab)} =$$
$$= \frac{x^2}{4b^2c^2}M. \quad \text{Ferner ist } x = \frac{2I}{a} \text{ und } x^2 = \frac{4I^2}{a^2},$$
$$\text{also } I = \frac{4I^2}{4a^2b^2c^2}M \text{ oder } I = \frac{a^2b^2c^2}{M}.$$

Anm. Dividirt man den Inhalt durch die Hälfte irgend einer Höhe, so erhält man die zugehörige Seite.

*) Die in diesem Cap. vorkommenden Linien sind in Zahlen gegeben.

III. Der Inhalt I eines Dreiecks ſoll aus zwei Seiten a, b und der von der gemeinſchaftlichen Ecke nach der Mitte der dritten Seite gezogenen Transverſale d berechnet werden.

Fig. 115.



Auflöſung. Verlängert man AD = d um ſich ſelbſt bis E, ſo iſt:

$$\triangle BDA \cong \triangle CDE,$$

alſo auch

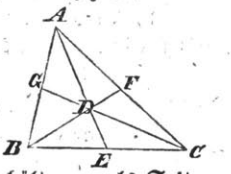
$$\triangle ABC = \triangle AEC.$$

Die Seiten des Dreiecks AEC ſind nun AC = b, CE = a, AE = 2d, daher (nach I.):

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2d)\,(-a+b+2d)\,(a-b+2d)\,(a+b-2d)}.$$

IV. Der Inhalt I eines Dreiecks ſoll aus den drei von den Ecken nach den Mitten der Gegenſeiten gezogenen Transverſalen a, b, c berechnet werden.

Fig. 116.



Auflöſung. Es iſt:

$$\triangle ADB = \triangle ADC = \triangle BDC = \tfrac{1}{3}\triangle ABC$$

(vergleiche 2. des Anhanges),

ferner AD = 2DE, BD = 2DF, CD = 2DG

(nach 6. des Anhanges).

Iſt nun AE = a, BF = b, CG = c, ſo erhält man als Seiten des Dreiecks BDC die Linien BD = $\frac{2}{3}$b, CD = $\frac{2}{3}$c und DE = $\frac{1}{3}$a. Folglich iſt (nach III.) $\triangle$ BDC oder $\frac{1}{3}\triangle$ ABC =

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{2}{3}b+\tfrac{2}{3}c)\,(-\tfrac{2}{3}a+\tfrac{2}{3}b+\tfrac{2}{3}c)\,(\tfrac{2}{3}a-\tfrac{2}{3}b+\tfrac{2}{3}c)\,(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{2}{3}b-\tfrac{2}{3}c)} =$$

$$= \tfrac{1}{9}\sqrt{SABC},\ \text{und alſo}\ \triangle ABC = \tfrac{1}{3}\sqrt{SABC}.$$

§. 171. Aufgaben.

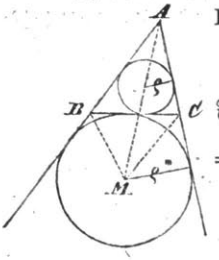
I. Der Inhalt I eines Dreiecks ſoll aus den drei Seiten a, b, c und dem Radius r des umſchriebenen Kreiſes berechnet werden.

Auflöſung. Es iſt $I = \dfrac{abc}{4r}$ (nach §. 154).

Hieraus folgt $r = abc : \sqrt{SABC}$.

II. Der Inhalt I eines Dreiecks ſoll aus den drei Seiten a, b, c und einem der vier Radien ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', welche den vier berührenden Kreiſen zugehören, berechnet werden.

Fig. 117.



Auflöſung. Iſt AB = a, AC = b, BC = c, ſo ergiebt ſich unmittelbar:

1) $I = (a + b + c) \cdot \frac{\varrho}{2} = S \cdot \frac{\varrho}{2}$.

Ferner iſt $I = \triangle ABM + \triangle ACM - \triangle BCM =$

$= a \cdot \frac{\varrho'''}{2} + b \cdot \frac{\varrho'''}{2} - c \cdot \frac{\varrho'''}{2}$ oder

2) $I = (a + b - c) \cdot \frac{\varrho'''}{2} = C \cdot \frac{\varrho'''}{2}$.

Ebenſo erhält man: 3) $I = (a - b + c) \cdot \frac{\varrho''}{2} = B \cdot \frac{\varrho''}{2}$

4) $I = (-a + b + c) \cdot \frac{\varrho'}{2} = A \cdot \frac{\varrho'}{2}$.

§. 172. Zuſätze.

1) Verbindet man die vier in II. des vorigen §. gefundenen Gleichungen durch Multiplication, ſo iſt:

$$I^4 = SABC \cdot \frac{\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho'''}{16}.$$ Nun iſt aber

$SABC = 16I^2$, alſo

$$I^2 = \varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho''' \text{ oder}$$

$$I = \sqrt{\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho'''}.$$

2) Für die Radien ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' erhält man die Gleichungen:

$$\varrho = \frac{2I}{a + b + c} \text{ oder } \frac{1}{\varrho} = + \frac{a}{2I} + \frac{b}{2I} + \frac{c}{2I},$$

$$\varrho' = \frac{2I}{-a + b + c} \text{ " } \frac{1}{\varrho'} = - \frac{a}{2I} + \frac{b}{2I} + \frac{c}{2I},$$

$$\varrho'' = \frac{2I}{a - b + c} \text{ " } \frac{1}{\varrho''} = + \frac{a}{2I} - \frac{b}{2I} + \frac{c}{2I},$$

$$\varrho''' = \frac{2I}{a + b - c} \text{ " } \frac{1}{\varrho'''} = + \frac{a}{2I} + \frac{b}{2I} - \frac{c}{2I}.$$

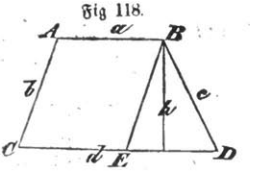
Addirt man die drei letztern Gleichungen, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{\varrho'''}.$$

§. 173. Aufgabe.

Der Inhalt I eines Trapezes ſoll aus den vier Seiten a, b, c, d berechnet werden.

Fig 118.



Auflöſung. Zieht man BE = b parallel AC, ferner die Höhe h, ſo iſt im △ BED:

$$BE = b,\ BD = c,\ ED = d - a,$$

$$\text{daher } \triangle BED = \tfrac{1}{4}\sqrt{SABC},$$

$$\text{wo } S = b + c + (d - a) \text{ iſt,}$$

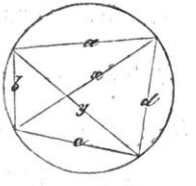
und $h = \dfrac{1}{2(d-a)} \cdot \sqrt{SABC}$. Nun iſt $I = \dfrac{a+d}{2} \cdot h$, alſo, wenn man den für h gefundenen Werth einſetzt, $I = \dfrac{d+a}{4(d-a)} \cdot \sqrt{SABC} =$

$$= \frac{d+a}{4(d-a)} \cdot \sqrt{(-a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

§. 174. Aufgaben.

I. Aus den Seiten a, b, c, d eines eingeſchriebenen Vierecks ſollen die beiden Diagonalen x und y berechnet werden.

Fig. 119.



Auflöſ. Es iſt $xy = ac + bd$,

ferner $x : y = (ad + cb) : (ba + dc)$ (§. 156)

$$\text{daher } x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+cb)}{ba+dc}},$$

$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ba+dc)}{ad+cb}}.$$

II. Aus den Seiten a, b, c, d des obigen Vierecks ſoll der Inhalt I deſſelben berechnet werden.

Auflöſung. Bezeichnet man den Inhalt des einen Dreiecks, deſſen Seiten a, b, x ſind, durch I', den des andern (c, d, x) durch I'', ferner die im Dreiecke (a, b, x) auf b errichtete Höhe durch h, ſo iſt

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2b}\right)^2 \text{ (§. 118) oder}$$

$$4b^2h^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2 \text{ oder}$$

$$(4I')^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2.$$

Nun ist $a^2+b^2-x^2 = a^2+b^2-\frac{(ac+bd)\,(ad+cb)}{ba+dc}$ (nach I.),

$$= \frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ba+dc}, \text{ daher}$$

$$(4I')^2 = (2ab)^2 - \left[\frac{ab\,(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ba+dc}\right]^2 =$$

$$= a^2b^2\left[2^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ba+dc}\right)^2\right] =$$

$$= a^2b^2\left[\left(2+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ba+dc}\right)\cdot\left(2-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ba+dc}\right)\right] =$$

$$= a^2b^2\cdot\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{ba+dc}\cdot\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{ba+dc}, \text{ oder}$$

$$I' = \frac{ab}{4(ba+dc)}\sqrt{ABCD}, \text{ wenn } A = -a+b+c+d,$$

$B = a-b+c+d$, $C = a+b-c+d$, $D = a+b+c-d$ ist.

Ebenso erhält man $I'' = \frac{cd}{4(ba+dc)}\sqrt{ABCD}$.

Es ist daher $I = I' + I'' = \frac{1}{4}\sqrt{ABCD}$.

III. Es soll für obiges Viereck der Radius r des umschriebenen Kreises berechnet werden.

Auflösung. Es ist $I' = \frac{abx}{4r}$ und $I'' = \frac{cdx}{4r}$ (§. 171), also $I'+I'' = I = \frac{x\cdot(ab+cd)}{4r}$. Setzt man für x den in I. gefundenen Werth ein, so ist $I = \frac{\sqrt{(ac+bd)\,(ad+cb)\,(ab+cd)}}{4r}$, daher:

$$r = \sqrt{(ac+bd)\,(ad+cb)\,(ab+cd) : ABCD}$$ (siehe II.).

§. 175. Aufgaben.

I. Es soll bestimmt werden, welches Dreieck den größten Inhalt hat unter denen, die denselben Umfang und dieselbe Grundlinie haben.

Auflösung. Es sei die Grundlinie $= a$, die Summe der beiden andern Seiten $= 2b$, so lassen sich diese Seiten einzeln ausdrücken durch $b+x$ und $b-x$. Nun ist nach I. des §. 170

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+2b)\,(2b-a)\,(a+2x)\,(a-2x)} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+2b)\,(2b-a)\,(a^2-4x^2)}.$$

In diesem Ausdrucke hat bloß der Faktor $(a^2 - 4x^2)$ einen veränderlichen Werth und zwar wird derselbe am größten, wenn x^2 am kleinsten, d. h. gleich Null wird. Ist aber $x = o$, so ist das Dreieck gleichschenklig.

II. Es soll bestimmt werden, welches Dreieck den größten Inhalt hat unter allen Dreiecken von gleichem Umfange.

Auflösung. Ist der Umfang $= 3a$, so kann man, da nach I. das Dreieck gleichschenklig sein muß, die einzelnen Seiten bezeichnen durch $a + x$, $a - \frac{x}{2}$, $a - \frac{x}{2}$. Es ist alsdann:

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a(a+x)(a+x)(a-2x)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a[a^3 - x^2(3a+2x)]}.$$

Dieser Ausdruck hat seinen größten Werth, wenn $x = o$, also das Dreieck gleichseitig ist.

Es ergiebt sich zugleich, daß unter allen Dreiecken von gleichem Inhalte das gleichseitige den kleinsten Umfang haben muß.

III. Es soll bestimmt werden, welches Rechteck den größten Inhalt hat unter allen Rechtecken von gleichem Umfange.

Auflösung. Ist der halbe Umfang $= 2a$, so sind die anliegenden Seiten auszudrücken durch $(a + x)$ und $(a - x)$.

Alsdann ist der Inhalt $= (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$. Dieser Werth ist am größten, wenn $x = o$, also das Rechteck ein Quadrat ist.

§. 176. Aufgaben.

I. Es soll bestimmt werden, wie sich der Inhalt D eines gleichseitigen Dreiecks zum Inhalte Q eines Quadrates von gleichem Umfange verhält.

Auflösung. Ist der Umfang einer jeden dieser Figuren $= 3a$, so ist der Inhalt des Dreiecks $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (siehe I. §. 170), der des Quadrates $= \frac{9a^2}{16}$. Es ist also $D : Q = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} : \frac{9a^2}{16} = \sqrt{3} : \frac{9}{4} =$

$= 1 : \frac{3}{4}\sqrt{3} = 1 : 1{,}299\ldots$

II. Es soll bestimmt werden, wie sich der Inhalt Q eines Quadrates zum Inhalte K eines Kreises von gleichem Umfange verhält.

Auflösung. Ist der Umfang jeder Figur $= a$, so ist $Q = \frac{a^2}{16}$,

$K = \frac{a^2}{4\pi}$. Es ist also $Q : K = \frac{a^2}{16} : \frac{a^2}{4\pi} = 3{,}14159\ldots : 4 =$
$= 1 : 1{,}273\ldots$

Anm. Die Aufgaben der §§. 175 und 176 lassen sich leicht auch auf rein geometrischem Wege lösen. In diesem Falle läßt sich auch für die Vielecke die Vergleichung des Umfanges und Inhaltes bequem ausführen.

B. Geometrische Construction algebraischer Formeln.

§. 177. Erklärung.

In den bisherigen Capiteln wurden unbekannte geometrische Größen entweder direkt durch eine Construction bestimmt, oder die Maaßzahlen derselben wurden durch eine Rechnung gefunden.

Bei Anwendung dieses letzteren Verfahrens betrachtet man die geometrischen Größen als benannte Zahlen, bringt die Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Größen in die Form einer Gleichung und löst dieselbe nach den in der Arithmetik gegebenen Regeln auf. Man gelangt daher in vielen Fällen schneller zum Resultate, als bei einem rein geometrischen Verfahren und hat außerdem den Vortheil, daß das algebraische Resultat zugleich bestimmt, ob die Aufgabe bloß eine, oder mehrere Lösungen zuläßt, während die geometrische Construction zunächst bloß einen möglichen Fall behandelt.

Das algebraische Verfahren wird ferner noch dadurch wichtig, daß man aus der Form des gefundenen Resultats erkennen kann, auf welchem Wege sich die geometrische Construction ausführen läßt.

§. 178. Erklärung.

Bezeichnet man jede gerade Linie durch einen einfachen Buchstaben (a, b, c, d ...), so kann die Maaßzahl x einer unbekannten geraden Linie in folgenden Formen gefunden werden:

1) $x = a + b$, wenn die unbekannte Linie gleich der Summe zweier bekannten Linien ist (deren Maaßzahlen a und b sind),

2) $x = a - b$, wenn sie gleich der Differenz zweier bekannten Linien ist,

3) $x = \frac{a \cdot b}{c}$, wenn sie die vierte Proportionale zu drei bekannten Linien ist,

4) $x = \sqrt{a \cdot b}$, wenn sie die mittlere Proportionale zu zwei bekannten Linien ist,

5) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, wenn sie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von bekannten Catheten ist,

6) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, wenn sie die zweite Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks von der Hypotenuse a und der einen Cathete b ist.

In diesen sechs Fällen ist also die Form der Maaßzahl durch die Art der Construction genau bestimmt, und hat umgekehrt die Maaßzahl einer Linie eine der angegebenen Formen, so ist dadurch ihre Construction bestimmt, weil zwei gerade Linien von gleichen Maaßzahlen einander gleich sind. Findet man also z. B. $x = \frac{a \cdot b}{c}$, so construirt man die unbekannte Linie als vierte Proportionale zu dreien durch ihre Maaßzahlen a, b, c gegebenen Linien.

§. 179. Zusatz.

Wird die Maaßzahl x einer unbekannten geraden Linie in zusammengesetzterer Form gefunden, so läßt sich dieselbe ebenfalls construiren, sobald man die zusammengesetzte Form auf eine dieser einfacheren zurückführen kann. Ist z. B. $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$, so folgt $x = \frac{m \cdot c}{e}$, wo m die vierte Proportionale zu a, b, d ist; $\frac{m \cdot c}{e}$ ist aber die vierte Proportionale zu m, c, e. Ist $x = \frac{(a + \sqrt{b \cdot c}) \cdot d}{e}$, so ist $\sqrt{b \cdot c}$ die mittlere Proportionale m zu b und c; $\frac{(a + m) \cdot d}{e}$ ist aber die mittlere Proportionale zu $(a + m)$, d, e.

§. 180. Erklärung.

Das Verhältniß zweier Linien liefert stets eine unbenannte Zahl, nie eine Linie, ferner das Produkt zweier Linien eine Fläche.

Es bedeutet daher:

1) $\frac{a}{b}$ eine unbenannte Zahl,

2) $a \cdot b$ den Inhalt eines Rechtecks aus den Seiten a und b,

3) a^2 den Inhalt eines Quadrates über der Seite a.

§. 181. Zusatz.

Befolgt man genau die in den vorigen §§. gegebenen Bestimmungen, daß man einen einfachen Buchstaben nur zur Bezeichnung einer

Linie, das Produkt zweier Buchſtaben nur zur Bezeichnung einer Fläche, und den Quotienten zweier Buchſtaben nur zur Bezeichnung einer unbenannten Zahl anwendet, ſo muß umgekehrt der für eine unbekannte Linie gefundene Ausdruck ſich auf einen einfachen Buchſtaben (auf einen Ausdruck von der erſten Dimenſion), der für eine Fläche gefundene Ausdruck auf das Produkt zweier Buchſtaben (auf einen Ausdruck von der zweiten Dimenſion) reduciren laſſen u. ſ. w. Hieraus ergiebt ſich ferner, daß in einer Gleichung alle Glieder von derſelben Dimenſion ſein müſſen. So iſt z. B. die Gleichung $x = \frac{bc + d}{a}$ widerſinnig, weil $ax - bc$ nicht gleich d ſein kann (die Differenz zweier Flächen nicht gleich einer Linie), oder es iſt d eine fehlerhafte Bezeichnung für eine Fläche.

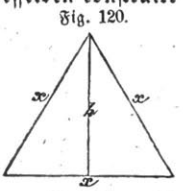
Anm. 1. Jede krumme Linie kann man ſich aus unendlich vielen kleinen geraden Linien zuſammengeſetzt denken. Sie muß deßhalb ebenfalls durch einen einfachen Buchſtaben bezeichnet werden.

Anm. 2. Für keine der in der Planimetrie vorkommenden Größen erhält man einen Ausdruck von drei Dimenſionen. Die Gleichung $x = a \cdot b : c$ gehört daher nicht mehr der Planimetrie an, wohl aber z. B. $x^2 = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f}$ und $x^2 = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$.

§. 182. Aufgaben.

I. Aus der Höhe h eines gleichſeitigen Dreiecks ſoll die Seite x deſſelben conſtruirt werden.

Fig. 120.

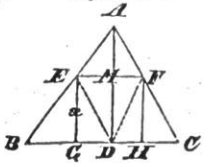


Auflöſung. Nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze iſt: $h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$, daher $x^2 = \frac{4h^2}{3}$ und $x = \sqrt{h \cdot \frac{4h}{3}}$.

Conſtruction. Man verlängere h um den dritten Theil und ſchlage über der ſo entſtandenen Linie als Durchmeſſer einen Kreis und ziehe (nach §. 111) die mittlere Proportionale zu h und $\frac{4h}{3}$.

II. Es ſoll die Seite x eines Quadrates gefunden werden, deſſen Ecken in den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ſo liegen, daß auf die Seite a zwei Ecken fallen.

Fig. 121.



Auflöſung. Es ſei EFGH das geſuchte Quadrat, BC = a, AD = h, ſo iſt

$$\triangle ABC = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Ferner ist $\triangle ABC = \triangle AED + \triangle AFD + \triangle EBD + \triangle FCD$ oder

$$\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AD}{2}(EM + MF) + \frac{EG}{2}(BD + DC)$$

$$\text{oder } \frac{a \cdot h}{2} = \frac{h \cdot x}{2} + \frac{a \cdot x}{2};$$

$$\text{daher } x = \frac{a \cdot h}{a + h}.$$

Construction. Man verlängere BC über C hinaus um die Länge h bis N, ziehe AN, ferner von C aus eine Parallele zu AN. Der Punkt, in welchem AB von diesen Parallelen geschnitten wird, ist alsdann die eine Quadratecke E. Der Beweis ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABN und EBC.

III. Es soll ein Rechteck von vorgeschriebenem Umfange und Inhalte construirt werden.

Auflösung 1. Ist der halbe Umfang $= a$, der Inhalt $= m^2$, und sind die beiden anliegenden Seiten des Rechtecks durch x und y bezeichnet, so ist $x + y = a$, $x \cdot y = m^2$. Hieraus ergiebt sich:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4m^2}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4m^2}}{2}.$$

Construction. Da m die Seite eines Quadrates ist, welches denselben Inhalt wie obiges Rechteck hat, so läßt sich $\sqrt{a^2 - 4m^2}$ als zweite Cathete zu der Hypotenuse a und der einen Cathete 2m construiren. Die weitere Construction ist einfach.

Auflösung 2. Aus $x + y = a$, $x \cdot y = m^2$ folgt

$$x \cdot (a - x) = m^2.$$

Schlägt man über a als Durchmesser einen Halbkreis, zieht eine mit a parallele Sehne, deren Abstand vom Durchmesser $= m$ ist, und zieht von einem Endpunkte derselben eine Senkrechte nach dem Durchmesser, so wird derselbe in zwei Theile x und $(a - x)$ getheilt, welche der Bedingung genügen, daß $x \cdot (a - x) = m^2$ ist.

IV. Es soll ein Rechteck von vorgeschriebenem Inhalte m^2 und vorgeschriebener Differenz d der anliegenden Seiten construirt werden.

Auflösung 1. Ist die eine Seite $= x$, so ist die andere $= x + d$. Da nun $x \cdot (x + d) = m^2$ ist, so folgt:

$$x = \frac{-d + \sqrt{4m^2 + d^2}}{2}, \quad x + d = \frac{d + \sqrt{4m^2 + d^2}}{2}.$$

Die Construction ähnlich, wie bei III. (Auflösung 1.)

Auflösung 2. Der Ausdruck $x \cdot (x + d) = m^2$ läßt sich folgendermaßen construiren. Man zeichne zwei concentrische Kreise, so daß jede vom größern nach dem kleinern gezogene Tangente $= m$ werde, lege in den kleinern eine Sehne $= d$, so ist die Verlängerung derselben, welche zwischen beiden Peripherieen liegt, $= x$. Der Beweis ist einfach.

V. Es soll die Seite x eines Quadrates aus der Differenz zwischen der Diagonale und der Seite construirt werden.

Auflösung. Ist die Seite $= x$, so ist die Diagonale $= x + d$. Nun ist $(x + d)^2 = x^2 + x^2$ oder $x^2 + 2dx + d^2 = 2x^2$, daher $x = d + \sqrt{2d^2}$.

Construction. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Catheten jede gleich d sind, und verlängere die Hypotenuse desselben um das Stück d. Die so erhaltene Linie ist die Seite des gesuchten Quadrates.

VI. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse c und der Summe s der beiden Catheten construirt werden.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden Catheten durch x und y, so ist: $x + y = s$, $x^2 + y^2 = c^2$. Hieraus erhält man:

$$x = \frac{s + \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}; \quad y = \frac{s - \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Die Construction dieser Ausdrücke ist einfach.

VII. Es soll ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus dem Umfange u construirt werden.

Auflösung. Bezeichnet man die Hypotenuse durch y, jede Cathete durch x, so ist: $y + 2x = u$, $y^2 = 2x^2$. Hieraus ergiebt sich:

$$2x^2 = (u - 2x)^2 = u^2 - 4ux + 4x^2$$

und hieraus: $x = u - \sqrt{\frac{u^2}{2}}$; $y = -u + \sqrt{2u^2}$.

VIII. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, wenn die Differenz d der anliegenden Seiten und der Radius r des umschriebenen Kreises bekannt sind.

Auflösung. Bezeichnet man die Seiten durch x und y, so ist: $x = y + d$, $x^2 + y^2 = 4r^2$. Hieraus ergiebt sich:

$$x = \frac{d + \sqrt{8r^2 - d^2}}{2}; \quad y = \frac{-d + \sqrt{8r^2 - d^2}}{2}.$$

Die Constructionen zu VII. und VIII. sind einfach.

IX. Es ſoll ein Rechteck gezeichnet werden, wenn der Radius r des umſchriebenen Kreiſes bekannt iſt und wenn ferner das Quadrat der einen Seite doppelt ſo groß iſt als das Quadrat der andern.

Auflöſung. Bezeichnet man die Seiten durch x und y, ſo iſt: $x^2 = 2y^2$, $x^2 + y^2 = 4r^2$ oder $3y^2 = 4r^2$. Hieraus folgt

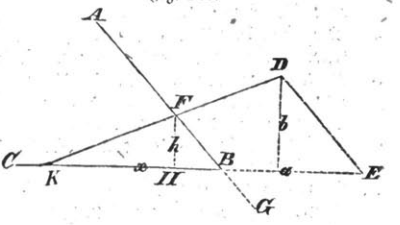
$$y = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2r}{3} \cdot 2r}, \quad x = \sqrt{\frac{4r}{3} \cdot 2r}.$$

Man theilt alſo den Durchmeſſer 2r in drei gleiche Theile und errichtet auf einem dieſer Theilpunkte eine Senkrechte. Der Endpunkt dieſer Senkrechten in der Peripherie beſtimmt die eine Ecke des Rechtecks. Die gegenüberliegende Ecke findet man, wenn man vom zweiten Theilpunkte eine Senkrechte nach der entgegengeſetzten Seite zieht.

Anm. Dieſe Conſtruction wird angewendet, um aus einem Baumſtamme einen Balken von größter Tragkraft zu ſchneiden.

X. Durch die Schenkel eines gegebenen Winkels ABC ſoll von einem außerhalb des Winkels gegebenen Punkte D eine Linie DK ſo gezogen werden, daß das abgeſchnittene Dreieck FKB einen beſtimmten Inhalt m^2 erhält.

Fig. 122.



Auflöſung. Zieht man aus D die Linie DE ∥ AB, ſo iſt BE = a bekannt, ebenſo die Höhe b. Bezeichnet man ferner die Grundlinie KB des △ FKB durch x, die zugehörige Höhe FH durch h, ſo iſt $x \cdot h = m^2$. Ferner iſt △ KBF ∼ △ KED und daher: $x : h = (x + a) : b$.

Da $h = \frac{m^2}{x}$ iſt, ſo geht dieſe Proportion über in:

$$x : \frac{m^2}{x} = (x + a) : b \quad \text{oder} \quad x^2 b = m^2 (x + a).$$

Setzt man nun $m^2 = b \cdot n$, wo n die dritte Proportionale zu b und zu der mittlern m iſt, ſo folgt: $x^2 = n(x + a) = nx + na$, daher

$$x = \frac{-n \mp \sqrt{4na + n^2}}{2}.$$

Die Conſtruction iſt einfach. Das negative Zeichen der Wurzel liefert den Werth $-\left(\frac{n + \sqrt{4na + n^2}}{2}\right)$. Die Bedeutung dieſes

negativen Ausdrucks ist die, daß man $\left(\frac{n + \sqrt{4na + n^2}}{2}\right)$ in entgegengesetzter Richtung auf BE, also das verlangte Dreieck von dem Scheitelwinkel EBG abschneiden kann.

XI. Es soll eine Linie nach stetiger Proportion geschnitten werden.

Auflösung. Ist die Linie $= a$, so ist: $a : x = x : (a - x)$ oder $x^2 = a^2 - ax$, $x = -a \mp \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Ueber die Construction dieses Ausdrucks vergleiche §. 153.

Aufgaben.

1) Man soll aus den drei Ecken eines Dreiecks, als den gegebenen Mittelpunkten, drei Kreise beschreiben, von welchen jeder die beiden übrigen berührt.
2) Man soll aus den drei Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkten drei Kreise so beschreiben, daß zwei sich von außen berühren und in dem dritten Kreise liegen und von diesem berührt werden.
3) Man soll durch zwei Dreiecksseiten a und b eine der dritten Seite c parallele Linie so legen, daß das oberhalb der Parallelen abgeschnittene Stück von a so groß wird wie das unterhalb der Parallelen abgeschnittene Stück von b.
4) Dieselbe Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß die beiden abgeschnittenen Stücke sich verhalten sollen wie m zu n.
5) Man soll in einem gleichschenkligen Dreiecke zur Grundlinie c desselben eine Parallele x ziehen, die dem Stücke jedes Schenkels gleich ist, welches zwischen der Grundlinie und der gezogenen Parallele liegt.
6) Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß die Parallele durch die Verlängerungen der Schenkel geht.
7) Dieselben Bedingungen, wie in 5), aber x soll so groß sein wie die Summe der erwähnten Stücke.
8) Dieselben Bedingungen, wie in 6), aber x soll so groß sein wie die Summe der erwähnten Stücke.*)
9) Die Aufgabe (7) für ein ungleichseitiges Dreieck.
10) Die Aufgabe (8) für ein ungleichseitiges Dreieck.
11) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Cathete b und aus der Summe a der andern Cathete x und der Hypotenuse y zu zeichnen.
12) Eine gegebene Linie a um ein Stück x so zu verlängern, daß die Summe aus dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie mmal so groß wird, als das Quadrat der gegebenen Linie.
13) Ein Quadrat aus der Summe s der Diagonale x und der Seite y zu zeichnen.

*) Mit Hülfe von 7) und 8) löst man auch die Aufgaben, in oder auf einem gegebenen Kreise drei gleich große Kreise zu beschreiben, welche den gegebenen und sich selbst gegenseitig berühren.

14) Ein Rechteck aus der Diagonale a und der Differenz d der beiden Seiten x und y zu zeichnen.
15) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, wenn die Differenz d der Seite x und der Höhe y gegeben ist.
16) Ein gleichschenkliges Dreieck aus der Seite a und der Summe b der Grundlinie 2x und der Höhe y zu zeichnen.
17) Ein Rechteck aus der Diagonale d und dem Inhalte $a^2 (= x \cdot y)$ zu zeichnen.
18) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck einzuzeichnen, dessen Seiten x und y sich verhalten wie m zu n, und zwar so, daß die Seite x vollständig in der Dreiecksseite a liegt.
19) In einen Halbkreis ein Quadrat einzuzeichnen.
20) In einen Halbkreis ein Rechteck von gegebenem Inhalte m^2 einzuzeichnen.
21) Eine gegebene Linie a in zwei Theile zu theilen, so daß das Quadrat über dem einen Theile gleich dem gleichschenkligen Dreiecke über dem andern Theile wird.
22) Ein Trapez durch eine Linie x zu halbiren, welche den parallelen Seiten a und b (wobei $a < b$) parallel geht.
23) Man soll in ein gegebenes Dreieck ein anderes von gegebenem Inhalte f eintragen, so daß die Ecken des letzteren in die Seiten des ersteren fallen, und die Abschnitte jeder Seite des ersteren einander proportional sind.
24) Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt gegeben. Man soll durch denselben eine Sehne von gegebener Länge 2c ziehen.
25) Von einem Dreiecke sind zwei Seiten a und b gegeben und die Linie d, welche den von denselben eingeschlossenen Winkel halbirt. Man soll hieraus die dritte Seite x finden.

Auflösungen.

1) Sind a, b, c die Dreiecksseiten, x, y, z die Radien der drei Kreise, so daß der zu x gehörige Kreis der Seite a gegenüberliegt, so ist:

$$x = \frac{-a+b+c}{2};\quad y = \frac{a-b+c}{2};\quad z = \frac{a+b-c}{2};$$

2) Ist x der Radius des größeren Kreises, so ist $x = \frac{a+b+c}{2}$. Die andern Radien wie bei 1).

3) $x = \frac{ab}{a+b}$; 4) $x = \frac{mab}{mb+na}$; $y = \frac{nab}{mb+na}$;

5) Ist der Schenkel $= a$, so ist $x = \frac{ac}{a+c}$; 6) $x = \frac{ac}{a-c}$;

7) $x = \frac{2ac}{2a+c}$; 8) $x = \frac{2ac}{2a-c}$; 9) $x = \frac{(a+b)c}{a+b+c}$;

10) $x = \frac{(a+b)c}{a+b-c}$; 11) $x = \frac{a^2-b^2}{2a}$; $y = \frac{a^2+b^2}{2a}$;

12) $x = \frac{-a+\sqrt{2ma^2-a^2}}{2}$;

13) $y = -s+\sqrt{2s^2}$; $x = 2s-\sqrt{2s^2}$;

14) $x = \frac{d + \sqrt{2a^2 - d^2}}{2}$; $y = \frac{-d + \sqrt{2a^2 - d^2}}{2}$;

15) $x = 4d + 2\sqrt{3d^2}$;

16) $x = \frac{2b \mp \sqrt{5a^2 - b^2}}{5}$; $y = \frac{b \pm 2\sqrt{5a^2 - b^2}}{5}$;

17) $x = \sqrt{\frac{d^2 + \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$;

$y = \sqrt{\frac{d^2 - \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$;

18) Ist die zu a gehörige Höhe $= h$, so ist $x = \frac{mah}{mh + na}$; $y = \frac{nah}{mh + na}$;

19) Ist x die Quadratseite, r der Radius, so ist $x = \sqrt{\frac{4r^2}{5}}$;

20) Ist x die im Durchmesser liegende Grundlinie, y die Höhe, so ist:

$x = \sqrt{r^2 + m^2} - \sqrt{r^2 - m^2}$; $y = \frac{\sqrt{r^2 + m^2} + \sqrt{r^2 - m^2}}{2}$;

21) Ist die Dreiecksseite $= x$, so ist $x = \frac{2a^2}{2a + \sqrt{a\sqrt{3a^2}}}$;

22) Ist $x - a = z$, so ist $z = -a + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, also

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2}$;

23) Ist c die eine Seite des gegebenen Dreiecks, h die zugehörige Höhe, I der Inhalt, x der auf c durch das andere Dreieck gebildete Abschnitt, und wird $\frac{I - f}{3} = m^2$ gesetzt, ferner $\frac{2cm^2}{h} = v^2$, so ist

$x = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4v^2}}{2}$;

24) Bezeichnet man die Theile, in welche ein durch diesen Punkt gehender Durchmesser getheilt wird, durch a und b, so erhält man für die beiden Theile der Sehne: $x = c + \sqrt{c^2 - ab}$; $y = c - \sqrt{c^2 - ab}$;

25) $x = \frac{a + b}{a}\sqrt{\frac{a(ab - d^2)}{b}}$.

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbſt-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,
Lehrer am Gymnaſium zu Parchim.

Stereometrie und ſphäriſche Trigonometrie.

Deſſau, 1862.
Aue'ſche Buchhandlung.
(Moritz Fels.)

Vorwort.

Der vorliegende vierte Band, mit welchem der Verfasser sein Lehrbuch der Mathematik abschließt, enthält die Stereometrie und sphärische Trigonometrie, setzt also die Kenntniß der Planimetrie und ebenen Trigonometrie voraus. Da indessen stereometrische Aufgaben nur in wenigen Fällen mit Hülfe der Trigonometrie gelöst worden sind, und zwar nur dann, wenn eine Entwicklung auf anderem Wege ihrer Unbequemlichkeit wegen sich für den Unterricht nicht zu eignen schien, so ist dieser Band, bei Ausschluß der sphärischen Trigonometrie, auch als unmittelbare Fortsetzung der Planimetrie zu benutzen, wobei die erwähnten Aufgaben ohne weitere Störung des Zusammenhanges vorläufig überschlagen werden können.

Die in den früheren Bänden gegebenen einleitenden Bemerkungen enthalten bereits im Wesentlichen eine Darlegung des Planes, welcher dem Lehrbuche zu Grunde liegt, so daß nur in Bezug auf diesen vierten Band noch Einiges hinzuzufügen ist.

Die Capiteleintheilung ist fast unmittelbar durch den zu behandelnden Stoff gegeben und ist deshalb in den meisten Lehrbüchern die nämliche. Die weitere Bearbeitung kann indessen eine sehr verschiedene sein. Will man der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie eine besondere Schwierigkeit zugestehen, so beruht dies hauptsächlich darauf, daß die Verhältnisse im Raume verwickelter sind, als in der Ebene, und daß außerdem die Figuren nur einen schwachen Anhalt bieten, wenn nicht die Phantasie im Stande ist, aus dem perspectivischen Bilde eines Körpers sich dessen wahre Form herzustellen. Zwar ist Letzteres eine Aufgabe, in der sich unbewußt ein Jeder von Jugend auf übt, aber die so gewonnene Fertigkeit beschränkt sich meistens auf

die einfachsten Fälle. Der Verfasser hat daher gesucht, alle Betrachtungen, bei denen drei Dimensionen zu berücksichtigen waren, möglichst eingehend zu halten, während es ihm hingegen ausreichend erschien, bei Aufgaben planimetrischer Natur statt ausführlicher Entwicklungen nur Andeutungen zu geben. Eine eingehendere Behandlung des Körperlichen ist aber nicht blos durch die größere Schwierigkeit des Stoffes bedingt, es soll dadurch auch ein Hauptzweck des stereometrischen Unterrichts erreicht werden, die klare Anschauung räumlicher Beziehungen. Dieselbe ist oft in weit geringerem Grade vorhanden, als man anzunehmen geneigt ist. Der Anfänger wird noch gar zu leicht in einem sphärischen Dreiecke ein ebenes erblicken, dessen Winkelsumme zwei Rechte beträgt, und Mancher, der in der Berechnung sphärischer Dreiecke eine hinreichende Fertigkeit besitzt, ist nicht im Stande, sich ein sphärisches oder körperliches Dreieck vorzustellen, welches einen spitzen, einen rechten und einen stumpfen Winkel enthält. — Durch das Gesagte ist im Allgemeinen der Plan angedeutet, den der Verfasser vor Augen hatte, wie es auch die Erklärung giebt für manche anscheinend zu große Ausführlichkeit.

In Betreff des Einzelnen ist noch Folgendes zu bemerken. Nachdem bereits von congruenten körperlichen Ecken gesprochen worden ist, folgt nachträglich noch einmal die Definition der Congruenz; es ist jedoch leicht zu sehen, daß es nur in Rücksicht auf das Spätere geschehen ist. — Der Begriff des unendlich Kleinen hat nicht überall vermieden werden können, ist aber nicht in solchen Fällen benutzt worden, wo andere Wege offen standen. Obwohl also z. B. die Untersuchung über die Gleichheit pyramidaler Körper eigentlich nur eine Umschreibung des Cavalieri'schen Grundsatzes ist, und dieser daher consequenter Weise hätte an die Spitze des Capitels über Inhaltsbestimmungen der Körper gesetzt werden können, so hat es der Verfasser doch vorgezogen, die Gleichheit prismatischer Körper streng aus dem Begriffe der Congruenz abzuleiten.

Parchim, März 1862.

H. Gerlach.

Inhalt.

Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Seite

Erstes Capitel. Von der Lage der Linien und Ebenen 1

Zweites Capitel. Von den körperlichen Ecken 11

Drittes Capitel. Von den vollständig begränzten Körpern 15

A. Das Prisma 16

B. Die Pyramide 19

C. Der Cylinder 21

D. Der Kegel 24

E. Die regulären Polyeder 26

F. Die Kugel 31

Anhang zu dem Bisherigen. Von den Projectionen 41

Viertes Capitel. Von der Ausmessung der Körper 47

A. Bestimmung der Oberfläche 47

B. Bestimmung des Inhalts 53

Fünftes Capitel. Sphärische Trigonometrie 69

Berichtigungen.

Seite 16 Zeile 16 und 20 lies Parallelepipedum statt Parallelipipedum.
Seite 36 Zeile 6 lies $xa = xb = r$ statt $xa = xb = v$; ferner $< mcx = \frac{1}{2}v$ statt $< mcx = \frac{1}{2}r$.

Stereometrie

und

sphärische Trigonometrie.

Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von der Lage der Linien und Ebenen.

§. 1. Erklärung.

Eine Fläche heißt Ebene, wenn die geraden Verbindungslinien je zweier Punkte derselben vollständig mit der Fläche zusammenfallen. Auf einer unbegränzten Ebene läßt sich daher eine gerade Linie nach jeder Richtung hin so fortbewegt denken, daß sie mit allen ihren Punkten immer in der Ebene bleibt, und umgekehrt entsteht eine Ebene, wenn man auf den Schenkeln eines Winkels eine gerade Linie so fortschiebt, daß sie stets beide Schenkel schneidet. Eine Ebene ist also ihrer Lage nach bestimmt durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte. Sind mehr als drei Punkte gegeben, so liegen sie nicht nothwendig in einer Ebene. Sind nur zwei Punkte gegeben, so können dieselben in unendlich vielen Ebenen liegen; alle diese Ebenen haben dann die gerade Verbindungslinie der zwei Punkte gemeinschaftlich und werden ihrer Lage nach erhalten, wenn man eine derselben um diese Linie gedrehet denkt.

§. 2. Erklärung.

Hat eine Linie*) zwei Punkte mit einer Ebene gemeinschaftlich, so fällt sie vollständig mit derselben zusammen. Die Ebene geht alsdann

*) Unter der einfachen Bezeichnung Linie ist von jetzt an stets eine gerade Linie zu verstehen.

durch die Linie oder ist durch dieselbe hindurchgelegt. Ist nur ein gemeinschaftlicher Punkt vorhanden, so wird die Ebene in diesem Punkte von der Linie getroffen, oder geschnitten, je nachdem die Linie von der Ebene begränzt wird, oder nicht; ist kein Punkt beiden gemeinschaftlich, auch wenn sie unbegränzt gedacht werden, so ist die Linie der Ebene parallel.

Haben zwei Linien auch bei beliebiger Verlängerung keinen Punkt gemeinschaftlich, so heißen sie nur dann parallel, wenn sie zugleich in derselben Ebene liegen, und heißen windschief, wenn sich keine Ebene durch beide Linien hindurchlegen läßt, also in den Richtungen überhaupt keine Uebereinstimmung stattfindet. Durch zwei parallele Linien ist daher eine Ebene ebenfalls bestimmt, und durch einen gegebenen Punkt kann nur eine einzige Linie parallel mit einer gegebenen gezogen werden.

Haben zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemeinschaftlich, so fallen sie vollständig zusammen; haben sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so schneiden sie sich in der geraden Verbindungslinie dieser Punkte, welche in beiden Ebenen liegen muß; ist kein Punkt beiden gemeinschaftlich, so sind sie parallel.

§. 3. Lehrsätze.

1) Eine Linie a ist parallel mit einer Ebene A, wenn sie mit einer einzigen in dieser Ebene liegenden Linie b parallel ist.

2) Ist eine Linie a parallel mit einer Ebene A, und legt man durch a hindurch beliebig viele Ebenen, von welchen A in den Linien b, c, d u. s. w. geschnitten wird, so sind diese Linien b, c, d u. s. w. mit a und auch unter einander parallel.

3) Sind zwei Linien einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

Beweis zu 1). Legt man durch die parallelen Linien a und b eine Ebene, so müßte ein Punkt, den a und A gemeinschaftlich hätten, in dieser Ebene liegen. Alsdann wäre er aber ein gemeinschaftlicher Punkt für die Linien a und b, und dies ist nicht möglich, da a ∥ b ist.

Beweis zu 2). Die Linien b und c u. s. w. sind parallel mit a, weil sie mit a keinen Punkt gemeinschaftlich haben können, und weil außerdem jede dieser Linien mit a in einer Ebene liegt. Sie sind aber auch untereinander parallel, weil sie in derselben Ebene A liegen, und weil die schneidenden Ebenen, in denen sie ebenfalls liegen, keinen Punkt außerhalb der Linie a gemeinschaftlich haben können.

Beweis zu 3). Er folgt aus 2). Ist nämlich b ∥ a, und wird c parallel mit b gezogen, so ist auch c ∥ a.

§. 4. Lehrsätze.

1) Zwei Ebenen A und B sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien (a und b) der einen Ebene (A) parallel der anderen Ebene sind.

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien der einen Ebene parallel sind zweien sich schneidenden Linien der anderen.

Beweis zu 1). Gäbe es eine Schneidungslinie c, so müßte diese in beiden Ebenen liegen, dürfte jedoch weder a noch b schneiden. Da sie aber mit a und b in einer Ebene liegen würde, und diese Linien sich schneiden, so könnte sie höchstens der einen parallel sein. Es giebt daher keine Schneidungslinie.

Beweis zu 2). Er folgt unmittelbar aus 1) dieses §. und aus 1) des §. 3.

§. 5. Zusatz.

Aus den §§. 3 und 4 ergeben sich leicht noch folgende Sätze:

1) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann man unendlich viele Linien parallel mit der Ebene ziehen. Diese Linien liegen sämmtlich in einer Ebene, welche ersterer parallel ist.

2) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann man nur eine einzige Ebene parallel mit ersterer legen.

3) Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Linien durchschnitten.

4) Schneiden sich zwei Ebenen, so können nicht zwei sich schneidende Linien der einen parallel mit zwei sich schneidenden Linien der andern sein.

5) Parallele Linien zwischen zwei parallelen Ebenen sind einander gleich.

6) Errichtet man auf einer Ebene A drei und mehr gleich große und parallele Linien, die aber nicht sämmtlich in derselben Ebene liegen, so liegen die andern Endpunkte derselben in einer mit A parallelen Ebene.

7) Werden drei (und mehr) parallele Ebenen von verschiedenen Linien durchschnitten, die in dem nämlichen Punkte x außerhalb der Ebenen zusammentreffen, und werden die von den einzelnen Linien gebildeten Durchschnittspunkte durch a, a′, a″, b, b′, b″, c, c′, c″ u. s. w. bezeichnet, so gelten folgende Proportionen:

1) $xa : aa' : a'a'' = xb : bb' : b'b'' = xc : cc' : c'c''$ u. s. w.

2) $ab : a'b' : a''b'' = bc : b'c' : b''c''$ u. s. w. $= xa : xa' : xa''$.

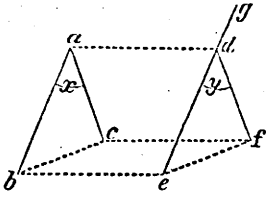
Treffen die Linien nicht in demſelben Punkte x zuſammen, ſo gilt nur die eine Proportion:

$$aa' : a'a'' = bb' : b'b'' = cc' : c'c'' \text{ u.ſ.w.}$$

§. 6. Lehrſatz.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweiſe einander parallel ſind, haben gleiche Größe, oder ſie ſind Supplementwinkel.

Fig. 1.



Beweis. Giebt man (Fig. 1.) den parallelen Schenkeln gleiche Größe, iſt alſo $ab = de$, $ac = df$, ſo ſind abde und acdf Parallelogramme. Daraus folgt $ad = be = cf$, und $ad \parallel be \parallel cf$. Iſt aber $be = cf$ und auch $be \parallel cf$, ſo iſt becf ebenfalls ein Parallelogramm, und es iſt $bc = ef$. Aus $ab = de$, $ac = df$, $bc = ef$ folgt nun, daß $\triangle abc \cong \triangle def$, und daß $x = y$ iſt.

Der zweite Theil der Behauptung ergiebt ſich daraus, daß die Schenkel des Winkels gdf, der das Supplement von y iſt, ebenfalls mit den Schenkeln des Winkels x parallel ſind, wenn dies für die Schenkel des Winkels y vorausgeſetzt iſt.

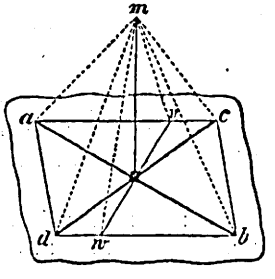
§. 7. Erklärung.

Wird eine Ebene von einer Linie geſchnitten, ſo bildet letztere mit den verſchiedenen Linien, die man in der Ebene nach dem Schneidungspunkte ziehen kann, im Allgemeinen *verſchiedene* Winkel. Den kleinſten dieſer Winkel nennt man den *Neigungswinkel* der Linie. Sind alle dieſe Winkel einander gleich, folglich jeder gleich einem Rechten, ſo ſteht die Linie *ſenkrecht* auf der Ebene.

§. 8. Lehrſatz.

Eine Linie ſteht ſenkrecht auf einer Ebene, wenn ſie auf zwei in der Ebene liegenden Linien ſenkrecht ſteht.

Fig. 2.



Beweis. Es ſtehe (Fig. 2.) mn ſenkrecht auf ab und cd, und es ſei an = nb, cn = nd gemacht, ſo daß acdb ein Parallelogramm iſt. Alsdann iſt $\triangle mnc \cong \triangle mnd$, folglich $mc = md$, ferner $\triangle mna \cong \triangle mnb$, folglich $ma = mb$. Aus $mc = md$, $ma = mb$, $ca = db$ folgt aber, daß $\triangle mca \cong \triangle mdb$ iſt.

Zieht man nun im Parallelogramm acdb die gerade Linie vnw, so ist vn = wn; außerdem ist cv = dw, also auch △ mcv ≅ △ mdw, daher mv = mw. Aus mv = mw, vn = wn, mn = mn ergiebt sich aber, daß △ mnv ≅ △ mnw ist, und daß also mn auf der in der Ebene acdb beliebig gezogenen Linie vnw senkrecht steht.

Anm. Es ergiebt sich ohne Weiteres, daß im Punkte n nur die einzige Linie mn senkrecht auf der Ebene acdb stehen kann.

§. 9. Lehrsätze.

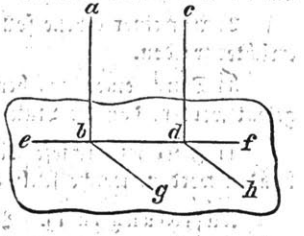
1) Steht von zwei parallelen Linien die eine senkrecht auf einer Ebene, so steht die andere ebenfalls senkrecht auf derselben.

2) Stehen zwei Linien senkrecht auf ein und derselben Ebene, so sind sie einander parallel.

3) Steht eine Linie a senkrecht auf zwei Ebenen, so sind diese einander parallel.

Beweis zu 1). Es stehe ab (Fig. 3.) senkrecht auf der Ebene, und es sei cd ∥ ab. Alsdann ist ∠ abd = ∠ cdf = R. Zieht man nun in derselben Ebene aus b die beliebige Linie bg, ferner dh ∥ bg, so ist (nach §. 6.) ∠ cdh = ∠ abg = R. Es steht also cd senkrecht auf ef und auf dh, folglich senkrecht auf der Ebene.

Fig. 3.



Beweis zu 2). Sind (Fig. 3.) ab und cd zwei auf der Ebene senkrecht stehende Linien, so müßte, wenn cd nicht parallel ab wäre, aus d eine Linie gezogen werden können parallel mit ba, und diese Linie müßte nach 1) im Punkte d ebenfalls senkrecht auf der Ebene stehen. Dies ist aber (§. 8, Anm.) nicht möglich, und es kann daher die aus dem Punkte d parallel mit ba gezogene Linie keine andere als dc sein.

Beweis zu 3). Legt man durch a beliebige Ebenen, von welchen die beiden anderen Ebenen geschnitten werden, so stehen alle Schneidungslinien senkrecht auf a, und je zwei derselben sind also parallel. Hieraus folgt aber (§. 4, 2), daß die durchschnittenen Ebenen parallel sind.

§. 10. Zusatz.

An die Sätze der §§. 8 und 9 schließen sich leicht noch folgende Sätze an:

1) Eine Senkrechte ist die kürzeste Verbindungslinie (Entfernung, Abstand) zwischen einer Ebene und einem außerhalb derselben liegenden Punkte.

2) Errichtet man im Mittelpunkte eines Kreises eine Linie senkrecht auf der Kreisebene, so steht jeder Punkt dieser Linie gleichweit von allen Punkten der Peripherie ab.

3) Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene beliebig viele Linien von gleicher Länge nach derselben, so liegen die Treffpunkte in einer Kreislinie. Verbindet man den Mittelpunkt des Kreises mit dem gegebenen Punkte, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene.

4) Parallele Ebenen haben überall gleichen Abstand.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus bekannten planimetrischen Sätzen.

§. 11. Aufgaben.

1) Von einem Punkte außerhalb einer Ebene soll eine Senkrechte auf dieselbe gefällt werden.

2) Auf einer Ebene soll in einem gegebenen Punkte eine Senkrechte errichtet werden.

3) Durch einen gegebenen Punkt einer Linie a soll eine Ebene so gelegt werden, daß die Linie auf ihr senkrecht steht.

4) Zwei windschiefe Linien a und b sollen durch eine Linie verbunden werden, welche senkrecht auf beiden steht.

Auflösung zu 1). Man bestimme in der Ebene drei Punkte, welche von dem gegebenen gleiche Abstände haben. Der Mittelpunkt des Kreises, den man um die drei Punkte herum legen kann, ist dann der gesuchte Fußpunkt. Der Beweis folgt aus §. 10, 3).

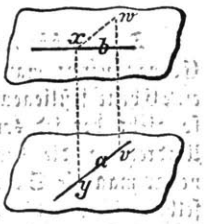
Auflösung zu 2). Von einem beliebigen, außerhalb der Ebene liegenden Punkte fälle man eine Senkrechte auf dieselbe (nach 1) und ziehe dann aus dem gegebenen Punkte eine Linie parallel mit der erhaltenen Senkrechten.

Auflösung zu 3). Man lege durch a zwei Ebenen und construire in jeder eine Linie, die in dem gegebenen Punkte senkrecht auf a steht. Durch die beiden Senkrechten ist alsdann die gesuchte Ebene bestimmt.

Auflösung zu 4). Man lege (Fig. 4.) durch a und b zwei parallele Ebenen, indem man an a eine Linie parallel mit b, und an b eine Linie parallel mit a zieht. Dann errichte man auf einem beliebigen

Punkte v in der Linie a die Senkrechte vw und ziehe in der andern Ebene die Linie wx parallel mit a. Zieht man nun xy parallel mit wv, ſo iſt xy die geſuchte Linie. Dieſe iſt zugleich die kürzeſte Verbindungslinie zwiſchen a und b. Der Beweis ergiebt ſich ohne Schwierigkeit aus der Figur.

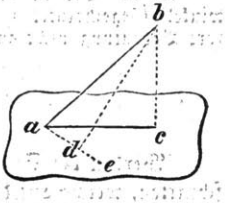
Fig. 4.



§. 12. Aufgabe.

Es ſoll der Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebene beſtimmt werden.

Auflöſung. Es ſei ba (Fig. 5.) ein beliebiges Stück der Linie, a der Treffpunkt. Fällt man aus b die Senkrechte bc nach der Ebene und verbindet c mit a, ſo iſt $<$bac unter allen hier möglichen Winkeln der kleinſte, iſt folglich der Neigungswinkel.



Beweis 1. Zieht man aus a die beliebige Linie ae in der gegebenen Ebene, und fällt man ferner aus b die Senkrechte bd auf ae, ſo iſt bd $>$ bc. Denkt man ſich nun $\triangle$ bad in die Ebene des $\triangle$ bac gelegt, ſo daß die Linie ba beiden Dreiecken gemeinſchaftlich bleibt, ſo liegen, weil adb und acb rechte Winkel ſind, d und c in der Peripherie eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer ba iſt. In dieſem Kreiſe gehört aber zum Peripheriewinkel bac eine kleinere Sehne, als zum Peripheriewinkel bad, und folglich iſt $<$bac der kleinere von beiden.

Beweis 2. Es iſt (Fig. 5):

$$\sin bac = bc : ba,$$
$$\sin bad = bd : ba,$$

folglich $\sin bac < \sin bad$.

Zum kleineren Sinus gehört aber der kleinere Winkel.

§. 13. Zuſatz.

Aus vorigem §. ergiebt ſich unmittelbar:

1) Parallele Ebenen werden von ein und derſelben Linie unter gleichen Neigungswinkeln geſchnitten.

2) Eine Ebene wird von parallelen Linien unter gleichen Neigungswinkeln geſchnitten.

Anm. Die Sätze dieſes §. laſſen ſich nicht umkehren.

§. 14. Erklärung.

Die Größe der Neigung (Abweichung) zweier sich schneidenden Ebenen nennt man einen Flächenwinkel. Denkt man sich also die eine Ebene festliegend, die andere um die Schneidungslinie herumgedreht, so giebt der jedesmalige Flächenwinkel an, welchen Theil einer ganzen Umdrehung die bewegte Ebene zurückgelegt hat. Die beiden Ebenen nennt man die Schenkel des Flächenwinkels, die Schneidungslinie derselben die Kante oder Scheitellinie. Bei den Flächenwinkeln unterscheidet man genau ebenso, wie bei den ebenen Winkeln, erhabene, gestreckte, hohle Winkel u. s. w., und theilt den rechten Winkel ebenfalls in 90 Grade ein.

Anm. Die in den späteren §§. vorkommenden Ausdrücke: Scheitelwinkel, Gegenwinkel u. a. brauchen nicht noch einmal erklärt zu werden, da ihre Bedeutung nicht zweifelhaft sein kann.

§. 15. Erklärung.

Werden die Schenkel eines Flächenwinkels von einer Ebene durchschnitten, welche auf der Kante senkrecht steht, so bilden die beiden Schneidungslinien einen ebenen Winkel, den man den Neigungswinkel des Flächenwinkels nennt. Man construirt ihn, wenn man aus einem beliebigen Punkte der Kante je eine Senkrechte auf derselben in beiden Schenkelflächen errichtet. Construirt man in der angegebenen Art den Neigungswinkel an verschiedenen Punkten der Kante, so sind die Schenkel dieser Winkel einander parallel, die Winkel selbst also gleich, und es ergiebt sich daraus, daß ein Flächenwinkel nicht verschiedene Neigungswinkel haben kann, und daß ferner zu gleichen Flächenwinkeln auch gleiche Neigungswinkel gehören.

Denkt man sich den einen Schenkel eines Flächenwinkels ruhend, den andern um die Kante herumgedreht, so dreht sich zugleich auch der eine Schenkel des Neigungswinkels und beschreibt eine Ebene, welche senkrecht auf der Kante steht. Hat nun der bewegte Schenkel des Flächenwinkels einen bestimmten Theil einer ganzen Umdrehung zurückgelegt, so hat sich gleichzeitig der Schenkel des ebenen Winkels um denselben Theil einer Umdrehung fortbewegt. Die Größe eines Flächenwinkels kann folglich durch dieselbe Zahl bezeichnet werden, wie die Größe des zugehörigen Neigungswinkels, und man braucht also, um erstern zu kennen, nur letztern zu messen. Unter dem Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, versteht man daher der Kürze wegen immer den Neigungswinkel.

§. 16. Zusatz.

An vorigen §. schließen sich folgende Sätze an:

1) Steht eine Linie a senkrecht auf einer Ebene A, so steht jede durch a hindurch gelegte Ebene senkrecht auf A.

2) Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht die Schneidungslinie a jener zwei Ebenen senkrecht auf der dritten.

3) Stehen beliebig viele Ebenen, die sich in den Linien a, b, c u. s. w. schneiden, senkrecht auf einer Ebene, so sind die Linien a, b, c u. s. w. einander parallel.

4) Schneiden sich verschiedene Ebenen in Linien, die nicht mit einander parallel sind, so giebt es keine Ebene, die auf allen jenen Ebenen senkrecht stände.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich daraus, daß die Linie a mit allen in A nach ihrem Fußpunkte gezogenen Linien rechte Winkel bildet.

Beweis zu 2). Errichtet man im Fußpunkte der Linie a eine Senkrechte auf der dritten Ebene, so muß diese Senkrechte in jeder der beiden anderen Ebenen liegen, weil beide senkrecht auf der dritten stehen. Da es aber für den vorliegenden Fall nicht zwei verschiedene Senkrechten geben kann, so muß die Schneidungslinie a der beiden Ebenen diese Senkrechte sein.

Beweis zu 3). Er folgt aus 2) und aus §. 9, 2).

Beweis zu 4). Er folgt aus 2) und 3).

§. 17. Zusatz.

Aus den §§. 15 und 16 ergeben sich für die Neigungswinkel noch folgende Sätze:

1) Die Schenkel eines Flächenwinkels stehen senkrecht auf der Ebene des Neigungswinkels.

2) Fällt man aus einem beliebigen Punkte in dem einen Schenkel eines Neigungswinkels eine Senkrechte nach dem gegenüberliegenden Schenkel des Flächenwinkels, so trifft diese Senkrechte den andern Schenkel des Neigungswinkels, oder seine Verlängerung.

3) Halbirt man einen Flächenwinkel, so steht jeder Punkt der halbirenden Ebene gleichweit von den Schenkeln des Flächenwinkels ab.

Beweis zu 1). Er folgt aus 1) des §. 16.

Beweis zu 2). Er folgt aus 1) dieses §.

Beweis zu 3). Er ergiebt sich sehr leicht durch Congruenz.

§. 18. Zuſatz.

Schneiden ſich mehrere Ebenen in ein und derſelben Linie, oder in parallelen Linien, ſo läßt ſich nach §. 16 eine Ebene A conſtruiren, die auf allen jenen Ebenen ſenkrecht ſteht. Die Linien, in welchen A von dieſen Ebenen geſchnitten wird, bilden alsdann eine ebene Figur, deren Winkel ſämmtlich Neigungswinkel ſind, und es müſſen alſo die Sätze, welche für dieſe ebenen Winkel gelten, auch für die zugehörigen Flächenwinkel richtig ſein. Es ſind dies folgende Sätze:

1) Jeder Flächenwinkel iſt gleich ſeinem Scheitelwinkel.

2) Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchſchnitten, und ſind zwei Gegen- oder Wechſelwinkel einander gleich, ſo ſind auch die übrigen paarweiſe einander gleich; ferner betragen zwei innere, oder zwei äußere Winkel, die auf derſelben Seite der durchſchneidenden Ebene liegen, zuſammen 2 R. Sind hingegen zwei der erwähnten Winkel ungleich, ſo ſind es auch die übrigen, und die erwähnte Winkelſumme iſt größer oder kleiner als 2 R.

§. 19. Zuſatz.

Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchſchnitten, ſo ſteht die Richtung der durchſchnittenen Ebenen in Beziehung zur Größe der gebildeten Winkel, und es laſſen ſich nun dieſelben Sätze aufſtellen, die an entſprechender Stelle in der Planimetrie entwickelt worden ſind. Da aber die Form der Lehrſätze wie auch der Beweiſe mit unbedeutenden Abänderungen dieſelbe ſein würde, ſo kann das Weitere hier übergangen werden. Die wichtigſten Sätze laſſen ſich in folgendem zuſammenfaſſen:

Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchſchnitten, ſo iſt der äußere Gegenwinkel gleich dem innern, oder größer, oder kleiner als derſelbe, je nachdem die durchſchnittenen Ebenen parallel ſind, oder auf der Seite der Gegenwinkel convergiren, oder divergiren. Ebenſo findet das Umgekehrte ſtatt.

Zweites Capitel.

Von den körperlichen Ecken.

§. 20. Erklärung.

Schneiden sich drei oder mehr Ebenen in Linien, die in einem Punkte zusammentreffen, so nennt man den von ihnen eingeschlossenen Raum eine körperliche Ecke. Dieselbe ist auf der einen Seite offen, auf den übrigen aber von ebenen Winkeln*) begränzt. Diese Winkel nennt man Seiten, und je nach ihrer Anzahl nennt man die Ecke ein körperliches Dreieck, Viereck u. s. w. Die von den Seiten gebildeten Flächenwinkel heißen einfach Winkel (W.); die Bedeutung der bei den Ecken gebräuchlichen Ausdrücke Spitze und Kante bedarf keiner Erklärung.

Anm. 1. Drei sich schneidende Ebenen, die sich nicht in parallelen Linien schneiden, schneiden sich stets in einem Punkte; bei vier und mehr Ebenen ist dies nicht nothwendig der Fall.

Anm. 2. Die Lehrsätze der folgenden §§. beschränken sich auf solche Ecken, deren Seiten und Winkel sämmtlich hohl sind. Die Betrachtung wird dadurch vereinfacht, und die gewonnenen Resultate lassen sich mit leicht zu findenden Abänderungen auf Ecken von beliebiger Form anwenden.

§. 21. Erklärung.

Setzt man die Seiten einer körperlichen Ecke über die Spitze hinaus fort, so entsteht eine neue Ecke, die Scheitelecke der erstern. Beide Ecken haben dieselben Seiten und Winkel, aber in umgekehrter Ordnung, so daß man sich die eine Ecke nicht in die andere hineingeschoben denken kann, und daß also beide Ecken trotz der Uebereinstimmung von Seiten und Winkeln nicht congruent sind. Ecken dieser Art nennt man symmetrisch, auch wohl umgestülpt congruent (weil sie congruent werden, sobald man sich die eine wie einen Handschuh umgestülpt denkt).

Errichtet man in der Spitze einer körperlichen Ecke auf jeder Seite eine Senkrechte, so bilden diese Senkrechten wiederum eine Ecke, die Ergänzungs- oder Polarecke der andern. Wie sich aus dieser Construction ergiebt, stehen stets zwei Kanten der Polarecke senkrecht auf ein

*) Eigentlich von Ebenen, welche durch die Schenkel dieser Winkel bestimmt sind.

und derſelben Kante der andern Ecke, und dieſe Kante ſteht alſo wiederum ſenkrecht auf derjenigen Seite der Polarecke, welche von jenen zwei Kanten begränzt wird. Jede Kante der einen Ecke ſteht daher ſenkrecht auf einer Seite der andern, und eine jede der beiden Ecken iſt folglich die Polarecke der andern. Außerdem ergiebt ſich noch, daß jede Seite den Flächenwinkel, auf deſſen Kante ſie ſenkrecht ſteht, zu 2 R ergänzen muß.

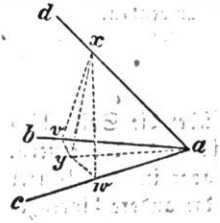
Anm. Denkt man ſich aus irgend einem Punkte innerhalb einer Ecke Parallelen mit allen Kanten der Polarecke gezogen, ſo iſt die ſo entſtehende Ecke congruent mit der Polarecke, weil alle Seiten und Winkel beziehlich einander gleich ſein müſſen und in derſelben Ordnung aufeinander folgen. Da nun die Kanten dieſer Ecke ebenfalls ſenkrecht auf den Seiten der gegebenen Ecke ſtehen, ſo kann alſo die Polarecke auch erhalten werden, wenn man aus irgend einem Punkte innerhalb der gegebenen Ecke Senkrechten nach allen Seiten zieht.

§. 22. Lehrſätze.

1) In einem körperlichen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt.

2) In einem körperlichen Dreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Fig. 6.



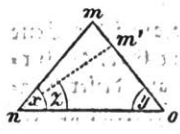
Beweis zu 1). Es ſei (Fig. 6.) abcd das körperliche Dreieck, und es ſei $\angle bad = \angle cad$. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte x in der Kante ad die Senkrechten xv und xw nach ba und ca, ferner in der Ebene bac die Senkrechten vy und wy aus v und w, ſo ſind W. xvy und W. xwy die beiden Neigungswinkel, welche der Behauptung zufolge gleich ſein müſſen.

Nun ergiebt ſich aus der Conſtruction:

$\triangle xva \cong \triangle xwa$, alſo $xv = xw$;

da ferner xy ſenkrecht auf der Ebene abc ſteht (§. 17, 1 und §. 16, 2), ſo iſt $\triangle xvy \cong \triangle xwy$, folglich W. xvy = W. xwy.

Fig. 7.



Der Beweis für die Umkehrung ergiebt ſich leicht indirect. Es ſei (Fig. 7.) mno die Durchſchnittsfigur, welche eine die drei Kanten durchſchneidende Ebene bildet. Es ſei W. x = W. y, und es ſei alſo zu beweiſen, daß die durch die Linien mo und mn angedeuteten Seiten einander gleich ſein müſſen. Wären nun dieſe Seiten nicht gleich, wäre z. B. letztere größer, ſo müßte es eine durch die Spitze gehende und durch nm' angedeutete Ebene von ſolcher Lage geben, daß die durch m'n und

m'o angedeuteten Seiten einander gleich wären. Dann müßte aber auch W. y = W. z ſein, was nicht möglich iſt.

Beweis zu 2). Der Beweis für die erſte Hälfte des Satzes ſchließt ſich leicht an die Umkehrung von 1) an; die zweite Hälfte desſelben wird indirect bewieſen, wie in der Planimetrie der entſprechende Satz.

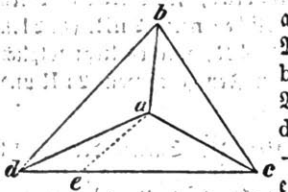
§. 23. Lehrſatz.

Die Summe zweier Seiten eines körperlichen Dreiecks iſt größer als die dritte Seite, die Differenz derſelben aber kleiner.

Vor. $\sphericalangle$ dac iſt die größte der drei Seiten.

Beh. $\sphericalangle$ dac iſt kleiner, als $\sphericalangle$ dab + $\sphericalangle$ bac.

Fig. 8.



Beweis. Man trage $\sphericalangle$ bac auf $\sphericalangle$ cad ab, und es ſei $\sphericalangle$ cae der abgetragene Winkel. Macht man nun ab = ae und verbindet c mit b und e, ſo iſt $\triangle$ cab $\cong$ $\triangle$ cae, alſo bc = ec. Verlängert man ferner ce über e hinaus bis d und verbindet d mit b, ſo iſt bd + bc $>$ de + ec, daher bd $>$ de. In den beiden Dreiecken bad und ead hat man nun: ba = ea, da = da, bd $>$ ed; folglich iſt $\sphericalangle$ bad größer als $\sphericalangle$ ead, und hierdurch iſt der Satz erwieſen.

Der zweite Theil des Satzes wird ebenſo bewieſen, wie der entſprechende Satz in der Planimetrie.

§. 24. Lehrſatz.

Die Summe aller Seiten eines körperlichen necks, deſſen Winkel ſämmtlich hohl ſind, iſt kleiner als 4 R.

Beweis. Wird das körperliche neck auf der offenen Seite durch ein ebenes neck begränzt, ſo iſt es im Uebrigen von n Dreiecken eingeſchloſſen, deren Winkelſumme gleich 2 n R iſt. Nun ſtoßen in jeder Ecke des ebenen necks drei Winkel zuſammen: ein innerer Winkel des ebenen necks und zwei Dreieckswinkel. Die Summe der letztern iſt aber nach vor. §. größer als der eine Winkel des ebenen necks, und folglich beträgt die Summe aller der Dreieckswinkel, welche nicht an der Spitze der körperlichen Ecke liegen, mehr als die Summe der innern Winkel des ebenen necks, alſo mehr als 2 nR — 4R. Subtrahirt man dies von der oben angegebenen Winkelſumme 2 nR, ſo bleibt für die Winkel an der Spitze, alſo für die Seiten des körperlichen necks, weniger als 4 R übrig.

Anm. 1. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht anschaulich machen. Versucht man nämlich ein Stück Papier von einem Punkte aus, der inmitten desselben liegt, zu einem körperlichen Eck zusammenzufalten, so gelingt dies nur, wenn man zuvor von jenem Punkte aus einen Sector aus dem Papiere herausschneidet.

Anm. 2. Eine untere Gränze für die Summe der Seiten, also eine Angabe, wie groß dieselbe mindestens sein müsse, kann es nicht geben.

§. 25. Lehrsatz.

Die Summe aller Winkel eines körperlichen Ecks beträgt, wenn dieselben sämmtlich hohl sind, mehr als $2nR - 4R$ und weniger als $2nR$.

Beweis. Bildet man die Ergänzungsecke, so betragen deren Seiten zusammen mit den Winkeln des körperlichen Ecks $2nR$. (§. 21.). Die Summe jener Seiten beträgt weniger als $4R$, und es liegt folglich die Summe der erwähnten Winkel zwischen den Gränzen $2nR$ und $2nR - 4R$.

Anm. Bei einem körperlichen Dreiecke liegt die Summe der Winkel zwischen $6R$ und $2R$. Sind x, y, z diese drei Winkel, so sind $(2R - x)$, $(2R - y)$, $(2R - z)$ die Seiten des Polardreiecks. Da nun $(2R - x) + (2R - y)$ größer als $(2R - z)$ ist, so folgt, daß $(x + y)$ kleiner als $(2R + z)$ sein muß.

§. 26. Erklärung.

Zwei körperliche Ecken sind congruent, wenn beide dieselben Seiten und Winkel in derselben Reihenfolge haben, so daß man also eine Ecke in die andere hineingeschoben denken kann, und sich beide dann vollständig denken. Es läßt sich nun, wie bei den ebenen Dreiecken, nachweisen, daß zwei körperliche Dreiecke im Allgemeinen congruent sind, wenn sie in drei Stücken übereinstimmen (welche jedoch auch dieselbe Lage zu einander haben müssen). Da aber die Lehrsätze, wie die Beweise, fast unverändert dieselben bleiben würden, wie sie in der Planimetrie gegeben sind, so können sie hier übergangen werden.

Anm. 1. Als einziger besonderer Fall, dessen Beweis nicht aus der Planimetrie entlehnt werden kann, ist anzuführen, daß zwei körperliche Dreiecke congruent sind, wenn ihre Winkel der Größe und Lage nach übereinstimmen. Der Beweis ist indessen ziemlich einfach. Sind nämlich bei zwei körperlichen Dreiecken die Winkel beziehlich einander gleich, so sind es bei ihren Polardreiecken die Seiten, und die Polardreiecke sind also congruent. Da nun folglich auch deren Winkel beziehlich einander gleich sind, so sind es wiederum umgekehrt bei den gegebenen Dreiecken auch die Seiten.

Anm. 2. Stimmen zwei körperliche Dreiecke in allen Stücken überein, ist aber die Reihenfolge dieser Stücke in beiden Dreiecken eine entgegengesetzte, so ist das eine Dreieck congruent dem Scheiteldreiecke des andern. Nur das gleichschenklige körperliche Dreieck ist seinem Scheiteldreiecke congruent.

§. 27. Lehrsatz.

Ein gleichschenkliges körperliches Dreieck läßt sich durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegen. Diese Ebene halbirt gleichzeitig das Dreieck, den zwischen beiden gleichen Seiten liegenden Winkel und die dritte Seite, und steht auf letzterer senkrecht.

Beweis. Er ergiebt sich daraus, daß jeder der beiden Theile congruent dem Scheiteldreiecke des andern ist.

Drittes Capitel.

Von den vollständig begränzten Körpern.

§. 28. Erklärung.

Ein auf allen Seiten von ebenen oder krummen Flächen begränzter Raum heißt ein geometrischer Körper; derselbe heißt ein eckiger Körper oder Polyeder, wenn sämmtliche Gränzflächen Ebenen sind, und heißt ein runder, wenn alle oder einige Gränzflächen gekrümmt sind.

Von den ein Polyeder begränzenden Ebenen nennt man diejenige, auf welcher es ruhend gedacht werden kann, die Grundebene, die übrigen hingegen Seitenebenen. Die Kanten werden unterschieden als Grundkanten und Seitenkanten, und die von zwei Kanten gebildeten Winkel heißen Kantenwinkel. Die Namen Ecke, Flächenwinkel, Höhe bedürfen keiner weiteren Erklärung. Wenn einige dieser Bezeichnungen auch bei runden Körpern angewendet werden, so haben sie dieselbe Bedeutung.

Ein Polyeder heißt regulär, wenn seine Gränzebenen congruente, reguläre Ecke sind, die mit einander gleiche Flächenwinkel bilden.

Anm. Für die nachfolgenden §§. soll vorausgesetzt werden, daß die vorkommenden Winkel sämmtlich hohl sind. (Vergl. §. 20, Anm. 2).

A. Das Prisma.

§. 29. Erklärung.

Zieht man aus einer Ecke eines beliebigen ebenen ecks eine Linie, die nicht in derselben Ebene liegt, und aus jeder der übrigen Ecken auf derselben Seite der Figur eine Linie parallel mit ersterer, so begränzen die Ebenen, welche durch je zwei aufeinander folgende Linien gelegt werden, einen prismatischen Raum. Begränzt man diesen auch auf der noch offenen Seite durch ein eck, welches dem erstern parallel ist, so erhält man ein nseitiges Prisma. Die Grundebene desselben ist eins der beiden ecke, die Höhe der senkrechte Abstand derselben. Sind die beiden Grundebenen eines Prisma nicht parallel, so heißt das Prisma schief abgeschnitten. Ein Prisma ist gerade, wenn eine Seitenkante (folglich auch jede der übrigen und jede Seitenebene) senkrecht auf der Grundebene steht; in den übrigen Fällen ist es schief.

Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundebene ein Parallelogramm ist, wird Parallelipipedum genannt; das gerade Parallelipipedum heißt rechtwinklig, wenn die Grundebene ein Rechteck ist; das rechtwinklige heißt ein Würfel oder Cubus, wenn die Grundebene ein Quadrat, und die Höhe gleich der Seite dieses Quadrates ist. Eine Ebene, welche in einem Parallelipipedum durch zwei parallele Kanten hindurchgelegt wird, die nicht derselben Gränzebene zugehören, nennt man Diagonalebene; die Diagonalen der Diagonalebenen heißen Eckdiagonalen.

§. 30. Lehrsätze.

1) Die Seitenebenen eines jeden Prisma sind im Allgemeinen Parallelogramme; sie sind Rechtecke, wenn das Prisma gerade ist. Es sind daher alle Seitenkanten eines Prisma einander gleich; ferner die Kanten der einen Grundebene beziehlich gleich denen der andern.

2) Die beiden Grundebenen eines Prisma sind einander congruent.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich aus der Erklärung des vorigen §.

Beweis zu 2). In jeder Seitenkante stoßen von beiden Grundebenen je zwei Seiten zusammen, die gleich und parallel sind, folglich auch gleiche Winkel einschließen. Hieraus ergiebt sich aber die Congruenz der beiden Grundebenen. — Außerdem folgt, daß überhaupt parallele durch ein Prisma hindurchgehende Ebenen congruente Querschnitte geben.

Anm. zu 2). Die Umkehrung, daß congruente Querschnitte auch parallel sein müssen, ist nur in einzelnen Fällen richtig. Da indessen dieselbe Frage sich bei noch mehreren Körpern wiederholt, so ist eine genauere Erörterung nur in dem Abschnitte über den Cylinder gegeben. Vorläufig kann ein Hinweisen auf §. 127 der Planimetrie genügen.

§. 31. Lehrsätze.

1) Ein Parallelepipedum hat zu Seitenebenen entweder vier schiefwinklige Parallelogramme, oder zwei schiefwinklige und zwei rechtwinklige, oder vier rechtwinklige. Die gegenüberliegenden Seitenebenen sind einander parallel und congruent.

2) Kennt man von einem Parallelepipedum die drei Kanten- und die drei Flächenwinkel, welche in einer Ecke zusammenstoßen, so kennt man auch alle übrigen. Letztere sind entweder ersteren gleich, oder sind deren Supplemente.

3) Die gegenüberliegenden räumlichen Ecken eines Parallelepipedums sind im Allgemeinen symmetrisch; die eines geraden Parallelepipedums sind außerdem gleichschenklig, folglich auch congruent.

4) Jede Ebene, welche die vier Seitenebenen eines Parallelepipedums durchschneidet, bildet als Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.

Anm. Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Figur.

§. 32. Zusatz.

1) Ein Parallelepipedum hat sechs Diagonalebenen, die Parallelogramme sind. Außerdem hat es vier Eckdiagonalen, von denen eine jede drei Diagonalebenen gemeinschaftlich ist.

2) Die Eckdiagonalen eines Parallelepipedums halbiren sich gegenseitig und schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte.

3) Die Diagonalebenen eines Parallelepipedums halbiren sich gegenseitig.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich aus der Figur.

Beweis zu 2). Je zwei Eckdiagonalen, die in derselben Diagonalebene liegen, halbiren sich. Es liegt aber jede Eckdiagonale in drei Diagonalebenen und wird also von drei verschiedenen Eckdiagonalen halbirt. Daher bleibt der Halbirungspunkt immer derselbe und ist allen vier Eckdiagonalen gemeinschaftlich.

Beweis zu 3). Die sechs Diagonalebenen gehen (nach 2) durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums, der zugleich Mittelpunkt einer

jeden Diagonalebene ist. Die Durchschnittslinien je zweier Diagonalebenen gehen aber ebenfalls durch den Mittelpunkt und halbiren folglich die zugehörigen Diagonalebenen, da dieselben Parallelogramme sind.

Anm. Als Uebungssätze lassen sich hier noch anknüpfen:

1) Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums zwischen zwei Gränzebenen gezogene Transversale wird in diesem Punkte halbirt. Zieht man ferner in den zwei Gränzebenen, welche von dieser Transversale getroffen werden, parallele Linien durch die Treffpunkte, so sind die zwei Theile der einen Linie beziehlich gleich denen der andern.
2) Die durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums gehenden Transversalebenen sind Parallelogramme, welche sich gegenseitig halbiren.
3) Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums hindurchgehende Ebene zerlegt dasselbe in zwei symmetrische Theile.

§. 33. Zusatz.

1) Die Diagonalebenen des rechtwinkligen Parallelepipedums sind Rechtecke, und je zwei derselben sind congruent; die Eckdiagonalen sind sämmtlich einander gleich.

2) Werden bei einem rechtwinkligen Parallelepipedum drei zusammenstoßende Kanten mit a, b, c, die Eckdiagonalen mit d bezeichnet, so ist $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Anm. Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Figur mit Hülfe bekannter planimetrischer Sätze.

§. 34. Erklärung.

Zwei Prismen sind *congruent*, wenn sie dieselben Gränzebenen und Winkel in derselben Reihenfolge haben, so daß also, wenn man sich das eine in das andere hineingeschoben denkt, je zwei Gränzebenen sich vollständig decken. Zwei Prismen sind *ähnlich*, wenn sie ähnliche Gränzebenen und dieselben Winkel in derselben Reihenfolge haben; man kann sich alsdann das eine so in das andere hineingeschoben denken, daß je zwei Gränzebenen einander ähnlich und parallel sind.

Anm. Es ließe sich hier eine Reihe von Sätzen aufstellen, in denen nachgewiesen würde, unter welchen Bedingungen zwei Prismen congruent, oder ähnlich sind. Diese Sätze finden aber eine so seltene Anwendung, daß man sie im Allgemeinen nur dann aufstellt und beweist, wenn eine vorkommende Aufgabe dies nöthig macht. Es gilt dies übrigens nicht bloß für die Prismen, sondern für alle Polyeder.

B. Die Pyramide.

§. 35. Erklärung.

Wird ein körperliches neck auf der offenen Seite durch ein ebenes neck begränzt, so entsteht eine nseitige Pyramide. Das begränzende neck heißt die Grundebene, und der Punkt, in welchem die begränzenden Dreiecke zusammenstoßen, die Spitze der Pyramide. Eine Pyramide heißt gleichseitig, wenn ihre Seitenkanten sämmtlich einander gleich sind; die gleichseitige Pyramide heißt gleichförmig, auch wohl regulär, wenn ihre Grundebene ein reguläres neck ist.

Legt man durch eine Pyramide eine Ebene hindurch, parallel mit der Grundebene, so zerschneidet diese Ebene die Pyramide in zwei Theile: der eine ist wiederum eine Pyramide und heißt Ergänzungspyramide, der andere ist ein von zwei necken und n Trapezen begränzter Körper und heißt eine abgekürzte Pyramide. Die zwei necke, welche eine abgekürzte Pyramide begränzen, heißen deren Grundebenen, ihr senkrechter Abstand die Höhe.

Anm. Einer abgekürzten Pyramide ähnlich, aber wohl von ihr zu unterscheiden, ist der Obelisk. Beide Körper sind begränzt von zwei parallelen necken als Grundebenen, und von Trapezen als Seitenebenen; während aber die Seitenkanten einer abgekürzten Pyramide sich bei gehöriger Verlängerung in ein und demselben Punkte schneiden, so ist dies beim Obelisken (im weiteren Sinne des Worts) nicht durchaus nothwendig. Nach der gegebenen Erklärung sind auch Prismen und Pyramiden als besondere Fälle zu den Obelisken zu rechnen, jedoch wird das Wort Obelisk gewöhnlich in engerer Bedeutung gebraucht und auf den Fall beschränkt, wo die oben erwähnten Seitenkanten sich nicht in ein und demselben Punkte schneiden. Einen dreiseitigen Obelisken (im engeren Sinne des Worts) kann es nicht geben. (§. 20, Anm. 1.)

§. 36. Zusatz.

1) Um die Grundebene einer gleichseitigen Pyramide läßt sich ein Kreis beschreiben.

2) Die Höhe einer gleichseitigen Pyramide trifft den Mittelpunkt des um die Grundebene beschriebenen Kreises.

3) Die Seitenebenen einer regulären Pyramide bilden mit der Grundebene gleiche Flächenwinkel, und die Seitenkanten mit der Grundebene gleiche Neigungswinkel.

Beweis zu 1). Er folgt aus §. 10, 3).

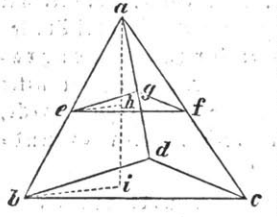
Beweis zu 2). Er folgt ebenfalls aus §. 10, 3).

Beweis zu 3). Jeder Eckpunkt der Grundebene iſt zugleich die Spitze eines gleichſchenkligen körperlichen Dreiecks. Alle dieſe körperlichen Dreiecke ſind aber congruent, da ſie in den drei Seiten übereinſtimmen, und aus ihrer Congruenz ergiebt ſich die Richtigkeit des Satzes.

§. 37. Lehrſatz.

Wird eine Ebene durch eine Pyramide parallel mit der Grundebene gelegt, ſo iſt der Durchſchnitt eine der Grundebene ähnliche Figur. Die ſich entſprechenden Seiten dieſer Figuren verhalten ſich wie die Abſtände letzterer von der Spitze, die Figuren ſelbſt wie die Quadrate dieſer Abſtände.

Fig. 9.



Beweis. Er braucht, wie ſich aus dem Weiteren ergeben wird, nur für die dreiſeitige Pyramide geführt zu werden. Iſt nun (Fig. 9.) abcd eine dreiſeitige Pyramide, und iſt die Ebene efg parallel der Ebene bcd, ſo iſt ef || bc. Folglich iſt ef : bc = ae : ab = = af : ac, und in demſelben Verhältniſſe ſteht auch gf zu dc, ge zu db (Vergl. §. 5, 7). Da außerdem die gleichliegenden Winkel in den beiden Figuren (efg und bcd) gleich ſein müſſen, weil ihre Schenkel paarweiſe parallel ſind, ſo folgt, daß beide Figuren ähnlich ſind. Dieſelben verhalten ſich alſo wie $ef^2 : bc^2$ oder wie $ae^2 : ab^2$. Statt dieſes Verhältniſſes kann man auch ein anderes ſetzen. Zieht man nämlich die Höhe ahi, ſo iſt wiederum eh || bi, folglich ae : ab = ah : ai, und hierdurch iſt die Behauptung erwieſen.

Anm. 1. Die beiden Pyramiden aefg und abcd ſind einander ähnlich (Vergl. §. 34).

Anm. 2. Sollen aus den gegebenen Kanten einer abgekürzten Pyramide die Kanten der vollſtändigen Pyramide berechnet werden, ſo hat man nach dem Geſagten dafür folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} ab : ae &= bc : ef, \text{ oder} \\ (x + eb) : x &= bc : ef, \text{ oder} \\ eb : x &= (bc - ef) : ef, \text{ daher} \\ x &= (ef \cdot eb) : (bc - ef). \end{aligned}$$

§. 38. Zuſatz.

Aus vorigem §. ergiebt ſich noch folgender Satz:

Haben zwei Pyramiden dieſelben Höhen und gleiche, wenn auch nach Form und Seitenzahl verſchiedene Grundebenen, ſo bilden je zwei Ebenen, die in gleichen Abſtänden von den Grundebenen parallel mit dieſen durch die Pyramiden gelegt werden, gleiche Querſchnitte.

Anm. Ueber die Umkehrung dieſes Satzes vergleiche §. 30, Anm.

C. Der Cylinder.

§. 39. Erklärung.

Zieht man aus dem Mittelpunkte eines Kreises unter einem beliebigen Neigungswinkel gegen dessen Ebene eine Linie a und bewegt dann eine andere gleich große Linie b auf der ganzen Peripherie (Directrix) entlang so fort, daß sie immer parallel mit a bleibt, so beschreibt b eine cylindrische Fläche, und diese umschließt einen cylindrischen Raum. Wird dieser auf der noch offenen Seite durch eine Ebene begränzt, welche mit der Ebene der Directrix parallel ist, so entsteht ein Cylinder. Die beiden parallelen Ebenen sind die Grundebenen, ihr senkrechter Abstand ist die Höhe des Cylinders. Die gekrümmte Fläche heißt der Mantel, die Linie a (welche man sich auch von der zweiten Grundebene begränzt denkt) die Axe, jede mit ihr parallel im Mantel gezogene Linie eine Seite des Cylinders. Ein Cylinder ist gerade (Walze, Welle), wenn die Axe senkrecht auf beiden Grundebenen steht; in den übrigen Fällen ist er schief. Durch eine Ebene, welche den Cylinder durchschneidet, und welche der Grundebene nicht parallel ist, wird der Cylinder schief abgeschnitten. Ein schief abgeschnittener Cylinder, bei welchem die beiden Grundebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, heißt eine Cylinderklaue.

Anm. 1. Den Cylinder kann man betrachten als ein Prisma, dessen Grundebene ein reguläres neck von unendlich vielen Seiten ist.

Anm. 2. Den geraden Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, daß ein Rechteck um eine seiner Seiten herumgedrehet wird.

§. 40. Zusatz.

1) Alle Seiten eines Cylinders sind einander gleich, und jede ist gleich der Axe.

2) Jede durch die Axe eines Cylinders hindurchgelegte Ebene schneidet den Mantel in zwei geraden, der Axe parallelen Linien, also in zwei Seiten.

3) Jede aus der Directrix eines Cylinders parallel mit der Axe gezogene Linie liegt völlig im Mantel, ist also eine Seite.

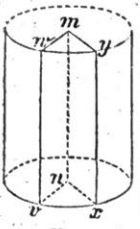
Anm. Der Beweis zu 1) ergiebt sich aus §. 5, 5; die Beweise zu 2) und 3) folgen unmittelbar aus der Erklärung des §. 39.

§. 41. Lehrsätze.

1) Jede Ebene, die parallel mit der Ebene der Directrix durch einen Cylinder gelegt wird, schneidet den Mantel in einer Kreislinie, welche der Directrix congruent ist.

2) Jede Ebene, welche parallel mit der Axe durch einen Cylinder gelegt wird, ſchneidet den Mantel in zwei parallelen geraden Linien. Die Durchſchnittsfigur iſt alſo im Allgemeinen ein Parallelogramm; beim geraden Cylinder iſt ſie ein Rechteck.

Fig. 10.

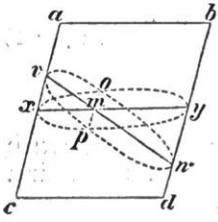


Beweis zu 1). Es ſeien (Fig. 10.) v und x zwei Punkte der Directrix; die Ebene wmy ſei parallel mit der Ebene vnx, und es ſei mn die Axe des Cylinders. Zieht man nun die Seite vw (parallel mit nm), ſo iſt wv = mn und auch wv || mn; folglich iſt wmvn ein Parallelogramm, und in demſelben iſt wm = vn. Jede aus m nach der Durchſchnittslinie gezogene Gerade iſt alſo gleich dem Radius der Directrix, und die Durchſchnittslinie ſelbſt iſt daher der Directrix congruent.

Beweis zu 2). Legt man (Fig. 10.) durch die Punkte v und x eine Ebene parallel mit mn, ſo müſſen zwei Linien, die man aus v und x parallel mit mn zieht, in dieſer Ebene liegen. Sie liegen aber (§. 40, 3) auch im Mantel, ſind folglich die Durchſchnittslinien jener Ebene und des Mantels. Sind vw und xy dieſe Linien, ſo iſt wyvx ein Parallelogramm, weil wv und yx einander gleich und parallel ſind; ſteht außerdem (beim geraden Cylinder) mn ſenkrecht auf der Grundebene, ſo gilt dies auch für die Linien wv und yx, und es iſt alsdann wyvx ein Rechteck.

Anm. 1. Zieht man an eine der beiden Grundebenen eine Tangente und legt durch dieſe Tangente eine Ebene parallel mit der Axe, ſo haben der Mantel und dieſe Ebene eine Linie (Seite) gemeinſchaftlich. In dieſer Linie wird aber der Mantel berührt, nicht geſchnitten, und außerhalb derſelben können die Ebene und der Mantel keinen Punkt weiter miteinander gemeinſchaftlich haben; denn gäbe es einen ſolchen, ſo würde ein durch dieſen Punkt parallel mit der Grundebene geführter Querſchnitt einen Kreis vorſtellen, der mit einer Tangente zwei Punkte gemeinſchaftlich hätte. Eine gerade Linie, die nicht Seite des Cylinders iſt, kann alſo den Mantel nur in einem Punkte berühren, und mit Ausnahme der Seiten ſind alle im Mantel gezogenen Linien gekrümmt.

Fig. 11.



Anm. 2. Jede durch einen beliebigen Cylinder parallel mit der Grundebene hindurchgelegte Ebene durchſchneidet den Mantel in einer Kreislinie, aber es iſt umgekehrt ein kreisförmiger Querſchnitt nicht nothwendig in jedem Cylinder der Grundebene parallel. Stellt nämlich (Fig. 11.) abcd den Durchſchnitt eines ſchiefen Cylinders vor, gebildet durch eine Ebene, welche durch die Axe geht und auf den Grundebenen ſenkrecht ſteht, ſo iſt jede mit ab parallel laufende Querlinie, z. B. xy, Durchmeſſer eines kreisförmigen Querſchnittes (xoyp) und iſt gleich dem Durchmeſſer der Grundebene. Zieht man

nun eine Linie vw ſo, daß $\angle axy = \angle cvw$, alſo auch $mv = mx$, $mw = my$ iſt, ſo ſchneidet eine durch vw hindurchgelegte, ſenkrecht auf abcd ſtehende Ebene den Cylindermantel in einer Linie vowp, welche ebenfalls der Directrix congruent iſt, und es iſt vw der Durchmeſſer des Kreiſes vowp.

Es ſchneiden ſich nämlich zunächſt der Durchſchnitt vowp und der zu xy gehörende Kreis xoyp in einer geraden Linie omp. Da nun $vm = xm$, $wm = ym$ iſt, alſo auch $xm.my = vm.mw$, und da ferner xoyp ein Kreis, folglich $xm.my = pm.mo$ iſt, ſo muß auch $vm.mw = pm.mo$ ſein. Die Punkte v, o, w, p haben alſo eine Eigenſchaft, welche vier Punkten einer Kreislinie zukommt. Daß nun dieſelbe Eigenſchaft auch für andere Punkte der Durchſchnittslinie vowp gilt, ergiebt ſich leicht, wenn man vowp durch verſchiedene andere, mit xoyp parallel gehende Kreiſe durchſchneidet, wobei man ſtatt omp andere Durchſchnittslinien erhält.

Aus der Conſtruction geht zugleich hervor, daß bei einem geraden Cylinder die Linien xy und vw zuſammenfallen, oder parallel ſein müſſen, daß alſo bei einem ſolchen ein kreisförmiger Querſchnitt ſtets der Grundebene parallel iſt.

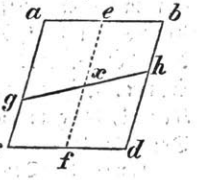
Anm. 3. Bei einem ſchiefen Cylinder liefert ein ſenkrecht zur Axe geführter Querſchnitt nie einen Kreis, und es kann daher ein ſchiefer Cylinder nicht auf der gewöhnlichen Drehbank angefertigt werden.

§. 42. Zuſatz.

Zieht man in einem Cylinder durch die Mitte x der Axe eine gerade Linie, welche zwei Seiten ſchneidet, ſo theilt ſie dieſelben in je zwei Stücke, von welchen das obere Stück der einen Seite gleich dem unteren der anderen iſt, und ſie ſelbſt wird in dem Mittelpunkte x halbirt.

Beweis. Es ſei (Fig. 12.) exf die Axe des Cylinders, gxh die ſchneidende Linie, abcd die Durchſchnittsfigur, welche eine durch exf und gxh hindurch gelegte Ebene mit dem Cylinder bildet. Alsdann iſt abcd ein Parallelogramm, x der Mittelpunkt deſſelben, folglich $ag = hd$, $bh = gc$, $gx = xh$.

Fig. 12.



§. 43. Zuſatz.

Legt man in einem geraden Cylinder durch die Mitte der Axe eine Ebene, ſo theilt dieſe den Cylinder in zwei congruente Körper.

Beweis. Wird der Beweis auf die Fälle beſchränkt, daß der Cylinder in zwei ſchief abgeſchnittene Cylinder, oder in zwei Klauen getheilt iſt, ſo ſind die Grundebenen der beiden Körper congruente Kreiſe, auf denen jede Seite (oder der Mantel in jedem einzelnen Punkte) ſenkrecht ſteht. Es läßt ſich daher, wenn beide Körper hohl gedacht werden, der eine in den anderen hineinſchieben. Da nun außerdem beiden Körpern eine ſolche Lage gegeben werden kann, daß immer zwei gleiche Seiten aufeinanderfallen (§. 42), ſo ſind ſie congruent.

Anm. Als Uebungsaufgabe kann die Frage dienen: In welcher Beziehung stehen die beiden erwähnten Körper bei einem schiefen Cylinder oder bei einem beliebigen Prisma?

§. 44. Erklärung.

Wird der Mantel eines geraden Cylinders auf eine Ebene gelegt und auseinander gerollt, indem man einen Schnitt durch eine Seite hindurchgeführt denkt, so bildet er ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Directrix, und dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist. Der Mantel einer geraden Klaue kann folglich zu einem gleichschenkligen Dreiecke ausgebreitet werden. Der ausgebreitete Mantel eines schiefen Cylinders giebt eine Figur, die von zwei geraden und zwei krummen Linien begränzt ist, welche letzteren aber keine Kreisbogen sind.

D. Der Kegel.

§. 45. Erklärung.

Zieht man aus einem Punkte a außerhalb einer Kreisebene eine gerade Linie nach der Peripherie (Directrix) und bewegt diese Linie so fort, daß sie bei jeder Lage den Punkt a mit der Peripherie verbindet, so beschreibt sie eine Kegelfläche, und diese begränzt zusammen mit dem Kreise einen Kegel. Eine Linie, welche die Spitze eines Kegels mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises verbindet, heißt Axe des Kegels. Die Ausdrücke: Mantel, Spitze, Grundebene, Seite, Höhe, gerader, schiefer und schief abgeschnittener Kegel, Ergänzungskegel erklären sich aus den §§. 35 und 39. Den Mantel eines abgekürzten Kegels nennt man eine Kegelzone.

Anm. 1. Den Kegel kann man betrachten als eine Pyramide, deren Grundebene ein reguläres Eck von unendlich vielen Seiten ist.

Anm. 2. Den geraden Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, daß man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Catheten herumdreht.

§. 46. Zusatz.

1) Eine gerade Linie, welche aus einem Punkte der Directrix nach der Spitze des Kegels gezogen wird, liegt völlig im Mantel desselben.

2) Eine Ebene, welche einen Kegel schneidet und durch die Spitze desselben geht, schneidet den Mantel in zwei geraden Linien.

3) Die Seiten eines geraden Kegels sind einander gleich. Ein schiefer Kegel hat eine größte und eine kleinste Seite, und die übrigen Seiten sind paarweise einander gleich.

Anm. 1. Die Beweise zu 1) und 2) folgen aus der Erklärung. Die erste Hälfte von 3) folgt aus §. 10, 2; die zweite ergiebt sich aus bekannten planimetrischen Sätzen. Verbindet man nämlich den Fußpunkt der Höhe mit irgend einem Punkte der Directrix, so ist durch diese Verbindungslinie und durch die Höhe ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Vergleicht man nun aber alle möglichen, auf diese Art entstehenden rechtwinkligen Dreiecke mit einander, so ergiebt sich aus bekannten planimetrischen Sätzen die Richtigkeit der Behauptung.

Anm. 2. Wird eine Ebene durch die Spitze eines Kegels und durch eine an die Directrix gezogene Tangente gelegt, so berührt diese Ebene den Mantel in einer Seite und hat außerhalb dieser Seite keinen Punkt weiter mit ihm gemeinschaftlich. Alle im Mantel gezogenen Linien, mit Ausnahme der Seiten, sind folglich gekrümmt. (Vergl. §. 41, Anm. 1.)

§. 47. Lehrsätze.

1) Wird eine Ebene durch einen Kegel parallel mit der Grundebene gelegt, so schneidet sie den Mantel in einer Kreislinie. Die Radien der beiden Kreise (der Durchschnittsfigur und der Grundebene) verhalten sich wie die Abstände letzterer von der Spitze, die Kreise selbst wie die Quadrate dieser Abstände.

2) Haben zwei Kegel dieselben Grundebenen und Höhen, so bilden je zwei Ebenen, die in gleichen Abständen von den Grundebenen parallel mit diesen durch die Kegel gelegt werden, congruente Querschnitte.

Beweis zu 1). Er wird ebenso geführt wie der entsprechende in §. 37. Es läßt sich ferner ebenso die Bemerkung anknüpfen, daß beide Kegel (der vollständige und der Ergänzungskegel) einander ähnlich sind.

Beweis zu 2). Er folgt unmittelbar aus 1).

Anm. Durchschneiden zwei Ebenen einen Kegel in Kreisen, so sind sie nicht nothwendig parallel. (Vergl. §. 41, Anm. 2.)

§. 48. Zusatz.

Wird der Mantel eines geraden Kegels auf einer Ebene ausgebreitet, so bildet er einen Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Seite des Kegels, und dessen Bogen gleich der Directrix ist. Der Mantel eines abgekürzten geraden Kegels bildet auseinandergerollt eine Art Trapez, dessen parallele Seiten Bogen concentrischer Kreise sind. Der Mantel eines schiefen Kegels läßt sich ebenfalls auf einer Ebene ausbreiten, doch ist die krumme Linie, von welcher die so entstehende Figur begränzt wird, kein Kreisbogen.

E. Die regulären Polyeder.

§. 49. Erklärung.

Von den ein reguläres Polyeder begränzenden regulären Figuren müssen mindestens drei in einer Ecke zusammenstoßen. Da aber die Summe der hier zusammenstoßenden Kantenwinkel kleiner als 4R sein muß (§. 24), so kann ein reguläres Polyeder nur von gleichseitigen Dreiecken, oder von Quadraten, oder von regulären Fünfecken begränzt sein, indem drei Winkel eines regulären Sechsecks zusammen schon 4R betragen. Ist ein reguläres Polyeder von Quadraten oder regulären Fünfecken begränzt, so können immer nur drei dieser Figuren in einer Ecke zusammenstoßen, ist es aber von gleichseitigen Dreiecken begränzt, so können in einer Ecke drei, vier, oder fünf derselben zusammenstoßen.

Es kann also höchstens fünf reguläre Körper geben. Damit ist freilich nicht bewiesen, daß dieselben auch wirklich existiren, doch kann dieser Beweis vorläufig übergangen und zunächst durch anzufertigende Modelle ersetzt werden. Daß es überhaupt reguläre Körper giebt, geht schon aus dem Vorhandensein des Würfels hervor.*)

Diese fünf Körper sind:

1) das reguläre Tetraeder, begränzt von vier regulären Dreiecken;
2) „ „ Octaeder, „ „ acht „ „
3) „ „ Icosaeder, „ „ zwanzig „ „
4) „ „ Hexaeder, „ „ sechs „ Vierecken;
5) „ „ Dodecaeder, „ „ zwölf „ Fünfecken.

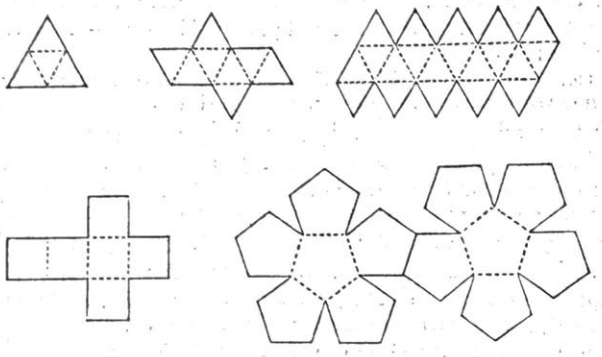
Anm. 1. Breitet man die Oberfläche eines regulären Polyeders auf einer Ebene aus, so erhält man eine zusammenhängende Figur. Es lassen sich daher die Modelle leicht aus Pappe herstellen, wenn man sich zunächst die zusammenhängende Figur (das Netz) aus Pappe ausschneidet und dann einen nur oberflächlichen Schnitt über die Stellen führt, an welchen durch Biegen die Kanten gebildet werden sollen.

In Fig. 13 (s. S. 27) sind die auch ohne weitere Erklärung verständlichen Netze für die fünf regulären Polyeder gegeben.

Anm. 2. Den regulären Polyedern verwandt ist eine Gruppe von Körpern, deren Gränzebenen zwar auch reguläre, unter gleichen Winkeln zusammenstoßende necke, aber nicht necke gleicher Art sind. Ein Körper dieser Art kann z. B. begränzt sein von Quadraten und gleichseitigen Dreiecken, von regulären Fünfecken und Sechsecken, von regulären Dreiecken, Vierecken und Fünfecken u. s. w. Man nennt dergleichen Körper archimedische, während die regulären Körper auch wohl pythagoräische oder platonische genannt werden. Eine zweite verwandte Gruppe wird von solchen Körpern

*) Der Beweis, daß die fünf regulären Polyeder wirklich existiren, ist in §. 79 gegeben.

Fig 13.



gebildet, deren Gränzebenen congruente Rhomben ſind. Unter dieſen ſind beſonders zu bemerken das von ſechs Rhomben begränzte Rhomboeder und das von zwölf Rhomben begränzte Rhombendodecaeder.

Verſchiedene Körperformen aus den erwähnten zwei Gruppen haben zwar eine große Bedeutung für die Kryſtallographie, jedoch kann hier nicht näher auf dieſelben eingegangen werden.

§. 50. Lehrſatz.

Bezeichnet man für ein beliebiges (nicht nothwendig reguläres) Polyeder die Anzahl der Kanten mit K, die der Ecken mit E, die der Flächen mit F, ſo iſt:

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Er beruhet darauf, daß bei einer geſchloſſenen gebrochenen Linie die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Kanten (Seiten) iſt, bei einer ungeſchloſſenen aber um 1 größer. Setzt man nun ein Polyeder aus ſeinen Gränzebenen zuſammen, ſo fügt ſich jede neu hinzutretende Ebene an die bereits vorhandenen in einer geraden, oder in einer ungeſchloſſenen gebrochenen Linie an, und nur die letzte, welche den Raum völlig abſchließt, macht hiervon eine Ausnahme.

Zählt man während des Zuſammenſetzens die mit jeder neuen Ebene hinzutretenden Ecken und Kanten, ſo hat zwar jede Ebene gleich viel Ecken und Kanten, aber es dürfen diejenigen nicht mit in Rechnung kommen, die ſich an bereits vorhandene anſchließen. Die Anzahl der ſo wegfallenden Ecken iſt aber nach dem Geſagten für jede hinzugefügte Ebene um 1 größer als die Anzahl der wegfallenden Kanten, und mit jeder neu hinzutretenden Ebene, von der zweiten bis zur vorletzten, wird

der Unterſchied zwiſchen Kanten und Ecken um 1 größer. Bei einem Körper von F Flächen iſt alſo die Anzahl der Kanten um F—2 größer als die Anzahl der Ecken, und folglich iſt $E + F - 2 = K$, oder $E + F = K + 2$.

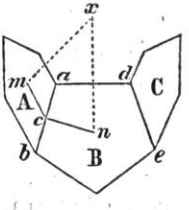
Anm. Der Beweis ſtützt ſich darauf, daß ſich jede Gränzebene eines Polyeders, mit Ausnahme der letzten, in einer einzigen ungeſchloſſenen Linie anſetzen läßt, gilt folglich auch nur für ſolche Polyeder, bei denen dies der Fall iſt, für ſogenannte Euler'ſche Polyeder, zu denen indeß alle in den früheren §§. beſprochenen Polyeder gehören. Es giebt aber auch Körper, die ſich anders verhalten. Setzt man z. B. einen Würfel auf einen größeren, ſo daß ſich die Kanten nirgends berühren, ſo iſt der entſtandene Körper kein Euler'ſches Polyeder, und es iſt folglich der Lehrſatz dieſes §. auf ihn nicht anwendbar.

Es kann hierbei noch folgende Uebungsaufgabe geſtellt werden: Wie iſt der gegebene Beweis abzuändern, wenn man z. B. bei einem Prisma erſt die Seitenebenen zuſammenſetzt und dann oben und unten mit den Grundebenen abſchließt, alſo zweimal in einer geſchloſſenen gebrochenen Linie?

§. 51. Lehrſatz.

In jedem regulären Polyeder giebt es einen Punkt, der gleichweit von allen Ecken, wie auch gleichweit von allen Gränzebenen entfernt iſt.

Fig. 14.



Conſtruction. Von zwei zuſammenſtoßenden Gränzebenen ſuche man die Mittelpunkte und errichte in dieſen Punkten auf jeder derſelben eine Senkrechte. Iſt*) (Fig. 14.) ab die gemeinſchaftliche Kante der Ebenen A und B, c die Mitte derſelben, und ſind m und n die zwei Mittelpunkte von A und B, ſo ſtehen mc und nc ſenkrecht auf ab; folglich iſt $\sphericalangle$ mcn der Neigungswinkel der Ebenen A und B; die Ebene mcn ſteht alſo ſenkrecht auf denſelben, und die erwähnten beiden Senkrechten, die auf A und B in den Punkten m und n errichtet werden, liegen in der Ebene mcn. Verlängert man nun die beiden Senkrechten, ſo müſſen ſie ſich ſchneiden, da mcn ein hohler Winkel iſt. Ihr Schneidungspunkt x aber iſt der geſuchte Punkt, der Mittelpunkt des Polyeders.

Beweis. Verbindet man x mit allen Ecken der Ebenen A und B, ſo erhält man dadurch zwei gleichſeitige Pyramiden (§. 10, 2), die zugleich regulär ſind (§. 35), ſo daß alſo alle Flächenwinkel, welche die Seitenebenen mit der Grundebene bilden, einander gleich ſind (§. 36). Aus

*) Es iſt der Deutlichkeit wegen der Figur ein Dodecaeder zu Grunde gelegt, jedoch hat dies keinen Einfluß auf das Weitere.

der Congruenz der Dreiecke xcm und xcn folgt aber, daß jeder dieser Winkel gleich der Hälfte des Neigungswinkels mcn ist. Die beiden Pyramiden sind also congruent. Verbindet man nun ferner x mit allen Ecken der Ebene C, so erhält man eine neue Pyramide, welche mit der zu B gehörenden übereinstimmt: in den congruenten regulären Grundebenen B und C, in der gemeinschaftlichen Seitenebene xcd, und in dem Flächenwinkel, den diese Seitenebene mit jeder der beiden Grundebenen bildet. (Es bildet xde mit B den Winkel $\frac{1}{2}$mcn, und folglich ist der Winkel, den xde mit C bildet, gleich der andern Hälfte des Winkels mcn.) Die beiden Pyramiden lassen sich daher so ineinander schieben, daß alle Eckpunkte auf einander fallen; sie sind also congruent, und die zur Grundebene C gehörende Pyramide ist ebenfalls regulär. Verbindet man ferner x mit den übrigen Eckpunkten des Polyeders, so läßt sich der gegebene Beweis wiederholen, und es sind folglich sämmtliche Pyramiden, deren Grundebenen die Gränzebenen des Polyeders sind, und deren Spitzen in x liegen, einander congruent und sind regulär. Daraus ergiebt sich, daß alle Seitenkanten und ferner alle Höhen derselben einander gleich sind, oder daß x von allen Ecken und von allen Gränzebenen des Polyeders gleich weit entfernt ist.

Anm. Aus dem gegebenen Beweise folgt noch, daß die auf den Mittelpunkten aller Gränzebenen errichteten Senkrechten und ebenso die Halbirungsebenen aller Flächenwinkel sich in einem Punkte schneiden; ferner, daß die Linie xa (oder eine ähnliche) mit allen in a zusammenstoßenden Kanten denselben Winkel bildet und gegen alle in a zusammenstoßenden Gränzebenen gleiche Neigung hat.

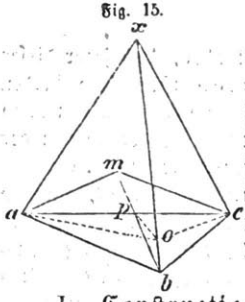
§. 52. Aufgabe.

Es soll der Neigungswinkel v bestimmt werden, der von zwei sich in einer Kante schneidenden Gränzebenen eines regulären Polyeders gebildet wird. Gegeben sind die Anzahl n der in einer Ecke zusammenstoßenden regulären Figuren, ferner der Umfangswinkel α einer jeden derselben.

Auflösung. Man schneide eine Ecke des Polyeders so ab, daß das abgeschnittene Stück eine reguläre Pyramide bildet;*) die Grundebene derselben ist folglich ein reguläres neck, dessen Mittelpunkt zugleich Fußpunkt für die Höhe der Pyramide ist. Es seien nun (Fig. 15.) xab und xbc zwei Seiten dieser Pyramide, m der Mittelpunkt der

*) Es ist dies der Fall, wenn die Ebene senkrecht auf der Linie steht, welche den Mittelpunkt des Polyeders mit der Spitze der betreffenden Ecke verbindet.

Fig. 15.



Grundebene, ſo daß alſo $\sphericalangle amb = \sphericalangle bmc = (360^0 : n)$, und $\sphericalangle axb = \sphericalangle bxc = \alpha$ iſt. Fällt man nun aus c und a zwei Senkrechten auf xb, ſo treffen dieſe denſelben Punkt o in xb und ſind außerdem gleich groß. Der Winkel $aoc = v$ iſt aber alsdann der geſuchte Neigungswinkel. Derſelbe läßt ſich nun ebenſowohl conſtruiren wie berechnen.

I. Conſtruction. Man lege die in (Fig. 15.) vorkommenden Dreiecke (d. h. ihnen ähnliche) in eine Ebene. Zunächſt conſtruire man die beiden gleichſchenkligen Dreiecke amb und bmc, für welche der an der Spitze m liegende Winkel bekannt iſt ($360^0 : n$). Dadurch erhält man die Linien ab und ac. Ueber der Grundlinie ab conſtruire man wiederum ein gleichſchenkliges Dreieck axb, deſſen Winkel $axb = \alpha$ iſt; dadurch erhält man die Senkrechte ao. Conſtruirt man endlich noch ein gleichſchenkliges Dreieck über der Grundlinie ac, ſo daß jeder Schenkel gleich ao iſt, ſo ſchließen die beiden Schenkel den geſuchten Winkel v ein. Der Beweis ergiebt ſich unmittelbar aus der Conſtruction.

II. Berechnung. Da m, a, c und b in derſelben Ebene liegen, und ſowohl mac, wie bac gleichſchenklige Dreiecke ſind, ſo iſt, wenn man m mit b durch die Linie mpb verbindet, $ap = pc$ und $\sphericalangle bpc = R$; da ferner auch oac ein gleichſchenkliges Dreieck iſt, ſo iſt auch $\sphericalangle opc = R$, und $\sphericalangle poc = \frac{1}{2} v$.

Nun iſt $\sin poc = \sin \frac{1}{2} v = \frac{pc}{oc}$.

Hierbei iſt $pc = bc . \sin cbp = bc . \cos \frac{1}{2} bmc = bc . \cos \frac{180^0}{n}$,

daher $\sin \frac{1}{2} v = \frac{bc}{oc} . \cos \frac{180^0}{n} = \cos \frac{180^0}{n} : \frac{oc}{bc}$.

Ferner iſt $\frac{oc}{bc} = \sin cbo = \cos \frac{1}{2} bxc = \cos \frac{1}{2} \alpha$,

alſo ſchließlich $\sin \frac{1}{2} v = \cos \frac{180^0}{n} : \cos \frac{1}{2} \alpha$.

Aus dieſer Formel erhält man den Flächenwinkel:

1) des Tetraeders $= 70^0\ 31'\ 43{,}62''$,
2) des Hexaeders $= 90^0$,
3) des Octaeders $= 109^0\ 28'\ 16{,}38''$,
4) des Dodecaeders $= 116^0\ 33'\ 54{,}12''$,
5) des Icoſaeders $= 138^0\ 11'\ 22{,}82''$.

F. Die Kugel.

§. 53. Erklärung.

Eine in sich zurücklaufende gekrümmte Fläche, deren Punkte sämmtlich von einem innerhalb liegenden Punkte gleiche Entfernung haben, heißt Kugelfläche; der von ihr begränzte Körper heißt eine Kugel. Die Ausdrücke: Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Secante u. s. w. bedürfen keiner neuen Erklärung.

§. 54. Lehrsatz.

Jede durch eine Kugel hindurchgehende Ebene schneidet die Oberfläche derselben in einer Kreislinie.

Beweis. Da der Mittelpunkt der Kugel von allen Punkten der Durchschnittslinie gleiche Entfernung hat, und da ferner alle diese Punkte in einer Ebene liegen, so folgt der Beweis aus §. 10, 3.

Anm. Der Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene wird ein Kugelkreis genannt; derselbe hat zur Kugel dieselbe Beziehung, wie eine Sehne zum Kreise.

§. 55. Lehrsätze.

1) Die aus dem Kugelmittelpunkte auf einen Kugelkreis gefällte Senkrechte trifft den Kreismittelpunkt.

2) Die auf dem Mittelpunkte eines Kugelkreises errichtete Senkrechte geht durch den Kugelmittelpunkt.

3) Gleiche Kugelkreise haben gleiche Abstände vom Kugelmittelpunkte, und umgekehrt.

4) Der größere Kugelkreis liegt dem Kugelmittelpunkte näher als der kleinere, und umgekehrt.

5) Ein durch den Kugelmittelpunkt gelegter Kreis ist größer als jeder andere nicht durch diesen Punkt gehende Kreis.

Anm. 1. Die Beweise ergeben sich theils aus §. 10, theils werden sie in derselben Art geführt, wie die der entsprechenden planimetrischen Sätze, da man statt der Kreise nur ihre Radien zu berücksichtigen braucht.

Anm. 2. Der Lehrsatz 2) läßt sich benutzen, um den Kugelmittelpunkt zu finden. Errichtet man auf den Mittelpunkten zweier nicht parallelen Kugelkreise je eine Senkrechte, so schneiden sich diese Senkrechten im Kugelmittelpunkte.

§. 56. Lehrsatz.

Zwei sich schneidende Kugeln schneiden sich in einem Kreise.

Beweis. Durch drei Schneidungspunkte a, b, c lege man eine Ebene. Diese schneidet jede der beiden Kugelflächen in einer Linie, welche die um das Dreieck abc gelegte Kreislinie ist (§. 54); sie ist folglich beiden Kugelflächen gemeinschaftlich und ist ihre Schneidungslinie.

Anm. 1. Aus diesem Satze und aus §. 55. 1) folgt, daß die Centrale senkrecht auf dem gemeinschaftlichen Kugelkreise steht. — Verlängert man den Durchmesser einer Kugel über die Kugeloberfläche hinaus und zieht von einem beliebigen Punkte desselben gleich lange Linien nach der Kugelfläche, so liegen die Treffpunkte in einer Kreislinie. Es lassen sich daher Kreise mit dem Cirkel ebenso leicht auf einer Kugel construiren, wie auf einer Ebene.

Anm. 2. Als Uebungsaufgaben lassen sich hier anknüpfen: Gerade Cylinder und gerade Kegel schneiden eine Kugelfläche in Kreislinien, wenn ihre Axen durch den Kugelmittelpunkt gehen.

§. 57. Erklärung.

Kugelkreise, deren Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfallen, heißen größte Kreise oder Hauptkreise; die anderen heißen kleinere oder Nebenkreise. Die Linie, welche auf dem Mittelpunkte eines beliebigen Kugelkreises senkrecht steht, nennt man die Axe, und die zwei Punkte, in welchen die Kugelfläche von der Axe geschnitten wird, die Pole des Kreises. Kugelkreise, welche dieselbe Axe haben, heißen Parallelkreise, und alle Hauptkreise, welche durch die Pole dieser Parallelkreise gehen, heißen Meridiane. Der Theil einer Kugelfläche, der zwischen zwei Parallelkreisen liegt, wird Zone genannt; der von einem Kugelkreise begränzte Theil der Kugelfläche heißt Calotte oder Haube. Eine körperliche Zone ist begränzt von einer Zone und den zwei zugehörigen Parallelkreisen, ein Kugelabschnitt von einer Calotte und dem zugehörigen Kugelkreise, ein Kugelausschnitt von einer Calotte und dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, und dessen Grundebene der Kugelkreis ist, welcher die Calotte begränzt. Die Höhe einer Zone ist der Abstand der beiden begränzenden Parallelkreise, die Höhe einer Calotte die aus dem Pole nach dem begränzenden Kugelkreise gefällte Senkrechte.

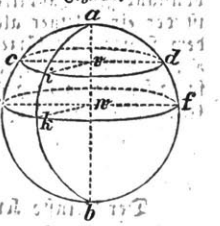
§. 58. Lehrsätze.

1) Die zwischen denselben zwei Meridianen liegenden Bogen von Parallelkreisen verhalten sich wie ihre Radien.

2) Die zwischen denselben zwei Parallelkreisen liegenden Bogen von Meridianen sind einander gleich.

Beweis zu 1). Es seien (Fig. 16.) aceb und aikb zwei Meridiane, cid und ekf zwei Parallelkreise, v und w ihre Mittelpunkte, so ist $\angle cvi = \angle ewk$, weil die Schenkel paarweise parallel sind. Da nun Bogen, welche in verschiedenen Kreisen zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören, sich wie ihre Radien verhalten, so ergiebt sich die Proportion:

Fig. 16.



$$ci : ek = vi : wk.$$

Beweis zu 2). Die Vierecke vcew und vikw (Fig. 16.) sind congruente Trapeze. Da folglich die Sehnen ce und ik einander gleich sind, so müssen es ebenso die Bogen ce und ik, wie auch die zugehörigen Mittelpunktswinkel sein.

Anm. Kennt man (Fig. 16.) den Winkel iwk, so erhält man $iv = iw \sin awi$, oder $iv = iw \cos iwk$, folglich $ci = ek \cdot \cos iwk$. Für die Längen- und Breitengrade auf der Erde ergiebt sich daher, wenn man die Abplattung unberücksichtigt läßt, daß die Breitengrade einander gleich sind, die Längengrade aber abnehmen in dem Verhältniß der Cosinus der Breiten.

§. 59. Lehrsatz.

Ist ein von zwei beliebigen Punkten begränzter Bogen eines Hauptkreises kleiner als der halbe Umfang, so ist er kleiner als jeder von denselben Punkten begränzte Bogen eines Nebenkreises.

Beweis. Es sei (Fig. 17.) acb der Bogen des Hauptkreises, adb der des Nebenkreises; m und n seien die zugehörigen Mittelpunkte. Denkt man sich nun die Ebene adbn um die Sehne ab herumgedreht, bis sie mit der Ebene acbm zusammenfällt, bei welcher Drehung sich die Länge des Bogens adb natürlich nicht ändern kann, so muß die gebrochene Linie anb von amb umschlossen werden, da der Nebenkreis einen kleineren Radius hat, als der Hauptkreis. Alsdann ist:

Fig. 17.

$$an > am - nm, \text{ daher auch}$$
$$an > cm - nm, \text{ oder}$$
$$an > cn.$$

Der mit dem Radius na in der Ebene acbm gezogene Kreisbogen muß also den Bogen acb einschließen und die durch adb angedeutete Lage haben, folglich auch größer sein als Bogen acb.

Anm. 1. Der Bogen eines Hauptkreises ist die kürzeste Verbindungslinie auf der Kugeloberfläche für zwei gegebene Punkte. Ein auf einer Kugel liegender stark angespannter Faden folgt daher der Richtung eines Hauptkreises, ebenso ein Schiff, welches auf dem kürzesten Wege nach einem bestimmten Punkte hinsegeln will.

Anm. 2. Legt man durch zwei Punkte a und b einer Kugelfläche einen vollständigen Hauptkreis, so erhält man zwei Bogen a b. Im Allgemeinen ist der eine kleiner als der halbe Umfang, der andere größer; jener ist nach dem Obigen die kürzeste Verbindungslinie auf der Kugelfläche für die Punkte a und b, dieser folglich die längste. Sind die beiden Bogen einander gleich, so lassen sich nur größte Kreise durch a und b legen, weil diese alsdann die Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind.

§. 60. Zusatz.

Der kleinste Kreisbogen, der auf einer Kugelfläche zwischen zwei gegebenen Punkten gezogen werden kann, heißt die sphärische Entfernung derselben, während man die zwischen beiden Punkten gezogene Sehne die geradlinige Entfernung nennt.

Anm. Da zu gleichen sphärischen Entfernungen auch gleiche geradlinige gehören, so ist man dadurch in Stand gesetzt, vermittelst des Cirkels auf einer Kugelfläche ähnliche Constructionen auszuführen, wie auf einer Ebene. Als Beispiele können die Aufgaben benutzt werden, einen gegebenen Bogen zu halbiren, zu einem gegebenen Kugelkreise die Pole zu finden.

§. 61. Erklärung.

Legt man an einen Hauptkreis (in der Ebene desselben) eine Tangente, so kann dieselbe die Kugelfläche nur in einem Punkte berühren; sie ist daher auch eine Tangente für alle die Nebenkreise, welche nur diesen einen Punkt mit dem Hauptkreise gemeinschaftlich haben. Durch denselben Punkt lassen sich aber noch unzählige andere Hauptkreise legen, und an jeden eine andere Tangente. Da nun alle diese Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser der Hauptkreise senkrecht stehen, so liegen sie in einer Ebene, und diese Ebene ist folglich eine berührende Ebene oder Tangentialebene. Dieselbe ist ihrer Lage nach durch zwei jener Tangenten bestimmt.

Anm. Von einem Punkte außerhalb einer Kugel lassen sich unendlich viele Tangenten an dieselbe ziehen Die Berührungspunkte liegen alsdann in einer Kreislinie, die Tangenten im Mantel eines Kegels, dessen Tangentialebenen zugleich auch die Kugel berühren. — Durch eine außerhalb einer Kugel gegebene Linie a lassen sich nur zwei Ebenen hindurchlegen, welche die Kugel berühren. Man erhält dieselben ihrer Lage nach, wenn man einen Hauptkreis construirt, dessen Ebene auf a senkrecht steht, und aus dem Punkte, in welchem a von dieser Ebene geschnitten wird, zwei Tangenten an den Hauptkreis legt: durch jede dieser Tangenten in Verbindung mit der Linie a ist eine der beiden Tangentialebenen bestimmt.

§. 62. Erklärung.

Um ein gegebenes Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn irgend ein Punkt von allen Eckpunkten des Polyeders die nämliche Ent-

fernung hat. Dies ist der Fall, wenn um jede Gränzebene des Polyeders ein Kreis beschrieben werden kann, und wenn sich die Axen aller dieser Kreise in einem Punkte schneiden. (Vergleiche §. 10, 2 und §. 55, 2.)

In ein gegebenes Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn irgend ein Punkt von allen Gränzebenen des Polyeders die nämliche Entfernung hat. Dies ist der Fall, wenn die Halbirungsebenen sämmtlicher Flächenwinkel des Polyeders sich in einem Punkte schneiden. (Vergl. §. 17, 3.)

§. 63. Zusatz.

Es läßt sich eine Kugel beschreiben:

1) in und um jedes reguläre Polyeder,

2) in und um jede dreiseitige Pyramide,

3) in und um jede reguläre Pyramide, (also auch in und um jeden geraden Kegel),

4) um jedes gerade Prisma, wenn sich um die Grundebene ein Kreis legen läßt, (also auch um jeden geraden Cylinder),

5) in jedes gerade Prisma, wenn sich in die Grundebene ein Kreis beschreiben läßt, und wenn die Höhe des Prisma gleich dem Durchmesser dieses Kreises ist, (also auch in jeden geraden Cylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundebene ist).

Beweis zu 1). Er folgt aus §. 51.

Beweis zu 2). Um jedes der vier begränzenden Dreiecke läßt sich ein Kreis legen. Ferner schneiden sich die Senkrechten, welche auf den Mittelpunkten zweier dieser Kreise errichtet werden (§. 51), und ihr Schneidungspunkt ist daher von allen vier Ecken gleichweit entfernt.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich daraus, daß die Halbirungsebenen dreier Flächenwinkel der Pyramide sich in einem Punkte schneiden müssen, der also (§. 17, 3) von allen Gränzebenen gleichweit entfernt ist.

Anm. Die Beweise für die übrigen Sätze können ihrer Leichtigkeit wegen übergangen werden.

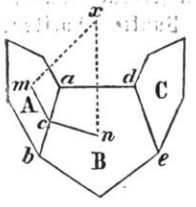
§. 64. Aufgabe.

Es sollen die Radien r und ρ der um und in die regulären Polyeder beschriebenen Kugeln bestimmt werden.

Auflösung. Man kennt von jedem regulären Polyeder die Anzahl n der in einer Ecke zusammenstoßenden regulären Figuren und den Umfangswinkel α derselben. Aus diesen Größen erhält man aber (nach

§. 52) den Flächenwinkel v des Polyeders und ferner, wenn man die Kante des Polyeders durch s bezeichnet, auch die Radien r_1 und ϱ_1 der um und in eine Gränzebene beſchriebenen Kreiſe (Planim. §§. 159 und 160). Legt man nun Fig. 14 und die in §. 51 gegebene Conſtruction zu Grunde, ſo iſt (Fig. 18.):

Fig. 18.



$$xa = xb = v;\ xm = xn = \varrho;\ \sphericalangle mcx = \frac{1}{2}r;$$

$$ma = r_1;\ mc = \varrho_1;\ ab = s.$$

Für dieſe Größen erhält man nun folgende Gleichungen:

1) $xa^2 = xm^2 + ma^2$, oder $r^2 = \varrho^2 + r_1^2$.

Setzt man in dieſer Gleichung $xm = cm.tg\,mcx$, oder $\varrho = \varrho_1.tg\,\frac{1}{2}v$, ſo erhält man:

2) $xa^2 = cm^2.tg^2\frac{1}{2}v + ma^2$, oder $r^2 = \varrho_1^2.tg^2\frac{1}{2}v + r_1^2$.

Setzt man ferner $cm^2 = ma^2 - ca^2$, oder $\varrho_1^2 = r_1^2 - \frac{1}{4}s^2$, ſo ergiebt ſich ſchließlich:

3) $xa^2 = (ma^2 - ca^2)tg^2\frac{1}{2}v + ma^2$, oder $r^2 = (r_1^2 - \frac{1}{4}s^2)tg^2\frac{1}{2}v + r_1^2$.

Außerdem erhält man aus 1): $\varrho^2 = r^2 - r_1^2$, oder

4) $\varrho^2 = (r_1^2 - \frac{1}{4}s^2)\,tg^2\frac{1}{2}v$.

Durch die Gleichungen 3) und 4) iſt die Aufgabe gelöſt. Soll in denſelben ſtatt des Winkels v der Winkel α vorkommen, ſo erhält man aus §. 52:

$$5)\quad tg^2\frac{1}{2}v = \frac{\cos^2(180^0:n)}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2(180^0:n)}.$$

Für die einzelnen regulären Polyeder laſſen ſich nun die geſuchten Größen leicht aus den Gleichungen (3—5) berechnen.

I. Das Tetraeder. Es iſt $r_1^2 = \frac{s^2}{3}$; $\alpha = 60$;*) $n = 3$;

*) Die Abkürzung 60 ſtatt 60^0 und ähnliche in dieſem §. können keinen Irrthum veranlaſſen.

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{\cos^2 60}{\cos^2 30-\cos^2 60}=\frac{1}{4}^{*}):\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{3}-\frac{s^2}{4}\right).\frac{1}{2}+\frac{s^2}{3}=\frac{3}{8}s^2$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};\quad \varrho=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

II. Das Hexaeder. Es ist $r_1{}^2=\frac{s^2}{2}$; $\alpha=R$; $n=3$;

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=1.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{2}-\frac{s^2}{4}\right)+\frac{s^2}{2}=\frac{3}{4}s^2$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{3};\quad \varrho=\frac{s}{2}.$$

III. Das Octaeder. Es ist $r_1{}^2=\frac{s^2}{3}$; $\alpha=60$; $n=4$;

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=2.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{3}-\frac{s^2}{4}\right).2+\frac{s^2}{3}=\frac{s^2}{2}$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{2};\quad \varrho=s\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

IV. Das Dodecaeder. Es ist $r_1{}^2=s^2.\frac{5+\sqrt{5}}{10}$; $\alpha=108$; $n=3$;

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}.\frac{5-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.^{**})$$

---

*) Vergl. Einleitung zur Trigonometrie.
**) Vergl. Arithm. II., S. 16.

Also ist $r^2 = \left(s^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}s^2\right) \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + s^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10} =$

$= s^2 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{8}$,

$\varrho^2 = s^2\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = s^2 \cdot \frac{25+11\sqrt{5}}{40}$, folglich

$r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}$; $\varrho = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

V. Das Icosaeder. Es ist $r_1^2 = \frac{s^2}{3}$; $\alpha = 60$; $n = 5$;

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v = \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Also ist $r^2 = \left(\frac{s^2}{3} - \frac{s^2}{4}\right) \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{s^2}{3} = s^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{8}$,

$\varrho^2 = s^2 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{24}$, folglich

$r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; $\varrho = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{s}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.*)

Anm. Die Auflösung kann auch ohne Hülfe der Trigonometrie auf geometrisch-algebraischem Wege gefunden werden. Sehr leicht ergiebt sie sich für das Hexaeder und Octaeder.

§. 65. Erklärung.

Schneiden sich zwei Hauptkreise auf einer Kugelfläche in den Punkten a und b, ihre Ebenen also im Durchmesser ab, so theilen diese die Kugel in vier körperliche Zweiecke, die Kugelfläche in vier Kugelzweiecke oder sphärische Winkel, und es heißen alsdann die Punkte a und b die Pole dieser Zweiecke. Die Größe

*) Vergl. Arithm. II. S. 16, II.

eines beliebigen Zweiecks hängt offenbar von dem Flächenwinkel ab, den die beiden ſich ſchneidenden Hauptkreiſe bilden. Gehören nämlich zu zwei körperlichen Zweiecken gleiche Flächenwinkel, und denkt man ſich das eine in das andere hineingeſchoben, ſo müſſen ſich die Oberflächen in allen Punkten decken, weil alle Radien einander gleich ſind, und es müſſen alſo auch die zugehörigen Kugelzweiecke congruent ſein. Folglich verhalten ſich Kugelzweiecke, (oder körperliche Zweiecke), wie die zugehörigen Flächenwinkel, und ſie verhalten ſich zur ganzen Kugelfläche, (oder zur ganzen Kugel), wie ihre Flächenwinkel zu 4R. Da nun die Größe eines Flächenwinkels immer durch den zugehörigen Neigungswinkel ausgedrückt werden kann, ſo iſt alſo ein Zweieck ausreichend beſtimmt, wenn man den Neigungswinkel kennt, den die beiden ſich ſchneidenden Hauptkreiſe bilden. Man erhält aber denſelben am einfachſten, wenn man in einem der beiden Pole an jeden dieſer Hauptkreiſe eine Tangente zieht.

Anm. 1. Nach der gegebenen Erklärung iſt ein ſphäriſcher Winkel ein beſtimmter Theil der Kugelfläche. Da es aber in den meiſten Fällen weniger auf dieſe Fläche ankommt, als auf den Neigungswinkel der beiden Hauptkreiſe, ſo verſteht man gewöhnlich unter einem ſphäriſchen Winkel nur den ebenen Winkel, den die im Pole an beide Hauptkreiſe gezogenen Tangenten bilden, und es kann daher ein ſphäriſcher Winkel ebenſo von Bogenſtücken zweier Hauptkreiſe, wie von den Hauptkreiſen ſelbſt gebildet werden. In dem Nachfolgenden ſoll unter einem ſphäriſchen Winkel immer der erwähnte Neigungswinkel verſtanden werden, während da, wo die Größe der Oberfläche zu berückſichtigen iſt, die Bezeichnung Kugelzweieck gebraucht werden ſoll. Demnach kann alſo z. B. geſagt werden, daß in einem Kugelzweiecke zwei gleiche ſphäriſche Winkel einander gegenüber liegen.

Anm. 2. Stehen zwei Hauptkreiſe ſenkrecht auf einem dritten, ſo verhält ſich der zwiſchen jenen Kreiſen liegende Bogen des dritten zum ganzen Kreisumfange, wie der von jenen Kreiſen gebildete ſphäriſche Winkel zu 4R. Dieſer Bogen kann daher ebenfalls zur Beſtimmung des ſphäriſchen Winkels benutzt werden.

§. 66. Erklärung.

Denkt man ſich die Spitze eines körperlichen necks in den Mittelpunkt einer Kugel geſtellt, ſo ſchneiden die Seiten deſſelben die Kugelfläche in Bogen größter Kreiſe. Dieſe Bogen begränzen alsdann auf der Kugelfläche ein ſphäriſches neck und werden Seiten deſſelben genannt; ihre Neigungswinkel heißen einfach Winkel des ſphäriſchen necks.

Anm. 1. Es ergiebt ſich aus dieſer Erklärung und aus vorigem §, daß die Seiten und Winkel eines ſphäriſchen necks durch dieſelben Zahlen ausgedrückt werden können, wie die Seiten und Winkel des zugehörigen körperlichen necks. Wo es daher nur auf die Werthe dieſer Stücke ankommt, kann man das eine für das andere ſetzen, und man kann alſo z. B., wenn

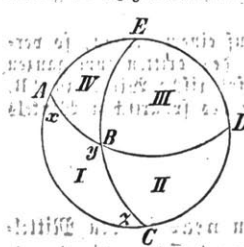
die Stücke eines ſphäriſchen Ecks beſtimmt werden ſollen, bei der Auflöſung ein körperliches Eck zu Grunde legen.

Anm. 2. Die Größe einer Seite eines ſphäriſchen Ecks kann durch ihre wirkliche Bogenlänge ausgedrückt werden, wenn man außerdem den Radius kennt; einfacher iſt es jedoch, nur die Größe des zugehörigen Mittelpunktswinkels anzugeben, da alsdann die Uebereinſtimmung zwiſchen körperlichen und ſphäriſchen Ecken eine vollſtändige iſt, und man die wirkliche Bogenlänge leicht berechnen kann, wenn man den Radius kennt.

§. 67. Erklärung.

Drei Hauptkreiſe, welche nicht denſelben Durchmeſſer haben, ſchneiden ſich ſo, daß acht körperliche Dreiecke und eben ſoviel ſphäriſche entſtehen. Je zwei dieſer körperlichen Dreiecke ſind Scheiteldreiecke und deshalb ſymmetriſch. Die zugehörigen ſphäriſchen Dreiecke ſtimmen folglich in allen Seiten und Winkeln überein, ſind aber nicht congruent, da die Reihenfolge der einzelnen Stücke nicht die nämliche iſt; man nennt ſie Gegendreiecke. Jeder der drei Hauptkreiſe theilt alſo die Kugelfläche in zwei Halbkugeln der Art, daß die vier ſphäriſchen Dreiecke der einen die Gegendreiecke von den vier ſphäriſchen Dreiecken der anderen ſind. Die vier auf einer Halbkugel liegenden ſphäriſchen Dreiecke ſtehen ebenfalls in Abhängigkeit von einander, ſo daß man aus den Seiten und Winkeln des einen Dreiecks die der anderen leicht beſtimmen kann.

Fig. 19.



Sind nämlich (Fig. 19.) die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC gegeben, und zwar die Seiten durch die zugehörigen Mittelpunktswinkel, ſo ergiebt ſich für das Dreieck BDC;

1) W. BDC = x,
2) W. DBC = 2R — y,
3) W. BCD = 2R — z,
4) BD = 2R — AB,
5) DC = 2R — AC.

Für die beiden anderen Dreiecke erhält man daſſelbe Reſultat, daß ihre Seiten und Winkel gleich denen des Dreiecks ABC, oder gleich den Supplementen derſelben ſind.

§. 68. Zuſatz.

Die für die körperlichen Dreiecke aufgeſtellten Lehrſätze gelten auch für die ſphäriſchen und brauchen daher nicht wiederholt zu werden. Einer beſonderen Anführung bedarf aber der Lehrſatz des folgenden §.

§. 69. Lehrſatz.

Zwei ſphäriſche Dreiecke, welche Gegendreiecke ſind, haben gleiche Oberfläche.

Fig. 20.

Beweis. Legt man (Fig. 20.) die beiden Gegendreiecke ABC und ADE ſo aufeinander, daß zwei gleiche Winkel ſich decken, ſo erhalten die gleichen Seiten, welche dieſe Winkel einſchließen, (AC und AE, AB und AD) eine entgegengeſetzte Lage, und es findet daher nur für das Stück ABFD eine Congruenz ſtatt. Nun ſind aber die übrig bleibenden Dreiecke FDC und FBE, die in den Winkeln übereinſtimmen, ebenfalls Gegendreiecke, (§. 26, Anm.), und es iſt alſo wiederum ein Theil des einen congruent einem Theile des anderen, während die übrig bleibenden Reſte Gegendreiecke ſind. Daher läßt ſich daſſelbe Verfahren unendlich oft wiederholen, und da hierbei die Reſte verſchwindend klein werden, ſo ergiebt ſich daraus die Gleichheit der Dreiecke ABC und ADE.

Anhang zu dem Bisherigen.

Von den Projectionen.

Erklärung. Nimmt man eine Ebene E an und außerhalb derſelben einen Punkt a, und fällt man aus a auf E die Senkrechte aa', ſo nennt man a' die **Projection** von a auf E, aa' die **projicirende Linie**, E die **Projectionsebene**.

Die Projection einer Linie wird erhalten, wenn man ſämmtliche Punkte derſelben projicirt. Statt einer projicirenden Linie hat man in dieſem Falle eine projicirende Ebene oder Fläche. Die Projection einer geraden Linie iſt im Allgemeinen wieder eine gerade Linie, weil die projicirende Fläche eine Ebene iſt, von welcher die Projectionsebene in einer geraden Linie geſchnitten werden muß. Die Projection einer geraden Linie erhält man alſo einfach dadurch, daß man die beiden Endpunkte derſelben projicirt und die erhaltenen Punkte durch eine gerade Linie verbindet. Steht eine gerade Linie ſenkrecht auf der Projectionsebene, ſo iſt ihre Projection ein Punkt.

Die Projection einer gekrümmten Linie ist im Allgemeinen ebenfalls eine gekrümmte Linie; sie ist jedoch eine Gerade, wenn alle Punkte der projicirten Linie in einer Ebene liegen, die auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Die Projection einer Figur wird erhalten, wenn man sämmtliche Punkte des Umfanges projicirt. Die projicirende Fläche bildet alsdann einen sogenannten allgemeinen Cylinder. Ist indeß eine Figur von geraden Linien begränzt, so hat man nach dem Vorigen nur nöthig, die Ecken zu projiciren.

Anm. Punkte und Linien können, wie auf eine Ebene, so auch auf eine gerade Linie projicirt werden, wenn sie mit derselben in einer Ebene liegen.

Lehrsatz. Sind zwei gerade Linien x und y einander parallel, stehen aber nicht senkrecht auf der Projectionsebene, so sind auch ihre Projectionen einander parallel.

Beweis. Da nicht nur x und y, sondern auch alle aus x und y gezogenen projicirenden Linien unter einander parallel sind, so müssen es auch die beiden projicirenden Ebenen sein (§. 4), und diese schneiden folglich die Projectionsebene in parallelen Linien.

Lehrsatz. Schneiden sich zwei Linien (in einem Punkte a), so schneiden sich auch ihre Projectionen.

Beweis. Die projicirende Linie des Schneidungspunktes a, wie auch die Projection a' desselben, ist beiden projicirenden Ebenen gemeinschaftlich, und es muß daher a' der Schneidungspunkt der beiden Projectionen sein.

Aufgabe 1. Es soll die Projection a'b' einer geraden Linie ab der Größe nach bestimmt werden.

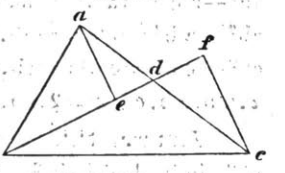
Auflösung. Ist v der Winkel, den ab mit der Projection a'b' bildet (ist also v der Neigungswinkel von ab zur Projectionsebene), so ergiebt sich unmittelbar: $a'b' = ab.\cos v$.

Anm. Ist $\cos v = 1$, also $v = R$, $ab \parallel a'b'$, so ist auch $a'b' = ab$; ist $\cos v = o$, also $v = R$, so ist $a'b' = o$. Ist also eine Linie parallel der Projectionsebene, so ist sie gleich ihrer Projection; bildet sie hingegen mit der Projectionsebene einen spitzen Winkel, so ist die Projection verkürzt und wird zuletzt gleich Null, wenn der Neigungswinkel gleich R ist. Außerdem ergiebt sich aus der gefundenen Gleichung, daß die Projectionen paralleler Linien sich verhalten wie die Linien selbst.

Aufgabe 2. Es soll die Projection a'b'c' eines Dreiecks abc der Größe nach bestimmt werden, wenn letzteres mit der Projectionsebene den Winkel v bildet.

Auflöſung. Es muß ſich (Fig. 21.) aus irgend einer Ecke des Dreiecks abc eine Linie parallel mit der Projectionsebene durch das Dreieck legen laſſen. Iſt bd dieſe Linie, ſo iſt nach voriger Aufgabe bd gleich der Projection b'd'. Die Projectionen a'e' und c'f' der beiden Höhen ae und cf ſind aber verkürzt, und da beide mit der Projectionsebene den Winkel v bilden, ſo iſt $a'e' = ae \cdot \cos v$, $c'f' = cf \cdot \cos v$.

Fig. 21.



Hieraus ergiebt ſich:

$$\triangle a'b'c' = \frac{b'd' \cdot a'e'}{2} + \frac{b'd' \cdot c'f'}{2} =$$

$$= \frac{bd \cdot ae \cdot \cos v}{2} + \frac{bd \cdot cf \cdot \cos v}{2} = \frac{bd \cdot (ae + cf)}{2} \cdot \cos v =$$

$$= \triangle abc \cdot \cos v.$$

Anm. Es läßt ſich die gefundene Gleichung auch auf beliebige n ecke anwenden, und es ergiebt ſich, daß Figuren, die in derſelben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, ſich verhalten wie ihre Projectionen.

Aufgabe 3. Es ſoll die Projection x eines Winkels w der Größe nach beſtimmt werden, wenn die Winkel p und q bekannt ſind, welche die Schenkel deſſelben mit der Projectionsebene bilden.

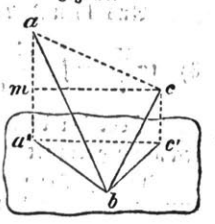
Auflöſung. Legt man durch den Scheitel des Winkels w eine Ebene E' parallel mit der Projectionsebene E, ſo haben die Größen x, p und q für E' dieſelbe Bedeutung wie für E. Projicirt man daher w auf E', ſtatt auf E, ſo erhält man daſſelbe Reſultat.

Es ſei nun in Fig. 22:

$\sphericalangle abc = w$, $\sphericalangle a'bc' = x$, $\sphericalangle aba' = p$, $\sphericalangle cbc' = q$,

und außerdem ſei $mc \parallel a'c'$.

Fig. 22.



Man erhält alsdann:

1) $ac^2 = ab^2 + cb^2 - 2 \cdot ab \cdot cb \cdot \cos w$;

2) $a'c'^2 = a'b^2 + c'b^2 - 2 \cdot a'b \cdot c'b \cdot \cos x$.

Subtrahirt man 2) von 1), ſo ergiebt ſich:

3) $ac^2 - a'c'^2 = (ab^2 - a'b^2) + (cb^2 - c'b)^2 - 2 \cdot ab \cdot cb \cdot \cos w + 2 \cdot a'b \cdot c'b \cdot \cos x$.

In dieser Gleichung ist aber:

$ac^2 - a'c'^2 = am^2 = (aa' - cc')^2 = (ab.\sin p - cb.\sin q)^2;$

$ab^2 - a'b^2 = a'a^2 = (ab.\sin p)^2;$

$cb^2 - c'b^2 = c'c^2 = (cb.\sin q)^2;$

$2.a'b.c'b.\cos x = 2.ab.\cos p.cb.\cos q.\cos x.$

Setzt man diese Werthe in 3) ein, so erhält man:

$ab^2.\sin^2 p + cb^2.\sin^2 q - 2.ab.cb.\sin p.\sin q =$

$ab^2.\sin^2 p + cb^2.\sin^2 q - 2.ab.cb.\cos w + 2.ab.cb.\cos p \cos q \cos x,$

oder $\quad -\sin p \sin q = -\cos w + \cos p \cos q \cos x,$

daher $$\cos x = \frac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}.$$

Damit dies Resultat eine zur logarithmischen Berechnung bequemere Form erhalte, setzt man:

$$1 - \cos x = 1 - \frac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\cos(p-q) - \cos w}{\cos p \cos q};$$ dann ist

1) $$\sin\frac{x}{2}^{*}) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(w+p-q)\,\sin\frac{1}{2}(w-p+q)}{\cos p \cos q}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(s-q)\sin(s-p)}{\cos p \cos q}},$$ wenn man $\frac{1}{2}(w+p+q) = s$ setzt.

Ebenso kann man setzen:

$$1 + \cos x = 1 + \frac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\cos(p+q) + \cos w}{\cos p \cos q};$$ dann ist

2) $$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos(s-w)}{\cos p \cos q}}.$$

Aus 1) und 2) erhält man aber:

3) $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-q)\sin(s-p)}{\cos s \cos(s-w)}}.$$

Jede der drei gefundenen Gleichungen ist zur logarithmischen Berechnung geeignet.

Anm. Die vorliegende Aufgabe findet eine Anwendung bei der Reduction eines Winkels auf den Horizont.

---

*) Vergl. Trigon. §§. 4 und 7.

Zusatz. Soll in Aufgabe 3. der Inhalt J' des Dreiecks a'b'c' ausgedrückt werden durch eine Gleichung, welche die Stücke des Dreiecks abc und die Winkel p und q als gegebene Größen enthält, so ist:

$$2J' = a'b.c'b.\sin x = ab.cb.\cos p.\cos q.\sin x.$$

In dieser Gleichung kann man noch $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ setzen und es durch die eben gefundenen Werthe ausdrücken.

Man kann auch, da $2J = ab.cb.\sin w$ ist, der Gleichung folgende Gestalt geben:

$$J' = J.\frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}.$$

Aufgabe 4. Es soll der Winkel v bestimmt werden, den eine ebene Figur mit der Projectionsebene bildet, wenn man die Winkel w, p und q kennt, welche zwei sich schneidende Linien dieser Figur mit einander und mit der Projectionsebene bilden.

Auflösung. Dieselbe ergiebt sich leicht aus den Aufgaben 2. u. 3. Es ist nämlich nach Aufgabe 3, Zusatz:

$$J' = J.\frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}, \text{ ferner nach Aufgabe 2:}$$

$$J' = J.\cos v, \text{ folglich}$$

$$\cos v = \frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}.$$

Anm. Der Ausdruck $\sin x$ läßt sich nach Aufgabe 3. durch die gegebenen Größen w, p, q ausdrücken.

Erklärung. Soll die Aufgabe gelöst werden, aus einer gegebenen Projection die projicirte Figur zu finden, so hat man in allen Punkten der Projection senkrechte Linien auf der Projectionsebene zu errichten, wodurch man die projicirende Fläche (den Projectionscylinder) erhält. Jeder durch den Projectionscylinder gelegte Querschnitt liefert aber alsdann eine Lösung der Aufgabe, und dieselbe bleibt folglich unbestimmt. Ist jedoch eine Figur auf zwei Ebenen projicirt, die man im Allgemeinen senkrecht zu einander nimmt, so erhält man aus den beiden Projectionen, (dem Grundriß und Aufriß), zwei Projectionscylinder, deren Durchschnittslinie die gesuchte Figur liefert.

Anm. Die Lösung der erwähnten Aufgabe für alle möglichen Fälle bildet einen besonderen Zweig der Mathematik, die beschreibende oder descriptive Geometrie, und wird daher hier übergangen.

Erklärung. Die bisher beschriebene Art des Projicirens, bei welcher sämmtliche projicirende Linien einander parallel sind, nennt man

die orthographiſche. Sie wird vorzüglich bei Bauriſſen, Maſchinen- und ähnlichen Zeichnungen angewendet. Eine zweite Art von Projectionen entſteht dadurch, daß man die projicirenden Linien ſich in einem gegebenen Punkte ſchneiden läßt. Dieſe Linien bilden alsdann einen ſogenannten allgemeinen Kegel, und die geſuchte Projection iſt die Durchſchnittsfigur, welche eine durch den Kegel hindurchgelegte Ebene mit demſelben bildet. Dieſe Art des Projicirens iſt Gegenſtand der Perſpective. Die durchſchneidende Ebene kann eine verſchiedene Lage haben. Sie liegt zwiſchen dem gegebenen Punkte und der zu projicirenden Figur, wenn man eine perſpectiviſche Zeichnung derſelben entwerfen will, d. h. eine ſolche, die möglichſt genau denſelben Eindruck hervorbringt, wie die Figur, wenn man ſie von dem gegebenen Punkte aus betrachtet; ſie liegt jenſeits der Figur, wenn man den Schatten derſelben conſtruiren will.

Zuſatz. Eine beſondere Schwierigkeit bietet die Projection einer Kugelfläche, wenn ſie zugleich ein anſchauliches Bild liefern ſoll, wie dies für Himmelskarten und für geographiſche verlangt wird. Man bedient ſich alsdann der orthographiſchen, oder der centralen, oder der ſtereometriſchen Projection. Die orthographiſche wird am ſeltenſten angewendet. Man benutzt ſie, um z. B. die nördliche oder ſüdliche Halbkugel auf die Ebene des Aequators zu projiciren; hierbei bilden die Projectionen der Parallelkreiſe wiederum Kreiſe, die der Meridiane aber gerade Linien. Der Nachtheil dieſer Methode beſteht darin, daß die in der Nähe des Aequators liegenden Länder u. ſ. w. zu ſtark verkürzt erſcheinen. Bei der centralen Projection ſetzt man das Auge in den Mittelpunkt der Kugel und zieht von demſelben gerade Linien durch alle Punkte der Kugeloberfläche bis zu einer Ebene, welche die Kugel berührt. Man wendet ſie beſonders bei Anfertigung der Himmelskarten an. Bei der ſtereometriſchen Projection, die den Planiglobien zu Grunde liegt, zieht man durch die Ebene des Hauptkreiſes, der die abzubildende Halbkugel begränzt, von allen Punkten dieſer Halbkugel gerade Linien nach dem gegenüberliegenden Pole des Hauptkreiſes.

Anm. Für manche Zwecke iſt es wünſchenswerth, auf den geographiſchen Karten die Parallelkreiſe und Meridiane als gerade, ſich rechtwinklig durchſchneidende Linien zu haben. In dieſem Falle würden aber die Längengrade gleich groß ſein, obwohl ſie in Wirklichkeit nach den Polen hin kleiner werden, und die Größenverhältniſſe würden daher nicht richtig ſein können. Dieſem Uebelſtande kann man jedoch theilweiſe dadurch begegnen, daß man die Breitengrade nach dem Pole hin in demſelben Verhältniſſe wachſen läßt, in welchem die Längengrade abnehmen müßten. Es iſt alsdann das Verhältniß in den Größen der Längen- und Breitengrade richtig wiedergegeben, aber die Länder in der Nähe des Poles laſſen ſich nicht mehr darſtellen. Das eben Geſagte liegt der Projection Mercator's zu Grunde.

Viertes Capitel.

Von der Ausmeſſung der Körper.

A. Beſtimmung der Oberfläche.

§. 70. Erklärung.

Die Oberfläche eines Körpers iſt die Summe ſeiner Gränzflächen und iſt als ſolche zu berechnen. Sind dieſe Gränzflächen völlig unabhängig von einander, ſo läßt ſich ihre Summe auch nicht durch einen geſchloſſenen Ausdruck darſtellen, und man erhält alſo keine beſondere Formel für die Oberfläche; dies iſt hingegen der Fall, wenn die Gränzflächen einander gleich, oder wenn alle von einigen wenigen Größen abhängig ſind.

§. 71. Aufgabe.

Es ſoll die Oberfläche eines regulären Polyeders berechnet werden, deſſen Kante $= s$ iſt.

Auflöſung. Das Tetraeder, das Octaeder und das Icoſaeder ſind begränzt von regulären Dreiecken. Iſt s die Seite, ſo iſt $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ die Höhe eines ſolchen Dreiecks, und $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ der Inhalt deſſelben. Die Gränzebene des Hexaeders iſt $= s^2$, wenn s die Seite iſt. Die Gränzebene des Dodecaeders iſt ein reguläres Fünfeck. Iſt s die Seite deſſelben, ſo iſt der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes $=$

$= \frac{s}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$,*) alſo der Inhalt des regulären Fünfecks $=$

$= \frac{s^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

*) Vergl. Planimetrie §. 160.

Hieraus ergeben sich folgende Resultate:

1) Die Oberfläche des regulären Tetraeders ist gleich $s^2\sqrt{3}$;
2) „ „ „ „ Octaeders „ „ $2s^2\sqrt{3}$;
3) „ „ „ „ Icosaeders „ „ $5s^2\sqrt{3}$;
4) „ „ „ „ Hexaeders „ „ $6s^2$;
5) „ „ „ „ Dodecaeders „ „ $3s^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

§. 72. Aufgabe.

Es soll der Mantel berechnet werden:
1) eines geraden Cylinders,
2) eines geraden Kegels,
3) eines schief abgeschnittenen geraden Cylinders,
4) eines abgekürzten geraden Kegels.

Auflösung zu 1). Ist r der Radius der Grundebene, h die Seite, so ist der Inhalt des Mantels gleich $2rh\pi$ (nach §. 44). Addirt man den Inhalt jeder Grundebene ($r^2\pi$) hinzu, so ist die Gesammtoberfläche gleich $2r\pi h+2r^2\pi=2r\pi(h+r)$.

Auflösung zu 2). Ist r der Radius der Grundebene, s die Seite, so ist der Inhalt des Mantels gleich $rs\pi$ (§. 48). Addirt man den Inhalt der Grundebene ($r^2\pi$) hinzu, so ist die Gesammtoberfläche gleich $rs\pi+r^2\pi=r\pi(s+r)$.

Auflösung zu 3). Ist r der Radius der Grundebene, h die längste, h' die kürzeste Seite des Cylinders, so ist (h—h') die Höhe der abgeschnittenen Klaue. Der Mantel des nicht abgeschnittenen Cylinders ist (nach 1) gleich $2rh\pi$; der Mantel der Klaue ist gleich dem halben Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe, also gleich $r\pi(h-h')$; folglich ist der Mantel des schief abgeschnittenen geraden Cylinders gleich $2rh\pi-r\pi(h-h')=r\pi(h+h')=2r\pi\frac{h+h'}{2}$. Er ist also gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, der dieselbe Grundebene hat wie der schief abgeschnittene, aber als Seite das arithmetische Mittel zwischen der längsten und kürzesten Seite des anderen.*)

*) Die Größe der gesammten Oberfläche läßt sich nicht angeben, weil nur eine Grundebene einen Kreis bildet.

Auflöſung zu 4). Iſt s die Seite des abgekürzten Kegels, R der Radius der größeren, r der Radius der kleineren Grundebene, x die Seite des Ergänzungskegels, ſo iſt der Mantel des vollſtändigen Kegels gleich $R\pi(s+x)$, der des Ergänzungskegels gleich $r\pi x$, alſo der des abgekürzten Kegels gleich $R\pi(s+x)-r\pi x = R\pi s+(R-r)\pi x$. Nun iſt aber $x=\frac{rs}{R-r}$ (§. 37), folglich geht der für den Mantel gefundene Ausdruck über in $s\pi(R+r)$.

Anm. zu 4). Der Mantel eines abgekürzten geraden Kegels iſt gleich einem Trapeze, deſſen Höhe gleich der Seite, und deſſen parallele Seiten gleich den Peripherien der Grundebenen des abgekürzten Kegels ſind.

§. 73. Erklärung.

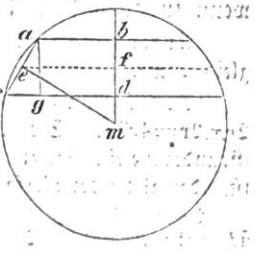
Die Berechnung einer Kugelfläche bietet dadurch eine beſondere Schwierigkeit, daß man dieſe Fläche nicht zu einer Ebene ausbreiten kann, was aber erforderlich iſt, weil nur ebene Figuren (Quadrate) als Gemäße benutzt werden. Denkt man ſich aber durch Parallelkreiſe die Kugelfläche in unendlich viele Zonen von unendlich kleiner Höhe zerlegt, ſo kann man jede Zone betrachten als Mantel eines abgekürzten geraden Kegels, und unter dieſer Vorausſetzung iſt es dann möglich, die einzelnen Zonen und die ganze Kugelfläche zu berechnen.

§. 74. Lehrſatz.

Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h iſt gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, deſſen Höhe ebenfalls h, und deſſen Grundebene gleich einem Hauptkreiſe der Kugel iſt.

Beweis. Bezeichnet man den Kugelradius durch ϱ, die Radien der beiden Parallelkreiſe, von welchen die Zone begränzt wird, durch r und r', ſo iſt der Inhalt der Kugelzone, wenn man ſie als eine Kegelzone betrachtet, deren Seite s und deren Höhe h iſt, gleich $s\pi(r+r')$; ferner iſt der Mantel des erwähnten Cylinders gleich $2\varrho h\pi$. Der Lehrſatz iſt alſo richtig, wenn $s.\frac{r+r'}{2}=\varrho h$ iſt. Es ſei nun Fig. 23. ein Durchſchnitt durch die Kugel, durch die Pole der Parallelkreiſe gehend, ferner ſei $ab=r$, $cd=r'$, $ac=s$, $ag=h$.

Fig. 23.



Halbirt man nun ac und zieht durch den Halbirungspunkt e die Linie ef parallel mit ab, ſo iſt $ef=\frac{1}{2}(r+r')$, und fällt man endlich

aus dem Kugelmittelpunkte m die Senkrechte me auf ac, so ist

$$\triangle mfe \sim \triangle cga,$$

weil $\angle mfe = \angle cga$, $\angle mef = \angle cag$ ist; (letztere haben dasselbe Complement aef).

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$me : ac = ef : ag, \text{ oder}$$

$$1)\quad me : s = \frac{r+r'}{2} : h.$$

Ist nun h so klein, daß die Sehne ac und der Bogen ac, folglich auch die zugehörigen Kegel- und Kugelzonen als zusammenfallend betrachtet werden können, so ist auch $me = \varrho$, und obige Gleichung (1) geht über in:

$$2)\quad \varrho : s = \frac{r+r'}{2} : h, \text{ oder}$$

$$\varrho h = s.\frac{r+r'}{2}.$$

Der Lehrsatz ist also richtig für Kugelzonen von unendlich kleiner Höhe. Da sich aber eine Kugelzone von beliebiger Höhe in Kugelzonen von unendlich kleiner Höhe zerlegen läßt, und da für jede der letzteren der Satz richtig ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Resultate addirt, das Endresultat, daß der Satz für jede Kugelzone gültig ist.

§. 75. Aufgabe.

Es soll die Oberfläche berechnet werden:

1) einer Kugelzone von der Höhe h,
2) einer Calotte von der Höhe h,
3) einer Kugel,

wenn in allen drei Fällen r den Kugelradius bezeichnet.

Auflösung zu 1) und 2). Die Oberfläche ist nach vorigem §. gleich $2r\pi h$.

Auflösung zu 3). Die Oberfläche ist nach vorigem §. gleich $2r\pi.2r = 4r^2\pi$. Sie ist also gleich dem Mantel eines Cylinders, dessen Grundebene ein Hauptkreis, und dessen Höhe ein Durchmesser der Kugel ist, oder gleich der vierfachen Fläche eines größten Kreises.

Anm. Aus 3) ergiebt sich, daß die Oberflächen verschiedener Kugeln sich verhalten wie die Quadrate der Radien.

§. 76. Aufgabe.

Es ſoll der Inhalt J eines ſphäriſchen Zweiecks aus dem Kugelradius r und dem ſphäriſchen Winkel α des Zweiecks berechnet werden.

Auflöſung. Bezeichnet K die Kugelfläche, ſo iſt nach §. 65:

$J : K = \alpha : 360^0$, folglich

$$J = \frac{\alpha}{360^0} . K = \frac{\alpha}{360^0} . 4r^2\pi.$$

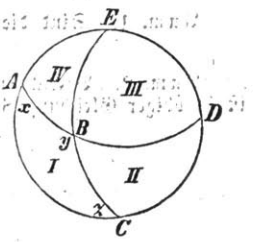
Anm. Iſt α in Bogenmaaß gegeben, ſo iſt 2π ſtatt 360^0 zu ſetzen, und folglich iſt alsdann $J = 2\alpha r^2$.

§. 77. Aufgabe.

Es ſoll der Inhalt eines ſphäriſchen Dreiecks aus dem Kugelradius r und den drei ſphäriſchen Winkeln x, y, z des Dreiecks berechnet werden.

Auflöſung. Wird Fig. 19 zu Grunde gelegt mit der dabei gegebenen Erklärung, und werden die vier ſphäriſchen Dreiecke durch I, II, III und IV bezeichnet, hat ferner Dreieck I die drei ſphäriſchen Winkel x, y, z, ſo iſt (Fig. 24.) nach vorigem §.:

Fig. 24.



$$I + II = \frac{x}{360^0} . K,$$

$$I + IV = \frac{z}{360^0} . K,$$

$$I + III = {}^*)\frac{y}{360^0} . K.$$

Addirt man die erhaltenen Reſultate, ſo ergiebt ſich:

$$I + I = \frac{x+y+z}{360^0} . K - (I + II + III + IV)$$

$$= \frac{x+y+z}{360^0} . K - \tfrac{1}{2}K = \frac{x+y+z-180^0}{360^0} . K,$$

$$\text{daher } I = \frac{x+y+z-180^0}{720^0} . K.$$

Anm. Sind x, y und z in Bogenmaaß gegeben, ſo erhält man

$$I = (x+y+z-\pi) . r^2.$$

*) Es ergiebt ſich dies, wenn man ſtatt des Dreiecks III das Gegendreieck nimmt (§. 69), welches mit dem Dreiecke I ein ſphäriſches Zweieck bildet.

§. 78. Aufgabe.

Es soll der Inhalt eines sphärischen ecks aus dem Kugelradius r und den Winkeln des ecks berechnet werden.

Auflösung. Aus einer Ecke ziehe man Bogen größter Kreise nach allen übrigen Ecken und zerlege so das eck in (n—2) Dreiecke. Bezeichnet man die Winkelsummen für die einzelnen Dreiecke durch s, s', s'' u. s. w., so erhält man nach vorigem §. für die Inhalte der einzelnen Dreiecke folgende Ausdrücke:

$$\frac{s-180^0}{720^0}.K,\quad \frac{s'-180^0}{720^0}.K,\quad \frac{s''-180^0}{720^0}.K, \text{ u. s. w.}$$

Der Inhalt J des sphärischen ecks ist nun gleich der Summe dieser Ausdrücke, und es ist daher:

$$J=\frac{(s+s'+s''+\ldots)-(n-2)180^0}{720^0}.K, \text{ oder}$$

$$J=\frac{S-(n-2)180^0}{720^0}.K,$$

wo S die Summe $(s+s'+s''+\ldots)$, d. h. die Summe aller Winkel des sphärischen ecks bedeutet.

Anm. 1. Sind die Winkel in Bogenmaß gegeben, so ist

$$J=[S-(n-2)\pi].r^2.$$

Anm. 2. Bezeichnet v den Winkel eines regulären sphärischen ecks, so ist in obiger Gleichung $S=nv$, daher

$$J=\frac{nv-(n-2)180^0}{720^0}.K.$$

§. 79. Zusatz.

Die am Schluß des vorigen §. gegebene Gleichung läßt sich benutzen, um die Möglichkeit der fünf regulären Polyeder zu beweisen. Kann man nämlich mit einer bestimmten Anzahl congruenter regulärer sphärischer ecke die ganze Kugelfläche vollständig bedecken, so daß die Seiten und Winkel völlig aneinander schließen und nirgends einen leeren Raum lassen, so bilden die Ebenen, welche man durch sämmtliche Ecken eines jeden dieser ecke legen kann, ein reguläres Polyeder. Wird nun angenommen, daß der Inhalt eines dieser regulären sphärischen ecke in der Kugelfläche mmal enthalten sei, daß also das betreffende reguläre Polyeder m Gränzebenen habe, so ist

$$\frac{nv-(n-2)180^0}{720^0}.K=\frac{1}{m}K, \text{ folglich}$$

$$v=\frac{720^0}{mn}+\frac{n-2}{n}.180^0.$$

Bezeichnet ferner p die Anzahl der sphärischen ecke, welche in einem Punkte zusammenstoßen, so ist die Summe der p sphärischen Winkel, welche um diesen Punkt herum den Raum völlig ausfüllen, gleich 360°.

Es ist also $p.v=360^0$, oder

$$p.\left(\frac{720^0}{mn}+\frac{n-2}{n}.180^0\right)=360^0. \qquad (a)$$

Nun kann (nach §. 49) n nur die Werthe 3, 4, 5 haben; ferner ist $p=3$, wenn n gleich 4 oder 5 ist, und p kann gleich 3, 4, 5 sein, wenn $n=3$ ist. Daraus ergeben sich folgende Resultate:

1) Ist $n=3$, so geht die Gleichung (a) über in:

$$p.\left(\frac{240^0}{m}+60^0\right)=360^0, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$m=\frac{4p}{6-p}.$$

Setzt man für p die Werthe 3, 4, 5, so ergeben sich für m die Werthe 4, 8, 20.

Eine Kugelfläche kann also von 4, oder 8, oder 20 congruenten regulären sphärischen Dreiecken völlig bedeckt werden, und dadurch ist die Möglichkeit des regulären Tetraeders, Octaeders und Icosaeders bewiesen.

2) Ist (in a) $n=4$, $p=3$, so ist $m=6$; es gibt folglich ein reguläres, von Quadraten begränztes Hexaeder.

3) Ist (in a) $n=5$, $p=3$, so ist $m=12$, und es giebt also auch ein reguläres, von Fünfecken begränztes Dodecaeder.

B. Bestimmung des Inhalts.

§. 80. Erklärung.

Zwei Körper sind gleich (haben gleichen cubischen Inhalt), wenn sie sich durch Umstellung einzelner Theile in congruente Körper verwandeln lassen.

Als unmittelbare Folgerung ſchließt ſich an, daß auch die nten Theile gleicher Körper einander gleich ſein müſſen, ferner auch die Körper, die ſich als algebraiſche Summen aus gleichen Körpern darſtellen laſſen.

§. 81. Lehrſätze.

1) Zwei Parallelepipeda ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und congruente Grundebenen haben.

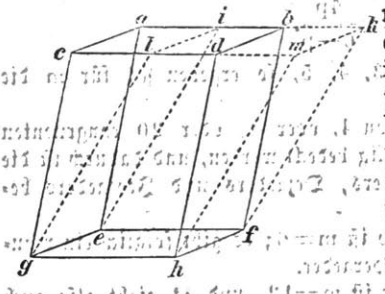
2) Zwei Parallelepipeda ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und ferner Grundebenen von gleichen Grundlinien und Höhen haben.

3) Ein Parallelepipedum wird durch jede Diagonalebene in zwei gleiche dreiſeitige Prismen zerlegt.

4) Zwei dreiſeitige Prismen ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und congruente Grundebenen haben.

5) Zwei Parallelepipeda, folglich auch zwei dreiſeitige Prismen, ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Fig. 25.



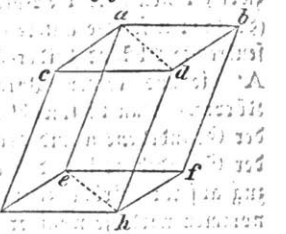
Beweis zu 1). Schneidet man (Fig. 25.) von dem Parallelepipedum abcdefgh durch die Ebene ileg den Keil aicleg ab, ſo läßt ſich dieſer an der Seitenebene bdlh ſo anlegen, daß man ein neues gleich großes Parallelepipedum iklmefgh erhält, welches mit erſterem in Höhe und Grundebene, außerdem auch in einigen Flächenwinkeln übereinſtimmt. Schneidet man ferner von iklmefgh wiederum einen Keil ſo ab, daß die Seitenebene ikef wegfällt, und ſetzt dieſen an der Seitenebene lmgh in entſprechender Art an, ſo erhält man ein drittes gleich großes Parallelepipedum, welches mit abcdefgh nur noch in Höhe und Grundebene übereinſtimmt.

Sind nun zwei in Höhe und Grundebene übereinſtimmende Parallelepipeda gegeben, ſo laſſen ſich dieſelben durch das umgekehrte Verfahren leicht in congruente Körper verwandeln, ſind alſo einander gleich.

Beweis zu 2). Er ergiebt ſich aus 1), wenn man in Fig. 25 abef und ikef als Grundebenen der beiden Parallelepipeda nimmt, und wenn man ferner den zu 1) gegebenen Beweis benutzt.

Beweis zu 3). Der Satz iſt richtig, ſobald die entſtehenden dreiſeitigen Prismen gerade, folglich auch congruent ſind. Iſt nun (Fig. 26.) das ſchiefe Parallelepipedum abcdefgh durch die Diagonalebene adeh in die zwei ſymmetriſchen ſchiefen dreiſeitigen Prismen acdegh und dbahfe zerlegt, ſo läßt ſich jedes derſelben leicht in ein gerades Prisma verwandeln. Legt man nämlich quer durch das Parallelepipedum eine auf den vier Seitenkanten ſenkrecht ſtehende Ebene, ſo läßt ſich von jedem der beiden dreiſeitigen Prisma der obere Theil ſo an den unteren anſetzen, daß ein gerades Prisma entſteht. Die beiden geraden Prismen ſind nun congruent, und folglich ſind die ſchiefen einander gleich.

Fig. 26.



Beweis zu 4). Er folgt unmittelbar aus 3) und 1).

Beweis zu 5). Die beiden Parallelepipeda laſſen ſich (nach 2) leicht ſo umändern, daß die beiden gleichen Grundebenen in den Winkeln übereinſtimmen. Die Grundebenen laſſen ſich alsdann darſtellen als Ergänzungen an der Diagonale (Planim. §. 83), folglich als algebraiſche Summen aus congruenten Dreiecken. Daher müſſen ſich auch die beiden Parallelepipeda darſtellen laſſen als algebraiſche Summen aus dreiſeitigen Prismen, welche gleiche Höhen und beziehlich congruente Grundebenen haben, müſſen alſo nach 4) einander gleich ſein.

Daß der Satz auch für dreiſeitige Prismen richtig iſt, ergiebt ſich aus 3).

§. 82. Lehrſatz.

Zwei prismatiſche Körper ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Beweis. Da nach planimetriſchen Sätzen (Planim. §. 82) zwei gleiche necke ſich auf gleiche Dreiecke zurückführen laſſen, ſo ergiebt ſich die Richtigkeit des Satzes aus 5) des vorigen §.

Anm. Zu den prismatiſchen Körpern ſind auch die Cylinder zu rechnen, und ein ſolcher kann daher gleich irgend einem Prisma ſein. Nun laſſen ſich zwar, im ſtrengen Sinne des Worts, ein neck und ein Kreis nicht einander gleich machen. Eine Gleichheit wird jedoch möglich, wenn die Inhalte in Zahlen gegeben werden, wobei ſtatt der irrationalen Zahl π ein rationaler Näherungswerth geſetzt werden muß.

§. 83. Lehrſatz.

Zwei pyramidale Körper ſind gleich, wenn ſie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Beweis. Denkt man ſich beide Pyramiden mit ihren Grundebenen auf eine Ebene geſtellt, und legt man dann parallel mit letzterer zwei Ebenen durch die Pyramiden, ſo entſtehen je zwei gleiche Querſchnitte (§. 38); a ſei die untere (größere) Durchſchnittsfigur, b die obere, h der ſenkrechte Abſtand beider Figuren von einander, und ferner ſeien A und A' die aus beiden Pyramiden durch jene Ebenen herausgeſchnittenen Körper. Nun iſt ſowohl A, wie auch A', kleiner als ein Prisma von der Grundebene a und der Höhe h, hingegen größer als ein Prisma von der Grundebene b und der Höhe h, und es liegen alſo A und A' in Bezug auf ihre Größe zwiſchen denſelben Gränzen. Je kleiner h angenommen wird, je weniger alſo a von b verſchieden iſt, deſto näher liegen dieſe Gränzen, und deſto kleiner iſt auch der mögliche Unterſchied zwiſchen A und A'. Für ein unendlich kleines h liegen die beiden Gränzen unendlich nahe an einander, und in dieſem Falle kann man daher die beiden Größen A und A' als gleich betrachten. Denkt man ſich nun beide Pyramiden auf die angegebene Art in unendlich viele Scheiben von unendlich kleiner Höhe zerlegt, ſo ſind je zwei dieſer Scheiben einander gleich, folglich auch die Pyramiden.

Anm. Zu den pyramidalen Körpern ſind auch die Kegel zu rechnen.

§. 84. Zuſatz.

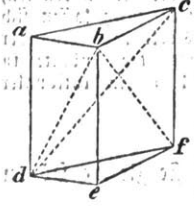
Die Lehrſätze der §§. 81—83 laſſen ſich zu folgendem zuſammenfaſſen, dem **Cavalieri'ſchen Grundſatze:**

Werden zwei Körper von parallelen Ebenen ſtets in gleichen Figuren durchſchnitten, und fangen dieſe Querſchnitte gleichzeitig an und hören auch gleichzeitig auf, ſo ſind die Körper einander gleich.

§. 85. Lehrſatz.

Der Inhalt eines prismatiſchen Körpers iſt dreimal ſo groß als der eines pyramidalen von gleicher Grundebene und Höhe.

Fig. 27.



Beweis. Er braucht nur für dreiſeitige Prismen und Pyramiden von gleichen Höhen und congruenten Grundebenen geführt zu werden, da ſich nach den vorigen §§. alle anderen Fälle auf dieſen zurückführen laſſen. Iſt nun (Fig. 27.) abcdef ein dreiſeitiges Prisma, ſo kann man durch die Ebene bdf die dreiſeitige Pyramide bdef abſchneiden, welche mit dem Prisma gleiche Höhe und congruente Grundebene hat. Es bleibt übrig die vierſeitige Pyramide

bacdf. Die Grundebene acdf derselben ist ein Parallelogramm, und die Pyramide wird daher durch die Ebene bdc in zwei gleich große dreiseitige Pyramiden bdca und bdcf zerlegt. Von diesen hat bdca, wenn man d als Spitze und abc als Grundebene nimmt, dieselbe Höhe und Grundebene wie das Prisma, ist also auch der zuerst abgeschnittenen Pyramide bdef gleich. Folglich sind die drei entstandenen dreiseitigen Pyramiden einander gleich, und jede ist gleich dem dritten Theile des Prisma.

§. 86. Lehrsätze.

1) Zwei Parallelepipeda, welche gleiche Grundebenen haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

2) Zwei Parallelepipeda, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundebenen.

3) Zwei beliebige Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus Grundebenen und Höhen.

4) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus drei zusammenstoßenden Kanten.

5) Zwei prismatische Körper, ferner auch zwei pyramidale, verhalten sich wie die Produkte aus Grundebenen und Höhen.

Beweis zu 1). Mißt man beide Höhen mit einem gemeinschaftlichen Gemäß, und ist dieses in der einen Höhe mmal, in der andern nmal enthalten, so läßt sich das eine Parallelepipedum in m, das andere in n Parallelepipeda zerlegen, die sämmtlich einander gleich sind. Die beiden gegebenen Parallelepipeda verhalten sich daher in Bezug auf ihre Größe wie m zu n, oder, da sich beide Höhen ebenso verhalten, wie die Höhen. — Für den Fall, daß beide Höhen incommensurabel sind, vergl. Planim. §. 100.

Beweis zu 2). Werden beide Grundebenen mit einem gemeinschaftlichen Gemäß gemessen, so ergeben sich dieselben Folgerungen wie in 1).

Beweis zu 3). Die beiden Parallelepipeda seien P und P′, ihre Grundebenen G und G′, ihre Höhen h und h′. Nimmt man noch ein drittes Parallelepipedum P″ hinzu, welches mit P gleiche Höhe (h), und mit P′ gleiche Grundebene (G′) hat, so ergiebt sich:

$$P:P''=G:G' \text{ und } P':P''=h':h, \text{ also}$$
$$P:P''=(G:G'):(h':h)=Gh:G'h'.$$

Beweis zu 4). Er folgt unmittelbar aus 3).

Beweis zu 5). Er folgt aus 3) und aus den §§. 82 und 85.

Anm. zu 5). Zu den prismatischen Körpern gehören auch die Cylinder, zu den pyramidalen auch die Kegel.

§. 87. Erklärung.

Die Inhaltsbestimmungen der Körper beruhen, wie die der Flächen, auf einer Vergleichung. Ist ein als bekannt vorausgesetzter Körper K (das Gemäß) in einem anderen mmal enthalten, so wird der Inhalt des letzteren durch die benannte Zahl mK ausgedrückt. Zum Gemäß wählt man meistens einen Würfel, dessen Kante gleich irgend einer üblichen Linieneinheit ist. Die gewöhnlichsten Gemäße sind:

1) die Kubiklinie (K‴);
2) der Kubikzoll (K″) $= 12^3$ K‴ $= 1728$ K‴;
3) der Kubikfuß (K′) $= 1728$ K″;
4) die Schachtruthe $= 144$ K′.

Sind nun a, b, c drei zusammenstoßende Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedums, gemessen mit ein und derselben Linieneinheit, so ist der Würfel, dessen Kante gleich dieser Linieneinheit ist, in dem Parallelepipedum abemal enthalten (§. 86,4). War also das Parallelepipedum z. B. mit der Linieneinheit „Fuß" gemessen, so ist sein Inhalt gleich abcK′. Gewöhnlich sagt man daher kurzweg: der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus drei zusammenstoßenden Kanten oder gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe.

§. 88. Lehrsätze.

1) Der Inhalt eines prismatischen Körpers ist gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe; es ist also J = Gh.*)

2) Der Inhalt eines pyramidalen Körpers ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus Grundebene und Höhe; es ist also $J = \frac{1}{3}Gh$.

Beweis zu 1). Ein Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepipedum von gleicher Grundebene G und gleicher Höhe h. Der Inhalt des Parallelepipedums ist aber nach vorigem §. gleich G.h.

Beweis zu 2). Er folgt aus 1) und aus §. 85.

Anm. Aehnliche prismatische Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen gleichliegender Linien, ebenso auch ähnliche pyramidale Körper.

§. 89. Zusatz.

1) Der Inhalt eines Cylinders ist gleich $r^2h\pi$, wenn r den Radius der Grundebene, h die Höhe des Cylinders bedeutet.

---

*) Für diesen, wie für die folgenden §§. wird vorausgesetzt, daß alle Linien ein und desselben Körpers mit demselben Gemäß gemessen sind. Die vorkommenden Buchstaben bedeuten unbenannte Zahlen, da die Hinzufügung der nöthigen Benennung in jedem Falle leicht auszuführen ist.

2) Der Inhalt eines Kegels ist gleich $\frac{1}{3}r^2h\pi$, wenn r den Radius der Grundebene, h die Höhe des Kegels bedeutet.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus §. 88.

§. 90. Zusatz.

Jedes Polyeder, in welchem es einen Punkt giebt, der von allen Gränzebenen gleichweit entfernt ist, kann von diesem Punkte aus in Pyramiden zerlegt werden, welche die nämliche Höhe haben, nämlich die Entfernung jenes Punktes von einer der Gränzebenen (oder den Radius der eingeschriebenen Kugel). Bezeichnet man diesen Radius durch ϱ, die einzelnen Gränzebenen durch G, G', G'' u. s. w., so erhält man für den Inhalt des Polyeders folgende Summe:

$$\frac{\varrho G}{3}+\frac{\varrho G'}{3}+\frac{\varrho G''}{3}+\ldots=\frac{\varrho}{3}(G+G'+G''+\ldots)=\frac{\varrho}{3}.O,$$

wenn O die Gesammtoberfläche bedeutet.

§. 91. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines regulären Polyeders aus seiner Kante (s) berechnet werden.

Auflösung. Nach vorigem §. ist $J=\frac{\varrho}{3}.O$. Da nun die Werthe der Größen ϱ und O für die einzelnen regulären Polyeder in den §§. 64 und 71 gegeben sind, so erhält man

1) für das reguläre Tetraeder : $J=\frac{s^3}{12}\sqrt{2}$,

2) „ „ „ Hexaeder : $J=s^3$,

3) „ „ „ Octaeder : $J=\frac{s^3}{3}\sqrt{2}$,

4) „ „ „ Dodecaeder : $J=\frac{s^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}}=$

$$=\frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5}),$$

5) „ „ „ Icosaeder : $J=\frac{5s^3}{12}(3+\sqrt{5})$.

§. 92. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J einer Kugel berechnet werden.

Auflösung. Betrachtet man die Kugel als ein Polyeder von unendlich kleinen Gränzebenen, so ist die Entfernung einer solchen Gränzebene vom Mittelpunkte gleich dem Radius r. Der Inhalt der Kugel ist alsdann nach §. 90. gleich $\frac{r}{3}.O$, oder es ist $J=\frac{4}{3}r^3\pi$. (§. 75,3).

Anm. 1. Zwei Kugeln verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

Anm. 2. Aus den §§. 89 und 92 ergiebt sich, daß ein Cylinder, eine Halbkugel und ein Kegel, wenn sie dieselbe Grundebene und Höhe haben, sich verhalten wie 3:2:1.

§. 93. Aufgaben.

Es soll der Inhalt J berechnet werden:

1) eines körperlichen Kugelzweiecks, Kugeldreiecks und eines Kugelausschnitts,

2) eines Kugelabschnitts,

3) einer körperlichen Zone,

wenn r den Kugelradius bezeichnet.

Auflösung zu 1). Man erhält den Inhalt dieser Körper, wenn man die Oberfläche eines jeden mit $\frac{r}{3}$ multiplicirt. (Vergl. §. 92.) Es ergiebt sich alsdann (vergl. §§. 75, 76, 77)

für das körperliche Kugelzweieck: $J=\frac{\alpha}{360^0}.\frac{4}{3}r^3\pi$,

„ „ „ Kugeldreieck: $J=\frac{x+y+z-180^0}{720^0}.\frac{4}{3}r^3\pi$,

„ den Kugelausschnitt : $J=\frac{2}{3}r^2h\pi$.

Auflösung zu 2). Von dem in 1) angegebenen Inhalte eines Kugelausschnitts hat man den Inhalt eines Kegels zu subtrahiren, dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, und dessen Grundebene den Kugelabschnitt begränzt. Ist h die Höhe des Kugelabschnitts, so ist (r—h) die Höhe des Kegels, und der Radius seiner Grundebene ist $\sqrt{r^2-(r-h)^2}=\sqrt{2rh-h^2}$; folglich ist der Inhalt des Kegels (nach §. 89) gleich $\frac{1}{3}(2rh-h^2).(r-h)\pi=\frac{1}{3}h(2r-h)(r-h)\pi$. Für den Kugelabschnitt erhält man daher: $J=\frac{2}{3}r^2h\pi-\frac{1}{3}h(2r-h)(r-h)\pi=\frac{1}{3}h^2(3r-h)\pi$.

Auflösung zu 3). Der Inhalt einer körperlichen Zone ist gleich der Differenz zweier Kugelabschnitte. Hat der eine die Höhe H, der andere die Höhe h, so erhält man für die Zone:

$$J = \frac{\pi}{3}[H^2(3r - H) - h^2(3r - h)].$$

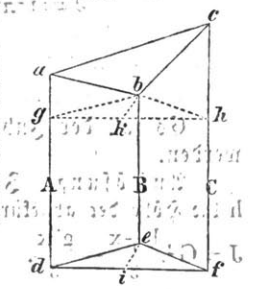
Anm. zu 2). Mit Hülfe des gewonnenen Resultates läßt sich leicht der Inhalt eines Körpers bestimmen, der zwei sich schneidenden Kugeln gemeinschaftlich ist.

§. 94. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma berechnet werden.

Auflösung. Dieselbe kann beschränkt werden auf den Fall, daß die drei Seitenkanten auf der einen Grundebene senkrecht stehen, weil sich in jedem anderen Falle das Prisma durch eine Ebene, die senkrecht auf den Kanten stände, in zwei Prismen der erwähnten Art zerlegen ließe. Ist nun (Fig. 28.) abcdef ein Prisma, dessen Seitenkanten A, B, C auf der Grundebene def senkrecht stehen, so lege man durch den Punkt b, welcher unter den drei Punkten a, b, c die kleinste Entfernung von def hat, eine Ebene gbh parallel mit def. Dieselbe zerlegt das Prisma abcdef in das gerade Prisma ghbdef und die vierseitige Pyramide bacgh, und es ist hierbei $\triangle gbh \simeq \triangle def$. Sind bk = ei die Höhen dieser Dreiecke, und setzt man gh.bk = df.ei = 2E, so ist:

Fig. 28.



1) gbhdef = E.B;

2) $\text{bacgh} = \text{acgh}.\frac{bk}{3} = \frac{ag+ch}{2}.gh.\frac{bk}{3} = \frac{ag+ch}{3}.E.$

Hieraus folgt:

$$J = E.B + E.\frac{ag+ch}{3} = E\left(\frac{3B+ag+ch}{3}\right) =$$

$$= E\left[\frac{B+(B+ag)+(B+ch)}{3}\right] = E.\frac{A+B+C}{3}.$$

Anm. 1. Es ergiebt sich leicht, daß das gefundene Resultat auch dann noch gültig ist, wenn die Seitenebenen auf keiner der Grundebenen senkrecht stehen. Alsdann behalten A, B, C ihre Bedeutung, und E bezeichnet eine

durch das Prisma so hindurchgelegte Ebene, daß die Seitenkanten auf ihr senkrecht stehen.

Anm. 2. Ist ein Prisma nicht schief abgeschnitten, ist also $A=B=C$, so ist $J=E.A$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man eine der Seitenebenen als Grundebene nimmt, so daß ein dachförmiger Körper entsteht, und man dann den Inhalt, ähnlich wie bei einem Dreiecke, als halbes Produkt aus Grundebene und Höhe berechnet.

Anm. 3. Der Inhalt eines schief abgeschnittenen mehrseitigen Prisma wird berechnet, indem man sich dasselbe in dreiseitige Prismen zerlegt und die einzelnen Resultate addirt. Man erhält im Allgemeinen keinen geschlossenen Ausdruck.

§. 95. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines schief abgeschnittenen Cylinders berechnet werden.

Auflösung. Ist r der Radius der Grundebene, H die Höhe des nicht abgeschnittenen Cylinders, h die Höhe der abgeschnittenen Klaue, so ist der Inhalt des nicht abgeschnittenen Cylinders gleich $r^2H\pi$, der der abgeschnittenen Klaue gleich $\frac{1}{2}r^2h\pi$. Folglich erhält man

$$J=r^2\pi.\frac{2H-h}{2}=r^2\pi.\frac{H+(H-h)}{2}.$$

§. 96. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J einer abgekürzten Pyramide berechnet werden.

Auflösung. Ist G^2 die größere, g^2 die kleinere Grundebene, h die Höhe der abgekürzten, x die der Ergänzungs-Pyramide, so ist

$$J=G^2.\frac{h+x}{3}-\frac{g^2x}{3}.$$

Den Werth von x erhält man aus der Proportion

$$G^2:g^2=(h+x)^2:x^2, \text{ oder}$$
$$G:g=(h+x):x, \text{ und es ist}$$
$$x=\frac{hg}{G-g}.$$

Setzt man diesen Werth ein, so ergiebt sich

$$J=\frac{G^2}{3}\left(h+\frac{hg}{G-g}\right)-\frac{g^2}{3}.\frac{hg}{G-g}, \text{ oder}$$
$$J=\frac{G^3h-g^3h}{3(G-g)}=\frac{h}{3}(G^2+Gg+g^2).$$

§. 97. Aufgabe.

Es ſoll der Inhalt J eines abgekürzten Kegels berechnet werden.

Auflöſung. Iſt R der größere, r der kleinere Radius, ſo hat man in der Auflöſung des vorigen §. $R^2\pi$ ſtatt G^2, und $r^2\pi$ ſtatt g^2 zu ſetzen. Man erhält alsdann:

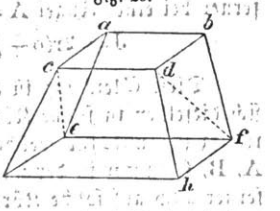
$$J=\frac{h}{3}(R^2\pi+\sqrt{R^2r^2\pi^2}+r^2\pi)=\frac{h\pi}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

§. 98. Aufgabe.

Es ſoll der Inhalt J eines vierſeitigen Obelisken, deſſen Grundebenen Rechtecke ſind, berechnet werden.

Auflöſung. Da (Fig. 29.) ab, cd, ef, gh einander parallel ſind, ſo zerlegt die Ebene cdef den Obelisken in die zwei dreiſeitigen, ſchief abgeſchnittenen Prismen acebdf und cgedhf, deren Inhalte ſich nach §. 94 leicht beſtimmen laſſen. Legt man nämlich durch acebdf einen Querſchnitt, der auf den drei Seitenkanten ab, cd, ef ſenkrecht ſteht, ſo iſt der Inhalt dieſes Querſchnittes gleich $\frac{1}{2}ac.h$, wenn h die Höhe des Obelisken bezeichnet, und man erhält alſo:

Fig. 29.



$$acebdf=(ab+cd+ef).\frac{ac.h}{6}.$$ Ebenſo erhält man:

$$cgedhf=(cd+ef+gh).\frac{eg.h}{6}.$$

Bezeichnet man nun ab und cd mit A, ac und bd mit B, ef und gh mit A', eg und fh mit B', ſo iſt:

$$J=(2A+A').\frac{Bh}{6}+(2A'+A).\frac{B'h}{6}=$$

$$=\frac{h}{6}(2AB+2A'B'+A'B+AB').$$

§. 99. Zuſatz.

Die Gleichungen für den Inhalt eines prismatiſchen, pyramidalen und abgekürzten pyramidalen Körpers, eines Obelisken, einer Kugel, einer körperlichen Zone und Calotte laſſen ſich, wenn keiner dieſer Körper

schief abgeschnitten ist, durch eine einzige Gleichung ersetzen, deren Richtigkeit für den einzelnen Fall leicht zu beweisen ist, obgleich der Weg, auf dem man zu der Gleichung gelangt, hier nicht weiter gezeigt werden kann. Bezeichnet nämlich A die eine Grundebene, B die andere, C einen mit A und B parallelen Durchschnitt, der durch die Mitte der Höhe h gelegt ist, und berücksichtigt man, daß bei einigen der erwähnten Körper entweder eine der beiden Größen A und B, oder auch beide zusammen gleich Null sein können, so ist der Inhalt durch folgende Gleichung gegeben:

$$J = h(\tfrac{1}{6}A + \tfrac{4}{6}C + \tfrac{1}{6}B).$$

Es ist z. B. bei einem Kegel $A = o$, $B = r^2\pi$, $C = \tfrac{1}{4}r^2\pi$, daher

$$J = h(o + \tfrac{4}{6}.\tfrac{1}{4}r^2\pi + \tfrac{1}{6}r^2\pi) = \frac{h}{3}.r^2\pi;$$

ferner bei einer Kugel $A = o$, $B = o$, $C = r^2\pi$, $h = 2r$, daher

$$J = 2r(o + \tfrac{4}{6}r^2\pi + o) = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Diese Gleichung ist auch anwendbar auf beliebige Obelisken, weil sich dieselben in solche Körper zerlegen lassen, für welche die Gleichung richtig ist, und für welche bei gleicher Höhe die entsprechenden Figuren A, B, C immer in der nämlichen Ebene liegen. Die Gleichung ist aber ferner auch auf solche Körper anwendbar, die sich von den erwähnten Körpern nur dadurch unterscheiden, daß ihre Querschnitte von A und B nach C hin allmählich immer mehr und mehr von denen der anderen abweichen, also entweder immer größer, oder immer kleiner werden, doch so, daß die Abweichung im Verhältniß zur Größe der Körper nicht sehr bedeutend ist. Dergleichen Körper sind Fässer, Schiffsräume, Zonen von eiförmigen Körpern und ähnliche. Bei Körpern dieser Art ist der Inhalt entweder gar nicht, oder doch nicht mit den bis jetzt gegebenen Hülfsmitteln genau zu berechnen, aber die erwähnte Gleichung giebt ihn annähernd mit ziemlicher Sicherheit an.

Anm. Soll der Inhalt eines Körpers gesucht werden, dessen Form durch kein Gesetz bestimmt ist, so muß man sich denselben in einzelne Theile der Art zerlegt denken, daß sie als prismatische oder pyramidale Körper betrachtet und berechnet werden können. Für Körper von geringer Ausdehnung kann man sich zuweilen eines anderen Verfahrens mit Vortheil bedienen. Da ein Körper im Wasser so viel von seinem Gewichte verliert, als ein gleich großes Volumen Wasser wiegt, und da man weiß, daß 1 Kubikfuß Wasser bei 15° R. 66 Pfund wiegt, (1 Kubikcentimeter wiegt bei 4° C. 1 Gramm), so ist der gesuchte Inhalt leicht zu berechnen.

Aufgaben.

1) Welches ist der Inhalt eines 16′ hohen Parallelepipedums, dessen Grundkanten 12′ und 8′ betragen und einen Winkel von 60° bilden?

2) Der Inhalt eines geraden Parallelepipedums beträgt 1800 K′; die Höhe beträgt 8′, und die Grundebene ist ein Quadrat. Wie groß ist die Grundkante g und die Oberfläche O des Parallelepipedums?

3) Der Inhalt eines Würfels beträgt 12 K′. Wie groß ist die Seite s desselben, und wie groß die Oberfläche O?

4) Die Grundebene eines 8′ hohen Prisma ist ein reguläres Dreieck mit der Seite 8′. Wie groß ist der Inhalt des Prisma?

5) Die Grundebene einer $20\frac{1}{2}$′ hohen Pyramide ist ein reguläres Fünfeck mit der Seite 30′. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

6) Die Höhe einer Pyramide beträgt 10′; der Inhalt eines Querschnittes, welcher parallel mit der Grundebene durch den Mittelpunkt der Höhe geführt wird, beträgt 18 Q′. Welches ist der Inhalt der Pyramide?

7) Bei einer vierseitigen Pyramide beträgt jede Grund- und Seitenkante 6′. Wie groß ist der Inhalt, und wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

8) Eine abgekürzte 24′ hohe Pyramide ist gleich ihrer Ergänzungspyramide. Wie groß ist deren Höhe?

9) Wie groß ist der Inhalt einer 15′ hohen abgekürzten Pyramide, deren Grundebenen 18 Q′ und 8 Q′ betragen?

10) Der Inhalt einer abgekürzten Pyramide beträgt 152 K′, der ihrer beiden Grundebenen 12 Q′ und 27 Q′. Wie groß ist die Höhe der abgekürzten Pyramide?

11) Der Inhalt einer 6′ hohen abgekürzten Pyramide beträgt 608 K′, der Inhalt der einen Grundebene 64 Q′. Wie viel beträgt der Inhalt der andern Grundebene?

12) Die Höhe eines geraden Kegels beträgt 6′, der Radius der Grundebene 8′. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

13) Die Seite eines geraden Kegels beträgt 13′, der Radius der Grundebene 5′. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

14) Die Höhe eines abgekürzten Kegels beträgt 15′, die Radien der beiden Grundebenen betragen 10′ und 8′. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

15) Ein Kegel soll durch drei Ebenen, welche der Grundebene parallel sind, in vier gleiche Theile getheilt werden. Wie verhalten sich die Höhen dieser Theile zu einander?

16) Ein Kegel soll durch drei Ebenen, welche der Grundebene parallel sind, in vier Theile getheilt werden, die, wenn man mit dem an der Spitze liegenden Theile beginnt, sich wie 1 : 3 : 7 : 8 verhalten. Wie verhalten sich die Höhen dieser Theile zu einander?

17) Ein abgekürzter Kegel hat die Grundebenen 25 □′ und 36 □′, ferner die Höhe 9′. Er soll durch eine Ebene E, die den Grundebenen parallel ist, in zwei gleiche Theile getheilt werden. Wie groß sind die Höhen h und h′ dieser zwei Theile, wie groß der Inhalt eines jeden derselben, und wie groß der Querschnitt E?

18) Die Radien der Grundebenen eines abgekürzten geraden Kegels betragen 9′ und 21′, die Seite des Ergänzungskegels ist gleich 8′. Wie groß ist der Mantel des abgekürzten Kegels?

19) Der Inhalt eines 10′ hohen geraden Kegels beträgt 1047,197…K′. Wie groß ist der Mantel des Kegels?

20) Ein gerader Kegel hat den Inhalt 314,159…K′ und die Gesammtoberfläche 282,743… □′. Wie groß ist die Höhe h des Kegels, und wie groß der Radius r der Grundebene?

21) Ein gerader Kegel hat den Inhalt 301,5927…K′, und die Größe des Mantels beträgt 188,4954…□′. Wie groß ist die Höhe h des Kegels, die Seite s desselben, und der Radius r der Grundebene?

22) Bei einem 23,3′ hohen Cylinder beträgt der Radius der Grundebene 18′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

23) Der Mantel eines geraden Cylinders beträgt 75,3981… □′, die Grundebene 2827,432…□′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

24) Der Mantel eines geraden Cylinders beträgt 263,893…□′, der Inhalt des Cylinders 791,68…K′. Wie groß ist die Grundebene?

25) Die Grundebene eines geraden Cylinders beträgt 50,2654… □′, der Inhalt des Cylinders 301,592…K′. Wie groß ist der Mantel?

26) Die Gesammtoberfläche eines geraden Cylinders beträgt 320,693…□′, die Summe der Seite und des Radius der Grundebene beträgt 23,2′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

27) Bei einem schief abgeschnittenen geraden Cylinder beträgt die größte Seite 18,3′, die kürzeste 16,7′; der Radius der Grundebene beträgt 8,3′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

28) Bei einem geraden Cylinder ist die Höhe h gleich 9′, der Radius r der Grundebene gleich 12′. Ein zweiter gerader Cylinder hat dieselbe Gesammtoberfläche und denselben Inhalt, ist aber ersterem nicht congruent. Wie groß ist bei diesem Cylinder die Höhe h′ und der Radius r′?

29) Durch einen 25′ hohen Cylinder, bei welchem der Radius der Grundebene 4′ beträgt, wird eine Ebene hindurch gelegt, parallel mit der Axe und 2′ von dieser entfernt. Wie groß ist der Inhalt des durch die Ebene abgeschnittenen kleinern Stücks?

30) Der Radius einer Kugel beträgt 11,5′. Wie groß ist die Oberfläche, und wie groß der Inhalt der Kugel?

31) Der Inhalt einer Kugel beträgt 19861,7...K′. Wie groß ist die Oberfläche der Kugel?

32) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 1411,95... □′. Wie groß ist der Inhalt der Kugel?

33) Die Höhe einer Calotte beträgt 2,1′; der Kugelhalbmesser beträgt 6,4′. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Calotte, und wie groß ist der Inhalt J des zugehörigen Kugelabschnittes?

34) Der Radius des Kreises, der eine 4,5′ hohe Calotte begränzt, beträgt 6,11146′... Wie groß ist der Flächeninhalt O der Calotte, und wie groß ist der Inhalt J des zugehörigen Kugelabschnittes?

35) Die Radien der Kreise, welche eine 2,1′ hohe Kugelzone begränzen, betragen 9,4599...′ und 10,2995...′. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Zone, und wie groß ist der Inhalt J der körperlichen Zone?

36) Von den zwei Kreisen, welche eine 1,4′ hohe Kugelzone begränzen, hat der größere den Radius 6′; der Kugelradius beträgt 6,5′. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Zone, und wie groß der Inhalt J der körperlichen Zone?

37) Wie groß ist der Flächeninhalt der vom 60sten Parallelkreise auf der Erdoberfläche begränzten Calotte, wenn man die Erde als vollkommene Kugel betrachtet und ihren Radius zu 858 Meilen annimmt?

38) Wie groß ist unter denselben Voraussetzungen der Flächeninhalt der Zone, welche von dem 60sten und 50sten Parallelkreise begränzt wird?

39) Für ein sphärisches Dreieck sind die Winkel gegeben: A=134°30′; B=116°20′; C=106°40′; der Kugelradius beträgt 112′. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

Auflösungen.

1) 1330,2... K′; 2) g=15′; O=930 □′; 3) s=2,2894...′; O=31,448... □′; 4) 221,7... K′; 5) 10580,9... K′; 6) 240 K′; 7) J=50,911... K′; O=98,353... □′; 8) 92,3357...′; 9) 190 K′; 10) 8′; 11) 144 □′; 12) 452,389... □′; 13) 314,159... K′;

14) 3832,74... K'; 15) Wie $1 : \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}\right) : \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) :$
$: \left(\sqrt{4} : \sqrt[3]{3}\right)$, oder wie 1 : 0,25992... : 0,18232... : 0,14525...;
16) Wie $1 : \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{1}\right) : \left(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{4}\right) : \left(\sqrt[3]{19} - \sqrt[3]{11}\right)$, oder wie 1 : 0,58740... : 0,63657... : 0,44442...; 17) h=4,9057...; h'=4,0942...'; E=30,747... Q'; J=136,5... K'; 18) 1005,3... Q'; 19) 444,288... Q'; 20) r=5'; h=12', oder r=4,4721...'; h=15';*) 21) h=8'; s=10'; r=6'; oder h=8,6580...'; s=10,4031...'; r=5,7674....';**) 22) 23716,5... K'; 23) 1130,97... K'; 24) 113,097... Q'; 25) 150,796... Q';

---

*) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt, O die Gesammtoberfläche, so ist:

$$1)\ 3J = r^2\pi h; \qquad 2)\ O = r\pi\sqrt{r^2+h^2} + r^2\pi.$$

Aus 2) erhält man $O^2 - 2Or^2\pi = r^2\pi^2h^2$, oder, wenn man nach 1) $r^2\pi = (3J : h)$ setzt,

$$O^2 - 2O\frac{3J}{h} = 3J\pi h, \text{ oder}$$

$$h^2 - \frac{O^2}{3\pi J}\cdot h = -\frac{2O}{\pi}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man h; aus dem für h gefundenen Werthe und aus 1) erhält man r.

**) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt des Kegels, O der Flächeninhalt des Mantels, so ist:

$$1)\ 3J = r^2\pi h; \qquad 2)\ O = r\pi\sqrt{h^2+r^2} \text{ oder } O^2 = r^2\pi^2h^2 + r^4\pi^2.$$

Aus 1) erhält man $r^2 = (3J : \pi h)$. Setzt man diesen Werth in 2) ein, so ergiebt sich

$$3)\ O^2 = 3J\pi h + \frac{9J^2}{h^2}, \text{ oder}$$

$$4)\ 3J\pi h^3 - O^2h^2 + 9J^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man drei Werthe für h, von denen indeß der eine negativ sein muß und daher für die vorliegende Aufgabe nicht brauchbar ist.

26) 319,311...K'; 27) 3787,42...K'; 28) h'=36'; r'=6';*) 29) 245,673...K'; 30) O=1661,9...Q'; J=6370,62...K'; 31) 3546,73...Q'; 32) 4988,87...K'; 33) O=84,446...Q'; J=78,970...K'; 34) O=180,955...Q'; J=311,724...K'; 35) O=141,183...Q'; J=649,97...K'; 36) O=57,17...Q'; J=140,069...K'; 37) 619,693 Quadratmeilen; 38) 462457 Quadratmeilen; 39) 38860,8...Q'.

Fünftes Capitel.

Sphärische Trigonometrie.

§. 100. Erklärung.

Die Seiten und Winkel eines sphärischen (körperlichen)**) Dreiecks stehen ebenso in Abhängigkeit von einander, wie die eines ebenen Dreiecks. Diese Abhängigkeit nachzuweisen, ist die nächste Aufgabe der sphärischen Trigonometrie.

---

*) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt des Cylinders, O die Gesammtoberfläche, so ist:

$$1)\ J = r^2\pi h; \qquad 2)\ O = 2r^2\pi + 2r\pi h.$$

Aus 1) ergiebt sich $r\pi h = (J:r)$. Setzt man diesen Werth in 2) ein, so erhält man

$$3)\ O = 2r^2\pi + \frac{2J}{r}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man drei Werthe für r, von denen aber der eine negativ sein muß und daher nicht brauchbar ist. Sobald indeß, wie in Aufgabe 28), der eine Werth von r gegeben ist, also z. B. r=a, so ist obige Gleichung 3) durch (r—a) theilbar, und man hat dann nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen.

**) Ueber den Zusammenhang zwischen körperlichen und sphärischen Dreiecken vergl. §. 66, Anm. 1.

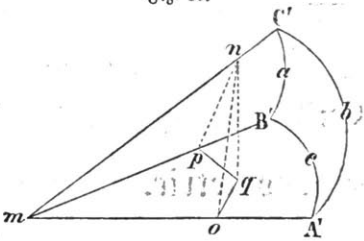
In den nachfolgenden §§. ſollen die Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks mit a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, die Scheitelpunkte derſelben mit A′, B′, C′ bezeichnet werden, und es ſei jeder Winkel und jede Seite kleiner als 2R. (Vergl. §. 20, Anm. 2.)

§. 101. Lehrſatz.

Für jedes ſphäriſche Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$;
2) $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$;
3) $\sin B : \sin C = \sin b : \sin c$.

Fig. 30.



Beweis zu 1). Es ſei (Fig. 30.) A′B′C′ ein ſphäriſches Dreieck, mA′B′C′ das zugehörige körperliche. Man fälle nun aus einem beliebigen Punkte n der Kante mC′ die Senkrechte nq auf die Ebene der Seite c, und es werde angenommen, daß der Punkt q inmitten der Ebene mB′A′ liege. Fällt man ferner aus q die Senkrechten qp und qo auf mB′ und mA′, und verbindet man o und p mit n, ſo ſind ∠noq und ∠npq die Neigungswinkel von A und B. Alsdann iſt $\sin A = nq : no$, $\sin B = nq : np$, daher

1) $\sin A : \sin B = np : no$.

Nun iſt $np = mn \cdot \sin a$, $no = mn \cdot \sin b$, alſo

2) $np : no = \sin a : \sin b$.

Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) ergiebt ſich aber ſchließlich

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b.$$

Anm. Die Beweiſe zu 2) und 3) werden ebenſo geführt.

§. 102. Zuſatz.

Der im vorigen §. erwähnte Punkt q kann auch in einer der beiden Kanten mA′ und mB′ liegen, oder er kann mit m zuſammenfallen, oder er kann außerhalb des körperlichen Dreiecks in der Fortſetzung der Ebene B′mA′ liegen.

Liegt q in der Kante mA′, ſo fällt es mit o zuſammen. Setzt man nun in dem gegebenen Beweiſe $nq = no$, ſo kann das Uebrige unverändert bleiben.

Fällt q mit m zuſammen, ſo ſteht die Kante C'm ſenkrecht auf der Ebene mA'B', und es iſt alsdann A=R und B=R. Ferner ſind aber auch in dieſem Falle a und b Viertelkreisbogen, folglich iſt a=b==R.*) Schließlich iſt alſo ebenfalls sin A : sin B = sin a : sin b.

Liegt q in der Fortſetzung der Ebene mA'B', ſo denke man ſich die Seiten des körperlichen Dreiecks zu Ebenen von Hauptkreiſen erweitert, das ſphäriſche Dreieck A'B'C' zur Kugeloberfläche. Auf jeder Seite des zu c gehörigen Hauptkreiſes liegen alsdann 4 ſphäriſche und ebenſoviel körperliche Dreiecke. (Vergl. §. 67.)

In irgend einem der 4 körperlichen Dreiecke, die nach Fig. 30 oberhalb des zu c gehörigen Hauptkreiſes liegen, muß nun der Punkt q zu finden ſein, entweder in einer Seite, oder in einer Kante, und für dieſes Dreieck iſt alſo der Satz richtig. Da aber in den übrigen Dreiecken die Winkel und Seiten dieſes einen Dreiecks ſich wiederholen, oder deren Supplemente (§. 67), und da sin x = sin (2R—x) iſt, ſo gilt der Satz auch für dieſe Dreiecke.

Der Lehrſatz des §. 100 iſt folglich für jedes ſphäriſche Dreieck richtig.

Anm. Aus dieſem Lehrſatz ergiebt ſich leicht die Richtigkeit der in §. 22 aufgeſtellten Lehrſätze.

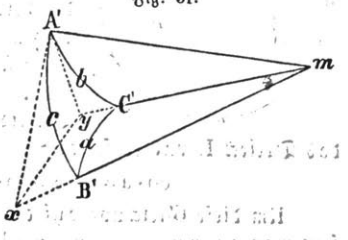
§. 103. Lehrſatz.

Für jedes ſphäriſche Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$;
2) $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$;
3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Beweis zu 1). Es ſei (Fig. 31.) A'B'C' ein ſphäriſches Dreieck, mA'B'C' das zugehörige körperliche, und es ſeien b und c ſpitze Winkel. Zieht man nun im Punkte A' an b und c je eine Tangente und verlängert dieſelben, bis ſie in y und x von den verlängerten Radien mC' und mB' getroffen werden, ſo laſſen ſich, wenn der Radius gleich 1 geſetzt wird, die verſchiedenen Linien in folgender Weiſe bezeichnen. Es iſt:

Fig. 31.



$$A'y = \operatorname{tg} b;\quad A'x = \operatorname{tg} c;\quad my = \sec b;\quad mx = \sec c.$$

*) Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß a, b, c ebenſo durch Grad wie durch Bogenmaaß ausgedrückt werden können.

Berückſichtigt man außerdem, daß $\sphericalangle xA'y = A$ iſt, ſo ergiebt ſich

1) im Dreieck xA'y:

$$xy^2 = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A;$$

2) im Dreieck ymx:

$$xy^2 = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a.$$

Subtrahirt man die erſte Gleichung von der zweiten und ſetzt dabei $\sec^2 b = 1 + \operatorname{tg}^2 b$, $\sec^2 c = 1 + \operatorname{tg}^2 c$, ſo erhält man:

$$0 = 2 - 2 \sec b \sec c \cos a + 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A,$$

$$= 2 \cos b \cos c - 2 \cos a + 2 \sin b \sin c \cos A,$$

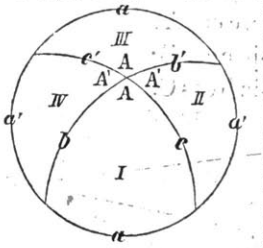
daher $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Anm. Die Beweiſe zu 2) und 3) werden in derſelben Art geführt.

§. 104. Zuſatz.

Iſt in §. 103 einer der beiden Winkel b und c ſtumpf, oder ſind es beide, ſo nimmt man wieder, wie in §. 102, die drei ſphäriſchen Dreiecke zu Hülfe, welche mit dem gegebenen zuſammen eine Halbkugel bilden. Iſt nun (Fig. 32.) das Dreieck I das gegebene, und werden in den übrigen die gleichen Stücke mit gleichen Buchſtaben, die Supplemente von a, A u. ſ. w. durch a', A' u. ſ. w. bezeichnet, ſo ergiebt ſich leicht, daß in einem dieſer vier Dreiecke der Winkel A (oder A') von zwei ſpitzen Seiten eingeſchloſſen ſein muß. Wenn z. B. in I eine der beiden Seiten c und b ſtumpf iſt, ſo iſt dies nicht der Fall in II oder IV, und wenn beide ſtumpf ſind, ſo iſt dies in III nicht der Fall. Für eins dieſer Dreiecke gilt alſo der Beweis des §. 103. Es ſei dies der Fall für das Dreieck I, und es ſei alſo

Fig. 32.



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Um dieſe Gleichung auf die Stücke des Dreiecks II überzuführen, ſetzt man $\cos a = -\cos a'$, $\cos b = -\cos b'$, $\sin b = \sin b'$, $\cos A = -\cos A'$ und erhält:

$$-\cos a' = -\cos b' \cos c + \sin b' \sin c . (-\cos A'),$$

oder $\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos A'$.

Die Gleichung gilt alſo auch für das Dreieck II, und ebenſo für das Dreieck IV.

Für das Dreieck III nimmt die Gleichung folgende Geſtalt an, wenn man $\cos c = -\cos c'$, $\cos b = -\cos b'$, $\sin c = \sin c'$, $\sin b = \sin b'$ ſetzt:

$$\cos a = (-\cos b').(-\cos c') + \sin b' \sin c' \cos A,$$
$$= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A.$$

Die in §. 103 aufgeſtellten Gleichungen ſind alſo gültig, wenn der in ihnen vorkommende ſphäriſche Winkel von zwei ſpitzen Seiten, oder einer ſpitzen und einer ſtumpfen, oder von zwei ſtumpfen Seiten eingeſchloſſen iſt.

§. 105. Zuſatz.

Iſt in §. 103 einer der beiden Winkel b und c gleich R, oder ſind es beide, ſo iſt der gegebene Beweis nicht mehr anwendbar, weil alsdann die Tangente und die Secante des rechten Winkels ſich nicht ſchneiden.

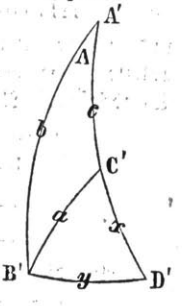
1) Es ſei (Fig. 32.) $b = R$ und $c = R$, (folglich auch $B = R$, $C = R$).

Alsdann iſt $a = A$, $\cos a = \cos A$ (vergl. §. 65, Anm. 2). Daſſelbe Reſultat würde man aber auch erhalten, wenn man in 1) des §. 103 $b = R$ und $c = R$ ſetzte, und dieſe Gleichung iſt daher auch für den vorliegenden Fall anwendbar.

2) Es ſei $b = R$, $c \gtrless R$.

Alsdann muß es unter den in Fig. 32 angegebenen Dreiecken eins geben, bei welchen $c < R$ iſt. Iſt in (Fig. 33.) A'B'C' ein ſolches, ſo verlängere man A'C' bis D' zu einem Viertelkreisbogen; es iſt alſo in dieſem Falle $A'B' = R'$, $A'D' = R$, folglich auch W. $D = R$, $y = A$. Im Dreieck C'B'D' hat man nun, wenn nicht etwa $y = R$ iſt, $\cos a = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos D$, oder $\cos a = \sin c \cos A$, (weil $y = A$, $x = R - c$ iſt). Daſſelbe Reſultat würde man aber auch erhalten, wenn man in 1) des §. 103 $b = R$ ſetzte. — Wäre im Dreieck C'B'D' auch $y = R$, während zugleich $A'B' = R$ und $A'D' = R$ iſt, ſo wäre a und überhaupt jeder von B' nach A'D' gezogene Bogen eines Hauptkreiſes gleich R, ferner auch $A = R$. Man erhielte alsdann $\cos a = o$, daſſelbe Reſultat, welches man in 1) des §. 103 erhalten würde, wenn man $b = R$ und $A = R$ ſetzte.

Fig. 33.



Der Lehrſatz des §. 103 iſt folglich für jedes ſphäriſche Dreieck richtig.

§. 106. Lehrsatz.

Für jedes sphärische Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$;

2) $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$;

3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$.

Beweis zu 1). Man lege ein beliebiges körperliches Dreieck zu Grunde. Für das Ergänzungsdreieck, dessen Winkel durch A', B', C', und dessen Seiten durch a', b', c' bezeichnet werden mögen, gilt nun nach 1) des §. 103 die Gleichung

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Da aber (§. 21) je eine Seite des einen Dreiecks mit dem zugehörigen Winkel des anderen sich zu 2R ergänzt, so ist $a' = 2R - A$, folglich $\cos a' = \cos(2R - A) = -\cos A$, $\sin b' = \sin(2R - B) = \sin B$ u. s. w. Setzt man diese Werthe in obiger Gleichung ein, so erhält man

$$-\cos A = (-\cos B).(-\cos C) + \sin B \sin C.(-\cos a),$$

oder $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.

Anm. Die Beweise zu 2) und 3) werden ebenso geführt.

§. 107. Zusatz.

Aus den drei Gleichungen:

I) $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$,

II) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

III) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$,

und aus den ihnen entsprechenden lassen sich einige neue Gleichungen ableiten, die besonders für logarithmische Berechnungen von großem Werthe sind. Nach II) erhält man:

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A, \text{ und}$$

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B, \text{ daher}$$

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos B} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B}.$$ *)

Aus dieser Gleichung folgt nun

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} + 1 = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} + 1, \text{ oder}$$

*) Weil $\sin b : \sin a = \sin B : \sin A$ ist.

$$1)\ \frac{(\cos a+\cos b)(1-\cos c)}{\cos b-\cos a\cos c}=\frac{\sin(B+A)}{\sin A\cos B}.$$

Es folgt ferner

$$\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\cos b-\cos a\cos c}-1=\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}-1, \text{ oder}$$

$$2)\ \frac{(\cos a-\cos b)(1+\cos c)}{\cos b-\cos a\cos c}=\frac{\sin(B-A)}{\sin A\cos B}.$$

Dividirt man 1) durch 2), so erhält man:

$$\frac{(\cos a+\cos b)(1-\cos c)}{(\cos a-\cos b)(1+\cos c)}=\frac{\sin(B+A)}{\sin(B-A)}, \text{ oder (§. 28 und}$$

§. 4 der Trigonometrie):

$$3)\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+a)\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B-A)}.$$

Aus III) erhält man auf demselben Wege:

$$4)\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(B-A)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(B+A)\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}.$$

Aus I) erhält man:

$$\frac{\sin b-\sin a}{\sin b+\sin a}=\frac{\sin B-\sin A}{\sin B+\sin A}, \text{ oder (§. 28 der}$$

Trigonometrie):

$$5)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+a)=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\cos\frac{1}{2}(B-A)\sin\frac{1}{2}(B+A)},$$

oder, umgekehrt geschrieben,

$$6)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-A)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(B+A)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}(b-a)\sin\frac{1}{2}(b+a)}.$$

Wenn man nun 5) und 3), ferner auch 6) und 4) durch einander dividirt, oder mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$\text{I.}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-a)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c.\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)};$$

$$\text{II.}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+a)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c.\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)};$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-A)=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)};$$

$$\text{IV. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+A)=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}.$$

Diese Gleichungen, die natürlich für beliebige Seiten und Winkel gelten, heißen die Neper'schen Analogieen.

Anm. Aus diesen vier Gleichungen läßt sich noch eine neue Beziehung zwischen Seiten und Winkeln ableiten. Dividirt man I durch II, so erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+a):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)$.

Da nun den größeren Winkeln immer die größeren Seiten, zwei gleichen Winkeln immer zwei gleiche Seiten gegenüberliegen, so ist $b\gtreqless a$, je nachdem $B\gtreqless A$ ist. Es hat daher $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)$ immer dasselbe Vorzeichen, wie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)$, folglich auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+a)$ dasselbe wie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)$, und es muß also $\frac{1}{2}(a+b)\gtreqless R$ sein, je nachdem $\frac{1}{2}(A+B)\gtreqless R$ ist.

§. 108. Zusatz.

Mit den bis jetzt gegebenen Formeln läßt sich die Berechnung der sphärischen Dreiecke ausführen. Nach der Natur der gegebenen drei Stücke sind sechs Hauptaufgaben zu stellen. Es können gegeben sein 1) 3 Seiten, 2) 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, 3) 2 Seiten und 1 Gegenwinkel, 4) 1 Seite und 2 anliegende Winkel, 5) 1 Seite, 1 anliegender und 1 Gegenwinkel, 6) 3 Winkel.

Anm. Ist ein sphärisches Dreieck rechtwinklig, ist z. B. $C=R$, so sind die zur Berechnung dienenden Formeln von einfacherer Gestalt, weil $\sin C=1$, $\cos C=0$ ist. Man erhält alsdann

I. aus §. 101:

1) $\sin A:\sin R=\sin a:\sin c$, oder $\sin a=\sin c\sin A$;

2) $\sin B:\sin R=\sin b:\sin c$, oder $\sin b=\sin c\sin B$;

II. aus §. 103:

3) $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos R$, oder $\cos c=\cos a\cos b$;

III aus §. 106:

4) $\cos A=-\cos B\cos R+\sin B\sin R\cos a$, oder
$\cos A=\sin B\cos a$; $\cos a=\cos A:\sin B$;

5) $\cos R=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$, oder
$\cos A\cos B=\sin A\sin B\cos c$, oder $\cos c=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B$.
Aus 1) und 4) erhält man außerdem

6) $\operatorname{tg}a=\sin c\operatorname{tg}A\sin B=\sin b\operatorname{tg}A$ (nach 2).

§. 109. Aufgabe.

Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sollen die drei Winkel berechnet werden.

Auflösung. Aus 1) des §. 103 ergiebt sich

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) : \sin b \sin c.$$

Um eine bequemere Form zu erhalten, setzt man

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

ferner $1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{-\cos(b+c) + \cos a}{\sin b \sin c}.$

Hieraus erhält man

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{-\cos(b+c) + \cos a}.$$

Nun ist $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$;

ferner $\frac{\cos(b-c) - \cos a}{-\cos(b+c) + \cos a} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(b-c+a) \sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)} =$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(-a+b+c)} = \frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-a)},$$

wenn man $\frac{1}{2}(a+b+c)$ durch s bezeichnet.

Schließlich ist also:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

Für $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ erhält man entsprechende Gleichungen.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu, da keiner der Winkel im dritten oder vierten Quadranten liegen darf.

§. 110. Aufgabe.

Aus zwei Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflöſung I. Es iſt $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Setzt man nun $\sin b \cos C = \cos b \operatorname{tg} v$, ſo iſt

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos b \operatorname{tg} v$$
$$= \cos b (\cos a + \sin a \operatorname{tg} v)$$
$$= \frac{\cos b \cos (a - v)}{\cos v}.$$

Iſt c gefunden, ſo erhält man A und B durch die Gleichungen

$$\sin C : \sin A = \sin c : \sin a;$$
$$\sin C : \sin B = \sin c : \sin b.$$

Auflöſung II. Aus III. und IV. der Neper'ſchen Analogieen (§. 107) erhält man unmittelbar A und B; C erhält man alsdann aus einer der eben angeführten Gleichungen.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Löſung zu.

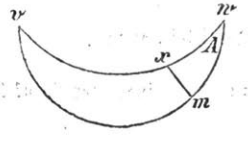
§. 111. Aufgabe.

Aus zwei Seiten a und b und einem Gegenwinkel A eines ſphäriſchen Dreiecks ſollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflöſung. Man erhält zunächſt $\sin B = (\sin b \sin A) : \sin a$. Iſt aber B gefunden, ſo erhält man c und C durch die Neper'ſchen Analogieen.

Die Aufgabe kann in einzelnen Fällen zwei Löſungen zulaſſen, weil B durch ſeinen Sinus gegeben iſt. Man kann alsdann folgende Betrachtung anwenden. Man ſuche das Dreieck auf geometriſchem Wege zu conſtruiren, zeichne (Fig. 34.) zunächſt zwei Hauptkreiſe, welche den ſphäriſchen Winkel A bilden, trage auf dem einen die Seite $b = wx$ ab und ſuche nun von x aus die Seite a nach dem Halbkreiſe vmw hinzuziehen. Zieht man die Hülfslinie xm, den Bogen eines Hauptkreiſes, der auf vmw ſenkrecht ſteht, ſo iſt unter allen Hauptkreisbogen, die von x nach vmw gezogen werden können, xm der kleinſte oder größte, je nachdem A ſpitz oder ſtumpf iſt.

Fig. 34.



Es ſei nun $A < 90^\circ$. Conſtruirt man von x aus die Seite a, ſo trifft dieſelbe den Halbkreis vmw gar nicht, wenn $a < xm$ iſt, und man erhält dann überhaupt kein Dreieck; ſie trifft einmal, wenn $a = xm$, folglich $B = R$ iſt; ſie trifft zweimal, wenn a kleiner als xw und

kleiner als xv, jedoch größer als xm ist; sie trifft einmal, wenn a kleiner als einer der Bogen xw oder xv, jedoch nicht zugleich kleiner als der andere ist.

Ist $A > 90^0$, so erhält man ein ähnliches Resultat.

Ist $A = 90^0$, so fällt xm mit xw oder xv zusammen, und man erhält nur ein Dreieck, außerdem jedoch ein symmetrisches. Ist zugleich $xw = R$, so muß auch $B = R$ sein, und die Aufgabe bleibt unbestimmt.

Das Endresultat dieser Betrachtung ist:

Man erhält ein Dreieck,

1) wenn $A = R$, 2) wenn $B = R$ ist, 3) wenn a seiner Größe nach zwischen b und (2R—b) liegt;

und man erhält zwei Dreiecke,

wenn a größer als b und (2R—b), oder wenn es kleiner als beide Bogen ist, zugleich aber auch weder A, noch B rechte Winkel sind.

Anm. Man kann dasselbe Resultat, wenngleich in anderer Form, auch in folgender Weise erhalten:

Nach §. 107 Anm. ist $\frac{1}{2}(A+B) \gtreqless 90^0$, je nachdem $\frac{1}{2}(a+b) \gtreqless 90^0$ ist.

1) Ist $\frac{1}{2}(a+b) = 90^0$, so ist $A+B = 180^0$. Folglich ist $B = 180^0 - A$ und hat also nur einen Werth.

2) Ist $\frac{1}{2}(a+b) < 90^0$, so ist $A+B < 180^0$. Ist nun $A \geq 90^0$, so ist B ein spitzer Winkel; ist aber $A < 90^0$, so kann B ebensowohl spitz, als stumpf sein, letzteres indeß nur dann, wenn zugleich $A+B < 180^0$ ist.

3) Ist $\frac{1}{2}(a+b) > 90^0$, so ist $A+B > 180^0$. Ist nun $A \leqq 90^0$, so ist B stumpf; ist aber $A > 90^0$, so kann B ebensowohl stumpf, als spitz sein, den Fall ausgenommen, wo $a < b$, folglich $A < B$ ist, wo also B nur stumpf sein kann.

§. 112. Aufgabe.

Aus einer Seite c und den beiden anliegenden Winkeln A und B eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Man erhält a und b aus I und II der Neper'schen Analogieen, und C durch die Gleichung $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

§. 113. Aufgabe.

Aus einer Seite a, dem Gegenwinkel A und dem anliegenden Winkel B eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Man erhält zunächst b durch die Gleichung $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$. Ist aber b gefunden, so erhält man C und c durch die Neper'schen Analogieen.

Anm. Die Aufgabe kann zwei Lösungen zulassen. Nun ist das fragliche Dreieck bestimmt, wenn sein Ergänzungsdreieck bestimmt ist. Von diesem kennt man zwei Seiten, nämlich (2R—A) und (2R—B), ferner den nicht eingeschlossenen Winkel (2R—a), kann also bestimmen, ob es zwei Lösungen oder nur eine zuläßt.

§. 114. Aufgabe.

Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks sollen die drei Seiten berechnet werden.

Auflösung. Es ist $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$.

Aus dieser Gleichung erhält man durch dieselbe Umformung, die in §. 109 angewendet worden ist, die bequemere Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A-B+C)}}.$$

Anm. 1. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

Anm. 2. Wenn man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel berechnet, so berechnet man damit zugleich aus den drei Winkeln des Polardreiecks dessen drei Seiten. Es geht hieraus hervor, daß für die Aufgaben der §§. 112—114 eigentlich die Lösung schon durch die vorangehenden Aufgaben gegeben war.

§. 115. Erklärung.

Werden die drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks durch gerade Linien (Sehnen) verbunden, so entsteht ein ebenes Dreieck, welches man das Sehnendreieck des sphärischen nennt. Ist man nun im Stande, die Beziehungen zwischen beiden Dreiecken anzugeben, so ist dadurch ein Mittel gefunden, sphärische Dreiecke mit dem Cirkel sowohl zu construiren, wie auch zu messen. Die Beziehungen zwischen beiden Dreiecken ergeben sich aber leicht daraus, daß die Sehne eines Bogens doppelt so groß ist, als der Sinus des halben Bogens, wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird. Sind also a, b, c die Seiten des sphärischen, a', b', c' die entsprechenden Seiten des Sehnendreiecks, so erhält man:

$$a' = 2 \sin \tfrac{1}{2} a;\ b' = 2 \sin \tfrac{1}{2} b;\ c' = 2 \sin \tfrac{1}{2} c;\ \text{oder}$$

1) $\sin \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a';\ \sin \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} b';\ \sin \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} c'.$

Da ferner nach 1)

$1-2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\frac{1}{2}a'^2$, $1-2\sin^2\frac{1}{2}a$ aber auch gleich $\cos a$ ist, so ergiebt sich ferner:

2) $\cos a=1-\frac{1}{2}a'^2$; $\cos b=1-\frac{1}{2}b'^2$; $\cos c=1-\frac{1}{2}c'^2$.

Vermittelst dieser zwei Gleichungen ist es nun leicht, aus dem einen Dreiecke das andere zu bestimmen.

Beispiel. Auf einer Kugel, deren Radius = 20′ ist, soll ein sphärisches Dreieck construirt werden, dessen Seiten a, b, c gleich 80°, 70°, 60° sind. Wie groß sind die Seiten a′, b′, c′ des Sehnendreiecks?

Auflösung. Es ist $a'=2.20.\sin 40^\circ=25{,}711\ldots'$;

$b'=2.20.\sin 35^\circ=22{,}943\ldots'$;

$c'=2.20.\sin 30^\circ=20'$.

§. 116. Vermischte Aufgaben.

I. Von zwei Punkten A und B auf der Erdoberfläche kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll die sphärische Entfernung dieser Punkte bestimmt werden unter der Voraussetzung, daß die Erde eine vollkommene Kugel ist.

Auflösung. Man berechne das sphärische Dreieck, dessen drei Eckpunkte A, B und der Nordpol P sind. Liegt nun z. B. A auf der nördlichen Halbkugel, und ist seine Breite gleich b, so ist die Seite PA gleich 90°—b; liegt es aber auf der südlichen Halbkugel, so ist PA = 90°+b. Man kann jedoch unter allen Umständen PA = 90°—b setzen, wenn man feststellt, daß die Grade nördlicher Breite positiv, die Grade südlicher Breite negativ in Rechnung kommen sollen; aus demselben Grunde müssen die Grade östlicher Länge negativ genommen werden, wenn die Grade westlicher Länge positiv sein sollen.

Hat nun A die Breite b und die Länge l, B die Breite b′ und die Länge l′, so ist im sphärischen Dreiecke PAB: PA = 90°—b, PB = = 90°—b′, und der von PA und PB eingeschlossene Winkel ist gleich l—l′.*) Die weitere Lösung ergiebt sich alsdann aus §. 110.

Ist z. B. b = +20°, l = +50°, b′ = —30°, l′ = +120°, so ist die gesuchte Entfernung in Graden gleich 83°50′19,8...″, in Meilen gleich 1254,48... M., wenn der Radius gleich 858 Meilen gesetzt wird.

*) Die Differenz l—l′ muß stets positiv genommen werden.

II. Von drei Punkten A, B, C auf der Erdoberfläche, welche nicht auf demselben Hauptkreise liegen, kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll der Inhalt des sphärischen Dreiecks A B C unter der bei I. gemachten Voraussetzung berechnet werden.

Auflösung. Die Seiten AB, AC, CB werden mit Hülfe von I. berechnet, und aus den Seiten dann die drei sphärischen Winkel x, y, z des Dreiecks. Kennt man aber diese, so ist (nach §. 77):

$$J = \frac{x+y+z-180^0}{720^0} \cdot 4r^2\pi = \frac{S-180^0}{720^0} \cdot K.$$

III. Von allen Eckpunkten eines Polygons auf der Erdoberfläche kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll unter der bei I. gemachten Voraussetzung der Inhalt dieses Polygons berechnet werden.

Auflösung. Aus einer Ecke A ziehe man Bogen größter Kreise nach allen übrigen Ecken und zerlege so das sphärische n eck in n—2 sphärische Dreiecke. Für jedes dieser Dreiecke erhält man dann aus I. und II. die Seiten und Winkel, und alsdann ist (nach §. 78):

$$J = \frac{S-(n-2)180^0}{720^0} \cdot K.$$

IV. Von einem schiefen Parallelepipedum kennt man drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten, ferner auch die Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden. Es soll der Inhalt des Parallelepipedums berechnet werden.

Auflösung. Es seien a und b zwei Grundkanten, c eine Seitenkante; der von a und b gebildete Kantenwinkel werde bezeichnet durch (W. ab), die übrigen in entsprechender Weise. Nun ist der Inhalt des Parallelepipedums gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe (G.H). Es ist aber:

$$1)\ G = a.b.\sin(W.ab).$$

Ferner ist der senkrechte Abstand der Grundkante b von der in derselben Seitenebene ihr gegenüberliegenden Kante gleich $c.\sin(W.bc) = h$, und die Höhe H des Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus h und dem Sinus des Flächenwinkels x, welchen die Grundebene mit der zu h gehörenden Seitenebene bildet. Es ist also

$$2)\ H = h.\sin x = c.\sin(W.bc).\sin x, \text{ und}$$

$$3)\ J = a.b.c.\sin(W.ab).\sin(W.bc).\sin x.$$

In dieser Gleichung (3) ist noch x zu bestimmen. Da aber a, b und c ein körperliches Dreieck bilden, dessen Seiten die gegebenen Kantenwinkel sind, so ergeben sich die Winkel desselben aus §. 109.

V. Von einem schiefwinkligen Parallelepipedum kennt man drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten und auch die Diagonalen, die von dieser Ecke aus in den drei zusammenstoßenden Ebenen gezogen werden können. Es soll der Inhalt des Parallelepipedums bestimmt werden.

Auflösung. Von jedem der drei Parallelogramme, welche in der Ecke zusammenstoßen, kennt man die Seiten und eine Diagonale, kann also die Winkel desselben berechnen. Dadurch ist die Aufgabe zurückgeführt auf IV.

VI. Es soll in einem körperlichen Dreiecke der Winkel bestimmt werden, den eine der drei Kanten mit ihrer Projection auf die gegenüberliegende Seite bildet.

Auflösung. Sind a, b, c die drei Seiten, wird die von a und b gebildete Kante auf c projicirt, und bildet sie mit ihrer Projection den Winkel z, so ist z die Seite eines rechtwinkligen körperlichen Dreiecks, von dem man die Seite a, den der Seite a gegenüberliegenden rechten Winkel, und den der Seite z gegenüberliegenden Winkel B kennt. Man hat alsdann die Gleichung $\sin a : \sin z = \sin R : \sin B$, daher

$$\sin z = \sin a . \sin B.$$

Soll sinB durch die Seiten a, b, c ausgedrückt werden, so ist §. 109 zu benutzen.

VII. Es sollen in einem körperlichen Dreiecke die Winkel bestimmt werden, welche die Projection einer Kante auf die gegenüberliegende Seite mit den beiden anderen Kanten bildet.

Auflösung. Es seien a, b, c die drei Seiten des Dreiecks; die von a und b gebildete Kante werde auf c projicirt und bilde mit ihrer Projection den Winkel z; die Projection bilde ferner mit der Kante, in welcher a und c sich schneiden, den Winkel x, mit der anderen also den Winkel (c—x). In den zwei so entstandenen rechtwinkligen Dreiecken ist nun (nach §. 108):

$$\cos a = \cos z \cos x,$$
$$\cos b = \cos z \cos (c - x),$$

folglich $\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos(c-x)}{\cos x} = \frac{\cos c \cos x + \sin c \sin x}{\cos x} =$

$= \cos c + \sin c \operatorname{ctg} x$, also schließlich

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos b}{\cos a \sin c} - \operatorname{ctg} c.$$

Ebenso ist $\operatorname{tg}(c-x) = \frac{\cos a}{\cos b \sin c} - \operatorname{ctg} c.$

VIII. Es soll die Projection x eines Winkels o auf eine gegebene Ebene bestimmt werden, wenn die Winkel p und q gegeben sind, welche die Schenkel a und b des Winkels o mit der Ebene bilden.

Auflösung. Man lege durch den Scheitelpunkt des Winkels o eine Ebene, welche der gegebenen parallel ist; die Projection von o auf erstere Ebene ist dann ebenfalls gleich x. Legt man ferner durch die Schenkel a und b Ebenen, welche auf der Projectionsebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Schneidungslinie senkrecht auf derselben. Diese Schneidungslinie bildet oberhalb der Ebene des Winkels o mit dem Schenkel a den Winkel R—p, mit dem Schenkel b den Winkel R—q, und man hat also oberhalb der Ebene des Winkels o ein körperliches Dreieck, dessen Seiten gegeben sind durch o, R—p und R—q, und in welchem der Winkel, welcher o gegenüber liegt, gleich x ist. Man erhält aber alsdann (§. 109):

$$\cos x = \frac{\cos o - \cos(R-p)\cos(R-q)}{\sin(R-p)\sin(R-q)} = \frac{\cos o - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}.$$

(Ueber die Umformung des erhaltenen Ausdrucks vergl. §. 109.)*)

Anm. Die schönsten Anwendungen findet die sphärische Trigonometrie in der Astronomie. Dieselben müssen aber hier übergangen werden, da die dazu nöthigen Erklärungen nicht gut in der Kürze gegeben werden können.

*) Vergleiche die Auflösung dieser Aufgabe auf Seite 43.

Aufgaben zur numeriſchen Berechnung.*)

	A	B	C
1)	110° 10′ 0″;	70° 20′ 50″;	133° 18′ 0″;
2)	128° 58′ 0″;	106° 1′ 6″;	141° 15′ 0″;
3)	128° 18′ 46″;	109° 39′ 10″;	141° 32′ 0″;
4)	94° 15′ 0″;	126° 30′ 0″;	60° 45′ 0″;
5)	40° 23′ 27″;	32° 30′ 7,9″;	131° 11′ 20″;
6)	48° 4′ 23″;	69° 12′ 22″;	92° 9′ 43″;

	a	b	c
1)	147° 5′ 32″;	33° 1′ 51″;	155° 5′ 13″;
2)	133° 26′ 19″;	64° 50′ 53″;	144° 13′ 45″;
3)	127° 30′ 0″;	72° 12′ 53″;	141° 1′ 33″;
4)	121° 20′ 11″;	136° 29′ 21″;	48° 21′ 18,7″;
5)	59° 20′ 0″;	45° 30′ 0″;	92° 40′ 0″;
6)	45° 30′ 0″;	63° 40′ 0″;	73° 20′ 0″.

*) Bei den Aufgaben 1) — 4) ſind zu der Berechnung die Winkel, bei den übrigen die Seiten zu Grunde gelegt.

Druck von Gebrüder Katz in Dessau.

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,
Lehrer der Mathematik und Physik an der Handelsschule zu Dessau.

Erster Cursus der Arithmetik.

Dessau.
Druck und Verlag von Gebrüder Katz.
1853.

Erſter Curſus

der

Arithmetik.

Vorwort.

Ein Lehrbuch der Mathematik, welches für den Schulunterricht bestimmt sein soll, darf nicht, wie ein System der Mathematik, seinen Stoff mit durchweg gleichmäßiger Strenge behandeln, sondern muß sich in seinen verschiedenen Cursen der Fassungskraft der Schüler anschließen. Jeder frühere Cursus ist demnach nicht nur in der Wahl des Stoffes, sondern auch in der Behandlung desselben nach einem ganz andern Maßstabe einzurichten, als die spätern. Während der geübtere Schüler auf den innern Zusammenhang, auf die Allgemeingültigkeit oder die bloß specielle Richtigkeit der einzelnen Sätze aufmerksam gemacht werden muß, wobei man sich streng an das System anschließen kann, so ist der Anfänger überhaupt erst an die mathematische Form zu gewöhnen, muß erst das Einzelne verstanden haben, ehe er sich an die Verbindung desselben zu einem Ganzen wagen darf, und muß in der Lösung der vorbereitenden Aufgaben nicht nur ein klares Verständniß, sondern auch eine mechanische Fertigkeit gewonnen haben.

Von diesen Ansichten hat sich der Verfasser bei vorliegendem ersten Cursus leiten lassen und hat daher kein Bedenken getragen, zuweilen die mathematische Consequenz außer Augen zu lassen, wenn es sich darum handelte, dem Schüler das Verständniß und schnellere Fortschreiten zu erleichtern. Der mögliche Schaden, den eine solche Inconsequenz haben könnte, wird dadurch illusorisch, daß in höhern Klassen die frühern Capitel wiederholt und dabei von einem allgemeinern, wissenschaftlichern Standpunkte aus betrachtet werden. In Bezug auf die Methode hat er bei diesem und den folgenden Theilen den Grundsatz festgehalten, die schwierigern Sätze stets vollständig zu entwickeln, die leichtern hin-

gegen bloß anzudeuten und dem Schüler zur selbstständigen Bearbeitung zu überlassen.

Im ersten Capitel hat der Verfasser nur die nothwendigsten Formeln aufgestellt, aber danach gestrebt, durch viele Beispiele und Aufgaben dieselben geläufig zu machen. Ferner hat er versucht, die Beweise mehr auf Anschauung, als auf mathematische Folgerungen zu gründen, weil der Anfänger die mathematischen Beweise meistens nicht versteht und deßhalb vor dem ganzen Stoffe zurückschreckt, während sie der Geübtere leicht selbst findet. Die Definition der algebraischen Summe ist etwas abgeändert, um die Behandlung derselben zu erleichtern.

Im zweiten Capitel ist die Anwendung der vier Species in Buchstaben auf ganze Zahlen und gewöhnliche Brüche übergangen, weil einige mündliche Andeutungen des Lehrers hier vollständig genügen und das Volumen des Buches nicht unnöthig vergrößert werden sollte.

Die Capitel über Berechnung der Wurzeln und über algebraische Gleichungen sind aus mehreren Gründen in den ersten Cursus gezogen, während die Potenzen nur empirisch behandelt und die genauern Entwicklungen derselben dem zweiten Cursus zugewiesen worden sind. Theils sind nämlich obige Capitel zur Befestigung der früheren geeigneter, als die letzten drei Operationen, theils sind sie auch im ersten Cursus als formelles Bildungsmittel und als Mittel, die Theilnahme rege zu erhalten, den andern vorzuziehen. Ein zweiter Grund liegt darin, daß der größere Theil der Schüler den mathematischen Unterricht nur einige Jahre genießt, und in dieser Zeit größern Nutzen aus der Lehre von den algebraischen Gleichungen, als aus der genauen Lehre von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zieht. Es versteht sich von selbst, daß nur die leichtern Aufgaben für Anfänger bestimmt sind.

Die Aufgaben sind theils vom Verfasser selbst, theils sind sie aus den Sammlungen von Meier Hirsch und Lautenschläger entlehnt.

Außerdem ist der Verfasser noch dem Herrn Oberlehrer Happach, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Dessau, für seine freundliche Unterstützung in Rath und That besondern Dank schuldig.

Dessau, April 1853.

H. Gerlach.

Inhalt.

Erster Cursus der Arithmetik.

Seite.

Einleitung 1

Erstes Capitel. Die vier Species 3

A. Die Addition 3

B. Die Subtraction 4

Algebraische Summe 5

Negative und positive Zahlen 8

C. Die Multiplication 11

Multiplication algebraischer Summen 15

Reductionen von Produkten 16

D. Die Division 20

Reductionen von Quotienten 24

Division algebraischer Summen 26

Zweites Capitel. Anwendung der gegebenen Formeln auf das Zifferrechnen 37

A. Das Zahlensystem 37

B. Theilbarkeit der Zahlen 39

C. Decimalbrüche 44

D. Benannte Zahlen 53

Drittes Capitel. Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln . 55

A. Die Quadratwurzeln 57

B. Die Kubikwurzeln 67

Viertes Capitel. Allgemeine Ungleichungen, Proportionen . . 72

A. Allgemeine Ungleichungen 72

B. Proportionen 74

Fünftes Capitel. Algebraiſche Gleichungen 78
A. Gleichungen des erſten Grades mit einem Unbekannten 79
B. Gleichungen des erſten Grades mit zwei Unbekannten 93
C. Gleichungen des erſten Grades mit drei oder mehreren Unbekannten 97
D. Quadratiſche Gleichungen mit einem Unbekannten 111
E. Quadratiſche Gleichungen mit mehreren Unbekannten 115

Berichtigungen.

Seite 16 Beiſpiel II. lies 15bb für 15ab.
= 26 Zeile 6 lies $+\frac{6ac}{5b}$ für $-\frac{6ac}{5b}$.
= 48 = 12 = einen für einem.
= 55 = 3 = $\frac{x:v}{(y:v)A}$ für $\frac{(y:v)A}{x:v}$.
= 55 = 15 = m für b.
= 62 = 3 = 583 für 343.
= 62 = 9 = 116(3) für 118(3).
= 69 = 8 = 648 für 1648.
= 102 Aufgabe 43 lies $3x-3z$ für $2x+3z$.
= 108 = 1 von unten lies 43) für 42).

Arithmetik.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Die Mathematik ist die Lehre von den Größen, das heißt von dem, was theilbar ist. Eine Größe zeigt sich entweder als zusammenhängendes Ganzes, als etwas im Raume Ausgedehntes, z. B. als Körper, oder sie zeigt sich als eine Wiederholung gleichartiger Dinge, als eine Anzahl. Man unterscheidet daher Raumgrößen und Zahlengrößen und theilt die Mathematik ein in die Lehre von den Raumgrößen und in die Lehre von den Zahlengrößen oder in Geometrie und Arithmetik.

Anm. Bei den Sätzen, welche die Mathematik aufstellt, unterscheidet man Grundsätze oder Axiome und Lehrsätze. Erstere leuchten dem Verstande sogleich ein und bedürfen deshalb keiner Begründung, letztere hingegen müssen erst bewiesen werden.

§. 2. Erklärung.

Eine bestimmte Menge von gleichartigen Dingen bildet eine benannte Zahl; die bloße Angabe hingegen, wie oft ein Ding vorkomme, eine unbenannte Zahl. Durch fortgesetzte Wiederholung ein und desselben Dinges gelangt man zur Vorstellung der Zahlenreihe, d. h. der aufeinanderfolgenden unbenannten Zahlen.

Anm. Die reine Arithmetik beschäftigt sich bloß mit unbenannten Zahlen; unter dem Ausdrucke „Zahl" ist daher in der Folge immer eine unbenannte Zahl zu verstehen.

§. 3. Erklärung.

Rechnen heißt zwei oder mehrere Zahlen zu einer einzigen verbinden. Die verschiedenen Arten, Zahlen zu verbinden, nennt man Operationen.

Beim Rechnen bezeichnet man die Zahlen durch Ziffern oder durch Buchstaben. Letzteres thut man, so oft man keine bestimmten Zahlen im Auge hat, sondern nur die Art und Weise des Verfahrens darstellen will. Für die ersten neun Zahlen der Zahlenreihe hat man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; die folgenden drückt man durch Zusammenstellung mehrerer Ziffern aus.

§. 4. Erklärungen und Grundsätze.

Sind zwei Zahlen gleich groß, so drückt man dies durch die Schreibart

$$a = b \text{ (ausgesprochen a gleich b)}$$

aus und nennt diese Form eine Gleichung.

Für die Gleichung hat man die Grundsätze:

1) $a = a$,

d. h. jede Größe ist sich selbst gleich.

2) Ist $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$,

d. h. sind zwei Größen a und c gleich b, so sind sie auch untereinander gleich.

Zur Bezeichnung der ungleichen Größe bedient man sich der Schreibart $a > b$ (a größer als b) oder $b < a$ (b kleiner als a) und nennt diese Form eine Ungleichung. Die Zahl b ist größer als a, wenn sie in der Zahlenreihe eine spätere Stelle einnimmt.

Erstes Capitel.

Die vier Species.

§. 5. Erklärung.

Es giebt sieben Operationen. Die vier ersten, welche man auch die vier Species nennt, sind das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren.

A. Die Addition.

§. 6. Erklärung.

Die Zahl b zur Zahl a addiren oder hinzufügen, heißt eine Zahl suchen, die b Einheiten mehr hat als a, oder so viel Einheiten, wie a und b zusammengenommen. Sollen a und b addirt werden, so schreibt man zwischen beide ein stehendes Kreuz, also $a + b$ (ausgesprochen a plus b). Um auszudrücken, daß a und b wirklich addirt worden sind und daher eine einzige Zahl bedeuten, schließt man $a + b$ in Klammern ein und schreibt also $(a + b)$.

a und b nennt man Summanden, $(a + b)$ eine Summe. $(a+b+c+d)$ bedeutet demnach eine Zahl, die soviel Einheiten hat, als a, b, c und d zusammen.

§. 7. Lehrsätze.

Da man die Zahl $(a+b)$ erhält, mag man nun b zu a, oder a zu b addiren, so ist:

1) $a+b = b+a.$

Ebenso ist

2) $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c),$

da man immer die nämliche Zahl erhält.

Für die Addition gilt daher das Gesetz, daß man die Summanden in beliebiger Ordnung addiren kann. Man schreibt deßhalb Summen, die aus mehreren Summanden bestehen, gewöhnlich bloß mit einer Klammer, welche sämmtliche Summanden einschließt, z. B.:

$$(a + b + c + d + e + f).$$

Anm. Gleichungen, welche bloß eine Gleichheit in der Art des Rechnens anzeigen, wie $a + b = b + a$, nennt man Formeln.

§. 8. Grundsatz.

Aus der Erklärung des Addirens ergiebt sich der Grundsatz:

$$\text{Ist } a = b, \text{ so ist auch } a + m = b + m$$

oder: Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.

B. Die Subtraction.

§. 9. Erklärung.

Die Zahl b von der Zahl a subtrahiren oder wegnehmen, heißt eine Zahl suchen, die um b Einheiten kleiner ist als a, oder zu der man b addiren muß, um a zu erhalten. Die Subtraction deutet man an durch die Form $a - b$ (a minus b). a heißt der **Minuend**, b der **Subtrahend**. Die gesuchte Zahl $(a - b)$ heißt eine **Differenz**. Nach der Erklärung der Differenz ist also:

$$(a + b) - b = a$$
$$(a + b + c + d) - (c + d) = a + b$$
$$(a - b) + b = a.$$

§. 10. Grundsätze.

Für die Subtraction gelten folgende Grundsätze:

1) Ist $a = b$, so folgt $a - m = b - m$
2) Ist $a = b$, " " $n - a = n - b$
3) Ist $a + m = b + m$, so folgt $a = b$
4) Ist $a - m = b - m$, " " $a = b$
5) Ist $n - a = n - b$, " " $a = b$.

§. 11. Lehrsätze.

Sind bei einer Differenz Subtrahend und Minuend nicht einfache Zahlen, sondern selbst Summen oder Differenzen, so läßt sich eine solche Differenz auf verschiedene Art berechnen.

Soll c von $(a + b)$ subtrahirt werden, so kann man entweder sogleich die Summe $(a + b)$ um c Einheiten verringern, oder man zer-

trennt (a + b) in die zwei Summanden, verringert bloß den einen Summanden um c und addirt hernach den andern. Es ist also:

1) (a + b) — c = (a — c) + b = a + (b — c).

Beweis. Sämmtliche drei Ausdrücke geben a + b, wenn man c addirt und sind daher nach Grundsatz 3 des §. 10 gleich groß.

Soll (b + c) von a subtrahirt werden, so subtrahirt man entweder (b + c) auf einmal, oder erst den einen, dann den andern Summanden. Es ist also:

2) a — (b + c) = (a — b) — c = (a — c) — b.

Beweis. Sämmtliche drei Ausdrücke geben a, wenn man b + c addirt.

Soll c von (a — b) subtrahirt werden, so ergiebt sich die Regel, wenn man die Formel 2 rückwärts liest. Es ist also:

3) (a — b) — c = (a — c) — b = a — (b + c).

Soll (b — c) von a subtrahirt werden, so subtrahirt man zuerst b; alsdann hat man aber c Einheiten zu viel weggenommen und muß daher noch c Einheiten zu (a — b) addiren. Es ist also:

4) a — (b — c) = (a — b) + c = (a + c) — b (nach 1).

Beweis. Sämmtliche drei Ausdrücke geben a, wenn man (b — c) addirt.

Anm. Die bis jetzt angeführten Formeln sind zunächst bloß richtig, wenn die einzelnen Buchstaben ganze Zahlen bedeuten. Sie bleiben aber auch richtig, d. h. führen zu keinem Widerspruch, wenn man den einzelnen Buchstaben die Bedeutung von Differenzen ganzer Zahlen giebt.

§. 12. Erklärung.

Sollen verschiedene Zahlen hintereinander mit a theils durch Addition, theils durch Subtraction verbunden werden, so schreibt man dergleichen Ausdrücke gewöhnlich ohne Klammern und beginnt dann mit der Rechnung auf der linken Seite. Daher ist:

$$a + b - c - d + e = \{[(a + b) - c] - d\} + e.$$

Ausdrücke von dieser Form a + b — c — d + e nennt man algebraische Summen mit einfachen Gliedern; die zu subtrahirenden Zahlen nennt man subtractiv, die zu addirenden additiv. Will man subtractive oder additive Zahlen für sich allein schreiben, so bezeichnet man ihre Eigenschaft durch die Schreibart (— a) oder (+ a).

§. 13. Zusatz.

Da in obiger algebraischen Summe c und d subtrahirt werden sollen, so kann man auch nach Formel 3 des §. 11 ihre Summe subtrahiren. Daher ist $(a + b - c - d + e) = (a + b + e) - (c + d)$.

In algebraischen Summen addirt man also alle additiven Glieder, ebenso alle subtractiven, und zieht dann letztere Summe von ersterer ab.

§. 14. Zusatz.

Sind die Glieder einer algebraischen Summe zusammengesetzt, d. h. selbst Summen oder Differenzen, so kann man dieselbe leicht in eine algebraische Summe mit einfachen Gliedern verwandeln, wenn man die Formeln des §. 11 benutzt. In

$$a + (b - c) - (d + e) - (f - g)$$

soll zuerst $b - c$ addirt werden; nach Formel 1 wird b addirt, dann c subtrahirt. Ferner soll $d + e$ subtrahirt werden; nach Formel 2 wird erst d, dann e subtrahirt. Schließlich soll $f - g$ subtrahirt werden; nach Formel 4 wird f subtrahirt, g hernach addirt. Es ist also:

$$\begin{aligned} a + (b - c) - (d + e) - (f - g) &= a + b - c - d - e - f + g \\ &= (a + b + g) - (c + d + e + f). \end{aligned}$$

Bei den additiven zusammengesetzten Gliedern läßt man also die Klammern ohne Weiteres weg, bei den subtractiven ändert man das Zeichen innerhalb der Klammer (d. h. + in −, − in +), sobald die Klammer weggelassen oder der zusammengesetzte Ausdruck aufgelöst werden soll.

§. 15. Zusatz.

Sind die Glieder einer algebraischen Summe selbst algebraische Summen mit einfachen Gliedern, so kann man jede dieser einfachen Summen in einen additiven und in einen subtractiven Theil zerlegen und dann wie bei der vorigen Aufgabe verfahren. Man findet alsdann, daß man die Klammern der additiven Ausdrücke ohne Weiteres weglassen kann, die der subtractiven aber nur, wenn man zugleich sämmtliche Zeichen innerhalb der Klammer umändert. Es ist also:

$$\begin{aligned} &(a + b - c) - (d - e + f - g) + (h - i + k) = \\ &= a + b - c - d + e - f + g + h - i + k = \\ &= (a + b + e + g + h + k) - (c + d + f + i). \end{aligned}$$

§. 16. Zusatz.

Sind schließlich die Glieder einer algebraischen Summe selbst algebraische Summen mit zusammengesetzten Gliedern, so behandelt man zunächst jedes einzelne Glied für sich und verwandelt es in eine algebraische Summe mit einfachen Gliedern. Alsdann verfährt man wie bei den vorigen Aufgaben. So ist in:

$$[a - (b - c) - (d + e)] - [f - (g - h + i)]$$

1) $a - (b - c) - (d + e) = a - b + c - d - e$, ferner

2) $f - (g - h + i) = f - g + h - i$, also

$$[a - (b - c) - (d + e)] - [f - (g - h + i)] = (a - b + c - d - e) -$$
$$- (f - g + h - i) = a - b + c - d - e - f + g - h + i =$$
$$= (a + c + g + i) - (b + d + e + f + h).$$

§. 17. Zusatz.

Eine algebraische Summe läßt sich also jedesmal in eine einfache Differenz verwandeln, mögen ihre Glieder auch noch so sehr zusammengesetzt sein.

§. 18. Erklärung.

Alle bis jetzt angeführten Differenzen haben zunächst nur dann eine Bedeutung, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist, weil nur für diesen Fall die Differenz gleich einer Zahl der Zahlenreihe ist. Die algebraische Summe $5 - 7 + 8$ läßt sich daher nicht berechnen, wenn man anfangen will, $5 - 7$ zu berechnen. Da aber $5 - 7 + 8 = 5 + 8 - 7 = 6$ ist, also eine wirkliche Zahl vorstellt, so frägt es sich, ob man nicht der Differenz $5 - 7$ eine solche Bedeutung geben kann, daß man im Stande ist, die Rechnung auszuführen, auch ohne die Ordnung der einzelnen Glieder zu ändern.

§. 19. Erklärung.

Die Differenzen, deren Bedeutung fraglich ist, weil sie keine Zahl der Zahlenreihe vorstellen, sind $(m - m)$ und $[m - (m + n)]$.

Kommt in einer algebraischen Summe die Differenz $(m - m)$ vor, so muß bei der Auflösung der Klammern m einmal additiv, das andere Mal subtractiv werden. Da aber nun

$(a + m) - m = a$ und

$(a - m) + m = a$

ist, so folgt, daß die Differenz (m — m), weder wenn sie addirt, noch wenn sie subtrahirt wird, eine Veränderung hervorbringt. Man bezeichnet sie mit 0 (Null). Es ist also:

1) $a + 0 = a$
2) $a - 0 = a$
3) $0 + 0 = 0$
4) $0 - 0 = 0.$

Kommt daher die Differenz (m — m) vor, so schreibt man statt derselben 0 oder läßt sie ohne Weiteres weg, z. B.:

$$6 - 6 + 8 = 0 + 8 = 8.$$

§. 20. Erklärung.

Enthält eine algebraische Summe die Differenz $m - (m + n)$, so kann man den Minuenden m nur um m Einheiten verringern, wobei man das Resultat $m - m = 0$ erhält. Die übrigen n Einheiten des Subtrahenden muß man von einem andern additiven Gliede der algebraischen Summe subtrahiren. Ist das folgende Glied additiv, so subtrahirt man n von demselben, ist es aber selbst subtractiv, z. B. (— p), so hat man zuerst n, dann noch p, also im Ganzen (p + n) zu subtrahiren. Das weitere Verfahren ist dasselbe.

Beispiele.

$5 - 7 + 8 = 0 - 2 + 8 = 6$

$3 - 9 + 4 + 7 = 0 - 6 + 4 + 7 = 0 - 2 + 7 = 5$

$3 - 8 - 2 + 4 + 9 = 0 - 5 - 2 + 4 + 9 = 0 - 7 + 4 + 9 = 0 - 3 + 9 = 6.$

Das Resultat der Differenz 5 — 7 bezeichnet man gewöhnlich durch (0 — 2) oder (— 2) und nennt diesen Ausdruck eine negative Zahl; das Resultat von 7 — 5 bezeichnet man entweder einfach durch 2, oder auch durch (0 + 2) oder (+ 2), und nennt diesen Ausdruck eine positive Zahl.

Erhält man also inmitten der Berechnung einer algebraischen Summe mit einfachen Gliedern eine negative Zahl, so läßt sich die Rechnung weiter fortführen, ohne daß man die Ordnung der Glieder zu ändern braucht. Die Regeln für alle möglichen Fälle sind in folgenden drei Formeln enthalten:

1) $(-a)+b=+(b-a)$ Beisp. $-5+7=+(7-5)=+2$
2) $(-a)+b=-(a-b)$ „ $-5+3=-(5-3)=-2$
3) $(-a)-b=-(a+b)$ „ $-5-3=-(5+3)=-8$

Anm. Es ist leicht einzusehen, daß (— a) an und für sich keine Bedeutung hat, (weil es keine Zahl giebt, die um a kleiner ist, als 0), dieselbe aber erhält, wenn es in bestimmte Beziehung zu andern Zahlen tritt. Will man das Verhältniß von (— a) und (+ a) durch einen Vergleich anschaulich machen, so kann man dazu Schulden und Vermögen, Verlust und Gewinn u. s. w. wählen.

§. 21. Erklärung.

Wie man bei einer algebraischen Summe mit einfachen Gliedern negative Ausdrücke erhalten kann, so können auch in einer algebraischen Summe mit zusammengesetzten Gliedern die einzelnen Glieder negative Ausdrücke liefern. Man erhält alsdann einen Ausdruck von der Gestalt:

$$a+(-b)-(+c)-(-d)+(+e).$$

Will man diesen Ausdruck in eine gewöhnliche algebraische Summe mit einfachen Gliedern verwandeln, so findet man die Regel leicht mit Hülfe weniger Formeln. Zunächst kann man statt der positiven Zahlen die einfachen Zahlen schreiben,

nämlich: 1) $a+(+b)=a+b$
2) $a-(+b)=a-b.$

Ferner ist: 3) $a+(-b)=a+(0-b)=a-b$
4) $a-(-b)=a-(0-b)=a+b.$

Es reduciren sich also zwei gleiche Zeichen, die zu derselben Zahl gehören, auf ein positives (nach 1 und 4), zwei ungleiche Zeichen auf ein negatives. Obiger Ausdruck geht demnach über in $a-b-c+d+e$.

Anm. Es ergiebt sich aus diesem Paragraphen zugleich, daß subtractiv und negativ, additiv und positiv nicht dasselbe ist. Eine subtractive Zahl kann positiv oder negativ sein u. s. w.

§. 22. Zusatz.

Die Behandlung zusammengesetzter Ausdrücke ist dieselbe. Es ist z. B.:

1) $(-a)-\{b+[-(c+d+e)]-[-(f+g)]\}=$
$=-a-\{b-(c+d+e)+(f+g)\}$ *) $=$
$=-a-(b-c-d-e+f+g)=$
$=-a-b+c+d+e-f-g=$
$=(+c+d+e)-(a+b+f+g).$

2) $-\{-[-a]\}=-(+a)=-a.$

*) Nach 3 und 4 des §. 21.

§. 23. Zuſatz.

Da $a + (-b) = a - (+b)$

und $a - (+b) = a + (-b)$

iſt, ſo kann man, ſtatt einen beliebigen Ausdruck zu addiren, denſelben mit veränderten Zeichen ſubtrahiren, oder ſtatt einen Ausdruck zu ſubtrahiren, denſelben mit veränderten Zeichen addiren.

$a + (b - c + d - e - f) = a - (-b + c - d + e + f);$

$b - (c - d + e - f - g) = b + (-c + d - e + f + g).$

Aufgaben.

Es ſollen folgende algebraiſche Summen berechnet werden:

1) $a + (c - d) - (e - f + g) - (h - i - k)$

2) $(a + b - c) - (d - e + f - g + h) + (i - k + l)$

3) $a - (b - c + d) + [e - (f + g)]$

4) $a - [b - (c + d)] - [e - (f - g)]$

5) $a - [b + c - (d + e)] - [f + g - h - (i - k)]$

6) $(c + f - g) - \{a - [g + (m - c - b)] - (h - f)\}$

7) $a - \{b + [c - (d + e) + f] + [g - (h - i)]\}$

8) $-(a + b) + c - \{[d - (e + f)] + h - i\}$

9) $-[a - (b - c)] + [c - (d + e)] - [f - [g - (h + i)]]$

10) $-[a - (b + c - d)] - [b - (d + f - g)] - (c - a + h)$

11) $-\{a - [b - (c - d)] - e\}$

12) $-\{(a - b) - [c - (d - e)] + [f - (a - c)]\} - [b - (d + h)]$

13) $-\{(a + b) - [c + d - (e + f)]\} + \{-[g - (h + i)] + l + [m - (n - v)]\}$

14) $-\{-[b + (a - c)] + [d - [e - (f + g)] - h] - [[l - (m - n) - v] - [p + (q - s)]]\}$

15) $4 + 5 - 7 + 3 - 2 - 9 + 3 - 2 + 7$

16) $8 - (2 + 7) + (3 - 4) + (5 - 2) - (2 - 8)$

17) $-6 + 8 - [2 - (5 - 7)] + 4$

18) $-\{-(3 + 5) + (6 + 1) - [3 - (5 + 2)]\}$

19) $\{6 - (2 - 4) + (1 - 6) - (5 - 8)\} - \{8 - (2 + 3)\}$

Reſultate.

1) $(a + c + f + i + k) - (d + e + g + h)$

2) $(a + b + e + g + i + l) - (c + d + f + h + k)$

3) $(a+c+e)-(b+d+f+g)$
4) $(a+c+d+f)-(b+e+g)$
5) $(a+d+e+h+i)-(b+c+f+g+k)$
6) $(m+h)-(a+b)$
7) $(a+d+e+h)-(b+c+f+g+i)$
8) $(c+e+f+i)-(a+b+d+h)$
9) $(b+g)-(a+d+e+f+h+i)$
10) $f-(g+h)$
11) $(b+d+e)-(a+c)$
12) $(e+h)-f$
13) $(c+d+h+i+l+m+v)-(a+b+e+f+g+n)$
14) $(a+b+e+h+l+n+s)-(c+d+f+g+m+v+p+q)$
15) $+2$; 16) $+7$; 17) $+2$; 18) -3; 19) $+3$.

C. Die Multiplication.

§. 24. Erklärung.

Die Zahl a mit b multipliciren oder vervielfältigen, heißt eine Zahl suchen, die so viel Einheiten hat, als eine Summe aus b Summanden, von denen jeder a ist. Die Andeutung der Multiplication ist a . b oder ab (a mal b). a heißt der Multiplicand, b der Multiplicator, beide zusammen Faktoren. (a . b) heißt ein Produkt.

Es ist also

$$ab = \overset{(1)}{a} + \overset{(2)}{a} + \overset{(3)}{a} \ldots + \overset{(b)}{a}$$

$$3 \cdot 5 = \overset{(1)}{3} + \overset{(2)}{3} + \overset{(3)}{3} + \overset{(4)}{3} + \overset{(5)}{3}.$$

§. 25. Grundsätze.

Aus der Erklärung der Multiplication ergeben sich die Grundsätze:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a \cdot m = b \cdot m$
2) " " " " " $m \cdot a = m \cdot b$.

§. 26. Lehrsätze.

Es ist gleichgültig, in welcher Ordnung die Faktoren mit einander multiplicirt werden.

Zerlegt man nämlich (ab) in seine Einheiten, so erhält man:

$$(ab) = \overset{(1)}{a} + \overset{(2)}{a} + \overset{(3)}{a} + \ldots\ldots + \overset{(b)}{a} =$$

$$= \begin{array}{ll} (1) & \overset{(1)}{1} + \overset{(2)}{1} + \overset{(3)}{1} + \ldots\ldots + \overset{(b)}{1} + \\ (2) & + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ (a) & + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 \end{array}$$

Addirt man zuerst die vertikalen Reihen, so erhält man ab; addirt man zuerst die horizontalen, so erhält man ba. Es ist daher:

1) $a \cdot b = b \cdot a.$

Da a und b sich vertauschen lassen, so führen sie einen gemeinschaftlichen Namen, nämlich Faktoren. (Ebenso früher die Summanden.)

Zerlegt man (a b) c ebenso in seine einzelnen Summanden a und addirt dieselben in verschiedener Ordnung, so erhält man:

2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b.$

Soll ein Produkt mit einer Zahl multiplicirt werden, so multiplicirt man also bloß den einen Faktor mit dieser Zahl. Ferner ist die Ordnung der Faktoren beliebig.

Anm. Da die Faktoren in beliebiger Ordnung multiplicirt werden können, so läßt man, wie beim Addiren, die Klammern weg und schreibt einfach abcdef...

§. 27. Lehrsätze.

Sollen Summen oder Differenzen mit einer Zahl multiplicirt werden, so multiplicirt man jedes einzelne Glied. Es ist also:

1) $\left.\begin{matrix}(a+b)\cdot c \\ c\cdot(a+b)\end{matrix}\right\} = ac + bc$

2) $\left.\begin{matrix}(a-b)\cdot c \\ c\cdot(a-b)\end{matrix}\right\} = ac - bc$

3) $\left.\begin{matrix}(a+b-c-d+e)\cdot f \\ f\cdot(a+b-c-d+e)\end{matrix}\right\} = af + bf - cf - df + ef.$

Beweis zu 1. Es ist $(a+b)\cdot c = (a+b)+(a+b)+(a+b)+ + \ldots + (a+b) = (a+a+a+\ldots+a)+(b+b+b+\ldots+b) = = ac + bc.$

Die Beweise zu 2 und 3 sind ebenso zu führen.

4) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Beweis. Es ist $(a + b) . (c + d) = a . (c + d) + b . (c + d) =$
$= ac + ad + bc + bd.$

5) $(a - b) . (c - d) = ac - bc - ad + bd$

Beweis. Es ist $(a - b) . (c - d) = (a - b) c - (a - b) d =$
$= ac - bc - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd.$

§. 28. Zusatz.

Die bis jetzt angeführten Formeln sind zunächst nur dann gültig, wenn der Multiplicator eine positive Zahl ist, oder eine Differenz, welche eine positive Zahl vorstellt. Da man indeß auf keinen Widerspruch gelangt, wenn man die Formeln auch auf ein solches Product anwendet, bei welchem der Multiplicator aus beliebigen Differenzen zusammengesetzt ist, so kann man die Formeln als allgemein gültig ansehen, d. h. auch gültig für solche Producte, bei welchen einige oder sämmtliche Buchstaben beliebige Differenzen bedeuten, sogenannte Differenzprodukte.

§. 29. Lehrsätze.

Da in einem Differenzprodukte die einzelnen Faktoren gleich Null oder gleich einer negativen Zahl sein können, so nehmen für diese Fälle die angeführten Formeln folgende Gestalt an:

1) $0 . a = 0; a . 0 = 0; 0 . 0 = 0;$

Der Beweis ergiebt sich aus 2 des §. 27. Jedes Produkt, in welchem der Faktor 0 vorkommt, ist also gleich Null.

2) $(- a) . (+ b) = - ab; (+ a) . (- b) = - ab.$

Der Beweis ergiebt sich aus 2 des §. 27.

3) $(+ a) . (+ b) = + ab.$

4) $(- a) . (- b) = + ab.$

Der Beweis ergiebt sich aus 5 des §. 27.

Es geben also zwei Zahlen von entgegengesetzter Bedeutung (d. h. positive und negative) beim Multipliciren eine negative, Zahlen von gleicher Bedeutung eine positive Zahl.

§. 30. Zusatz.

Es ist $(- a) . (- b) = + ab$

$(- a) . (- b) . (- c) = - abc$

$(- a) . (- b) . (- c) . (- d) = + abcd.$

§. 31. Zusatz.

Mit Hülfe der Formeln des §. 27, rückwärts gelesen, kann man zuweilen algebraische Summen, deren Glieder Producte sind, selbst in Produkte verwandeln.

Da nämlich

$$m.(a+b-c+d\ldots) = am+bm-cm+dm+\ldots$$ ist,

so ist auch $am+bm-cm+dm = m.(a+b-c+d)$.

Ebenso ist $6a+4a-2a = a.(6+4-2) = 8a$,

ferner: $3a-5a = a(3-5) = a.(-2) = -2a$

und $7abc+14abd-28fab = 7ab(c+2d-4f)$.

Den in allen Summanden vorkommenden Faktor nennt man den gemeinschaftlichen Faktor. Beim Vereinigen der Summanden, dem sogenannten Reduciren der Summe, sucht man also den gemeinschaftlichen Faktor und multiplicirt ihn mit der algebraischen Summe der übrigen.

§. 32. Zusatz.

Algebraische Summen, welche addirt werden sollen, lassen sich daher, wenn sie gemeinschaftliche Faktoren haben, sehr vereinfachen. Die Berechnung führt man leicht nach folgendem Schema aus.

Es soll berechnet werden:

$$(-3a+4b-7c+6d)+(5b-7c+3d)+(8a-4c+9b+8d).$$

Berechnung:

$$\begin{array}{rrrrr} -3a & +4b & -7c & +6d \\ & +5b & -7c & +3d \\ +8a & +9b & -4c & +8d \\ \hline \text{Summe: } +5a & +18b & -18c & +17d. \end{array}$$

§. 33. Zusatz.

Beim Subtrahiren algebraischer Summen addirt man den Subtrahenden mit veränderten Zeichen (siehe §. 23).

Es ist also: $(3a-5b+7c)-(6a+3b-4c-2d+6f) =$

$= (3a-5b+7c)+(-6a-3b+4c+2d-6f)$.

Bei der Berechnung schreibt man die Ausdrücke untereinander, ändert die Zeichen des Subtrahenden und addirt.

$$\begin{array}{rrrrrr} & +3a & -5b & +7c & & \\ \pm & 6a & \pm\ 3b & \mp\ 4c & \mp\ 2d & \pm\ 6f \\ \hline \text{Differenz: } & -3a & -8b & +11c & +2d & -6f. \end{array}$$

§. 34. Zusatz.

Die Multiplication algebraischer Summen wird nach den Formeln der §§. 27 und 29 ausgeführt. Es ist alsdann z. B.:

$$(a + b - c)\,(d - f - g) = (a + b - c)\,.\,[d + (-f) + (-g)] =$$
$$= (a + b - c)\,.\,d + (a + b - c)\,.\,(-f) + (a + b - c)\,.\,(-g) =$$
$$= ad + bd - cd - af - bf + cf - ag - bg + cg.$$

Man multiplicirt also jeden Summanden des einen Faktors mit sämmtlichen Summanden des zweiten und addirt die erhaltenen positiven und negativen Ausdrücke. Enthalten die algebraischen Summen selbst Produkte, so behandelt man diese wie einfache Zahlen, z. B.:

$$(5ab + 6ad)\,.\,(2ac - 4af) = 5ab\,.\,2ac + 6ad\,.\,2ac - 5ab\,.\,4af -$$
$$- 6ad\,.\,4af = 10aabc + 12aadc - 20aabf - 24aadf.$$

Enthält das Resultat der Multiplication Summanden mit gemeinschaftlichen Faktoren, so vereinigt man diese Summanden. Ein bequemes Schema für die Multiplication ist folgendes:

Es soll $(2a + 3b - 4c)\,.\,(4a - 6b - 2c)$ berechnet werden.

$$\begin{array}{rrrr}
2a & + 3b & - 4c & \\
4a & - 6b & - 2c & \\
\hline
8aa & + 12ab & - 16ac & \\
 & - 12ab & - 18bb & + 24bc \\
 & & - 4ac & - 6bc + 8cc \\
\hline
8aa & & - 20ac - 18bb & + 18bc + 8cc.
\end{array}$$

§. 35. Zusatz.

Kommen in algebraischen Summen, die man in einen additiven und subtractiven Theil zerlegen soll, Produkte obiger Art vor, so führt man zuerst die Multiplication aus, schließt das Resultat in Klammern ein und verfährt wie früher. So ist z. B.

$$a - b\,(c + d) + e\,(f - g) - d\,(h - m) =$$
$$= a - (bc + bd) + (ef - eg) - (dh - dm) =$$
$$= a - bc - bd + ef - eg - dh + dm =$$
$$= (a + ef + dm) - (bc + bd + eg + dh).$$

§. 36. Zusatz.

Sollen algebraische Summen, wie die in §. 34 bei der Multiplication erhaltenen, rückwärts in Produkte verwandelt oder reducirt werden, so ist dies oft sehr schwierig und verlangt viele Geschicklichkeit. In den meisten Fällen muß man einzelne Summanden nach Bedürfniß zerlegen, z. B. 18ab in 12ab + 6ab, zuweilen auch Ausdrücke von der Form (m — m) hinzuaddiren. Nur selten kann man sogleich einen gemeinschaftlichen Faktor für die ganze Summe finden und muß daher zunächst nur einige Glieder zu vereinigen suchen.

Beispiele.

I. $aa + 2ab + bb = aa + ab + ab + bb = a.(a+b) + b.(a+b) =$
$= (a + b).(a + b).$

II. $aa + 8ab + 15bb = aa + 5ab + 3ab + 15ab = a(a+5b) +$
$+ 3b(a + 5b) = (a + 5b).(a + 3b).$

Anm. Den bei ab stehenden Zahlenfaktor zerlegt man in zwei solche Theile, daß das Produkt derselben gleich dem zu bb gehörigen Zahlenfaktor wird.

III. $acab — adec + edea — aeab = ac(ab — de) + ae(de — ab) =$
$= ac(ab — de) — ae(ab — de) = (ab — de)(ac — ae).$

IV. $ab + ac + b + c = a(b + c) + (b + c) = (b + c)(a + 1).$

V. $aa — bb = aa + ab — ab — bb = a.(a + b) — b(a+b) =$
$(a + b).(a — b).$

Aufgaben.

Folgende algebraische Summen sollen durch Vereinigung gleichnamiger Glieder reducirt werden:

1) $(5a — 2b + 3c — 4e + 9d) + (7a — 8c + 9b + 5e — 6d)$
2) $(8b + 4c — 9d — 8e) + (2c — 5b — 4f + 5e) + (3c — 5a + 5d — 7f) +$
$+ (4h — 3f + 9b).$
3) $(4b — 8c + 9d + 5f) + (7a + 3b — 6c — 3d) + (4c — 8d — 9f) +$
$+ (3c — 8b — 7d)$
4) $(8b + 4a — 2c — 3d) + (8c + 5d — 6a + 2d) + (4a — 2b — 3d) +$
$+ (2a — 6b — 2d — 6c)$
5) $(8a + 2b — 7c + 4d) + (-5a + 7b — 3c — 4e) + (4c — 8d + 5g — 2c) +$
$+ (9d — 5e + 8a)$

6) $(3a-2b+7c-4d)-(2a-7b+3c-5d)$

7) $(5a-7b+9d-4c)-(8a+3b-4d+5c)$

8) $(3a+2b-7c)-(-4a+9b-8c-5d)$

9) $(2a+4b-8c)-(4d+5e-8f)+(2f-3c+5c)+(-3a+8b-7e)-$
$-(2f+7h-2c)$

10) $(4c-8a+5d)-(2b+3a-4d)+(2a-5c+8d)-(2d-4b+6c)$

11) $(-3b-6c+5a-7d)-(-3c+5d-8a)+(9c-3d-4b+8a)-$
$-(2c-3d-8b)$

12) $(-3x+5y-8z)-(4x+3z-7f+4h)+(5d-4h+7m)-$
$(8x+4y-7z)$

13) $6x-(5y+7x-8z-9d)+(8y+5x+4z-2d)-(3d-5x-6y+5z)$

14) $(7xy-5zz)-(6yz-8zz+2xy-9xz)-(8yz-7xy)+(12zz+$
$8xy-3xz-5yz)$

15) $(9mnp-7mvn+3mnz)-(4mnv+8znm)-(3mnp+7vmn-2mnz)$

16) $(-9pqs+4mnx-3xyz)-(-4mxn+7psq)+(-2xmn-8xyz+$
$+5pqs)$

17) $3m-[6n-(8p-5m+3g)]-[3p-(5n-2g)]$

18) $\{[l-(6m+5n)+6p]-[2p-(7l+8m-2n+4p)]+2l\}$

19) $5v-\{7w-[[6x-(8y-4z)+5v]-[3w+6v-(4x+5y)-$
$-(8v-6y)]]\}$

Folgende algebraiſche Summen ſollen miteinander multiplicirt werden:

20) $(4a+6b-5c+3d)$ mit $(-3a-2b+12c-30d)$

21) $(4m+5n+6p-2v-3w)$ = $(-4m+3n+6p-2v+5w)$

22) $(5f-3g+2h+3l)$ = $(5f+3g-2h+3l)$

23) $(6x-3y+5z)$ = $(6x+3y-5z)$

24) $(15l+2m+7n+9p)$ = $(-3l-2m+7n+9p)$

25) $(6ab+4ac-3bc-6bd+3cd)$ = $(-6ab+3acd-12bc-3bcd)$

26) $(5abc-3bccd+6bdd-3ccd)$ = $(5abc+3bccd+6bdd+3ccd)$

27) $(vvv+3vvw+3vww+www)$ = $(vv+2vw+ww)$

In folgenden algebraiſchen Summen ſollen die Multiplicationen ausgeführt und die gleichnamigen Glieder vereinigt werden:

28) $(2+a)(3-a)+4aa-(3-a)(4-a)(1+2a)+2aaa$

29) $3x(5xx-2xy+yy)-(2xx+5xy).(4x-2y)-3xyy$

30) $8vv+3v(2-v)(5+v)-4v-6v(5-2v+3vv)$

31) $-(6-8b)(3c+5)+(8a-2c+9)(12b+5)-\{(24a+5)(4b-2)-$
$-(3a+7)\,6\}$

32) $6a-\{[3b-2c]\,5-(2a-7)(3b-8)+(4c-5)\,6\}-(3a+5)(2b-7)$

33) $(3v+2w)(4z+8)-\{(7w+3)\,8-(4v+5)(2-3z)+$
$+(4z-7)(2w+3)\}$

34) $-\{(8a-2)\,5b-10c+3a(2c+3b+7)\}+\{2b-5a(3-8b)-$
$-3c(3a+7)\}$

35) $(4a+2b)(3a-2b)(4c+5)-\{4bc(4b-2a)+2\,[6aa(4c+5)-$
$-5b(a+2b)]\}$

Folgende algebraiſche Summen ſollen durch Aufſuchen des gemeinſchaftlichen Faktors in Produkte verwandelt werden:

36) $14ab+6ac+10ad$

37) $-35bc+30bb+20ab$

38) $12aacd-18accb+9aacc$

39) $8ccdd-32cdde-4cd$

40) $2xxyz-6xxyv-2xy$

41) $6mn(mp+2pw)-6mp$

42) $3bcd(3d-2a)-12cd$

43) $4da(3eb+4ec)-4fe(5dd-4de)$

44) $12ac+8cb+15ad+10bd$

45) $42ac+35cd+30a+25d$

46) $12abc+15ccd+4ab+5cd$

47) $10xx-12xy+35x-42y$

48) $15mn-18pn+25mm-30mp$

49) $21aabb-35abc-18abd+30cd$

50) $8bcef-20bdef-15cdbd+6bcdc$

51) $15vvw-18vyz+42yyz-35vwy$

52) $10abab-15abcd+21cdef-14abef$

53) $aa+7ab+12bb$

54) $aa+5ac+6cc$

55) $xx+6x+8$

56) $vv-2vw-15ww$

57) $xx+6xy-16yy$

58) $-7ac-18cc+aa.$

Resultate.

1) $12a+7b-5c+e+3d$; 2) $-5a+12b+9c-4d-3e-14f+4h$;
3) $7a-b-7c-9d-4f$; 4) $4a-d$; 5) $11a+9b-8c+5d-9e+5g$;
6) $a+5b+4c+d$; 7) $-3a-10b+13d-9e$; 8) $7a-7b+c+5d$;
9) $-a+12b-3c-4d-13e+8f-7h$; 10) $-7c-9a+15d+2b$;
11) $b+4c+21a-12d$; 12) $-15x+y-4z+7f-8h+5d+7m$;
13) $9x+9y+7z+4d$; 14) $20xy-19yz+15zz+6xz$;
15) $6mnp-18mvn-3mnz$; 16) $-11pqs+6mnx-11xyz$;
17) $-2m-n+5p+g$; 18) $10l+2m-7n+8p$;
19) $12v-10w+10x-9y+4z$;
20) $-12aa-26ab+63ac-129ad-12bb+82bc-186bd-60cc+$
$+186cd-90dd$;
21) $-16mm-8mn+32mw+15nn+48np-16nv+16nw+36pp-$
$24pv+12pw+4vv-4vw-15ww$;
22) $25ff+30fl-9gg+12gh-4hh+9ll$;
23) $36xx-9yy+30yz-25zz$;
24) $-45ll-36lm+84ln+108lp-4mm+49nn+81pp+126np$;
25) $-36aabb-24aabc-54abbc+36abbd-18abcd+18aabcd+12aaccd-$
$-21abccd-18abcdd+9accdd-48abcc-18abbcd+36bbcc+$
$+72bbcd-36bccd+9bbccd+18bbcdd-9bccdd$;
26) $25aabbcc+60abbcdd-9bbccccdd-18bccccdd+36bbdddd-$
$-9ccccdd$;
27) $vvvvv+5vvvvw+10vvvww+10vvwww+5vwwww+wwwww$;
28) $-6-16a+16aa$;
29) $7xxx-22xxy+10xyy$; 30) $-4v+11vv-21vvv$;
31) $-28c+67+128b+106a$; 32) $11a-46b-14c+121$;
33) $32v-26w-27z+7$; 34) $12b-11c-15ac-9ab-36a$;
35) $-32cbb$; 36) $2a(7b+3c+5d)$; 37) $5b(-7c+6b+4a)$;
38) $3ac(4ad-6bc+3ac)$; 39) $4cd(2cd-8de-1)$; 40) $2xy(xz-3xv-1)$;
41) $6mp(mn+2nw-1)$; 42) $3cd(-2ba+3bd-4)$;
43) $4de(3ab+4ac-5df+4fe)$; 44) $(3a+2b)(4c+5d)$;
45) $(6a+5d)(7c+5)$; 46) $(4ab+5cd)(3c+1)$; 47) $(5x-6y)(2x+7)$;
48) $(5m-6p)(3n+5m)$; 49) $(3ab-5c)(7ab-6d)$;
50) $(2bc-5bd)(3cd+4ef)$; 51) $(5vw-6yz)(3v-7y)$;
52) $(5ab-7ef)(2ab-3cd)$; 53) $(a+3b)(a+4b)$;

54) $(a+2c)(a+3c)$; 55) $(x+4)(x+2)$;
56) $(v-5w)(v+3w)$; 57) $(x+8y)(x-2y)$; 58) $(a+2c)(a-9c)$.

D. Die Division.

§. 37. Erklärung.

Die Zahl a durch die Zahl b dividiren oder theilen heißt eine Zahl suchen, welche b mal in a enthalten ist oder welche a giebt, wenn man sie mit b multiplicirt. Die Andeutung der Division ist $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ (a dividirt durch b). a heißt der Dividend, b der Divisor, $\left(\frac{a}{b}\right)$ ein Quotient.

Es ist also $\left(\frac{a}{b}\right) . b = a$ und $(a . b) : b = a$.

§. 38. Grundsätze.

Aus der Erklärung der Division ergeben sich die Grundsätze:

1) Ist $a = b$, so folgt $a : m = b : m$
2) Ist $a = b$, " " $m : a = m : b$
3) Ist $am = bm$, " " $a = b$
4) Ist $a : m = b : m$, " " $a = b$
5) Ist $m : a = m : b$, " " $a = b$.

§. 39. Lehrsätze.

Wenn der Dividend ein zusammengesetzter Ausdruck ist, so ergeben sich folgende Formeln:

1) $(a . b) : c = (a : c) . b = a . (b : c)$.

Beweis. Beim Multipliciren mit c erhält man ab aus allen drei Ausdrücken und diese sind also nach Grundsatz 3 des §. 38 gleich groß.

Man dividirt also ein Product, indem man bloß den einen Faktor dividirt.

2) $(a : b) : c = (a : c) : b = a : (b . c)$.

Beweis. Beim Multipliciren mit bc erhält man a aus allen drei Ausdrücken.

Man dividirt also einen Quotienten, indem man den Dividenden dividirt oder den Divisor multiplicirt.

3) $(a \mp b) : c = (a : c) \mp (b : c)$.

Beweis. Beim Multipliciren mit c erhält man auf beiden Seiten $a \mp b$. Man dividirt also eine algebraische Summe, indem man jedes einzelne Glied dividirt.

§. 40. Lehrsätze.

Ist der Divisor eine zusammengesetzte Zahl, so erhält man:

1) $a : (b . c) = (a : b) : c = (a : c) : b$ (folgt aus 1 des §. 39).

2) $a : (b : c) = (a . c) : b = a . (c : b)$.

Beweis. Es ist $\left(a : \frac{b}{c}\right) . \frac{b}{c} = a$;

ferner $\frac{a . c}{b} . \frac{b}{c} = \left(\frac{ac}{b} . b\right) : c$ (nach 1 des §. 93) $=$

$= ac : c = a$.

Daher ist $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$;

$\frac{ac}{b} = a . \frac{c}{b}$ folgt aus 1 des §. 39.

3) $a : (b \mp c)$ läßt sich nicht bequem umformen.

§. 41. Lehrsätze.

Sind Dividend und Divisor zusammengesetzte Ausdrücke, so erhält man:

1) $abcdef : defgh = abc : gh$ (nach 1 des §. 39).

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a . d}{b . c}$.

Beweis. Es ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} . d\right) : c = \left(\frac{ad}{b}\right) : c = \frac{ad}{bc}$.

3) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$, folgt aus 2.

Für die übrigen Fälle reichen die in §. 39 und 40 gegebenen Formeln aus.

§. 42. Lehrsätze.

Verbindet man Quotienten durch eine der frühern Operationen, so ergiebt sich:

1) $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Beweis. Beim Multipliciren mit bd geben beide Seiten ac.

2) $a \mp \frac{b}{c} = \frac{ac \mp b}{c}$.

Beweis. Es ist $a \mp \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} \mp \frac{b}{c} = \frac{ac \mp b}{c}$ (n. 3 d. §. 39).

3) $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad \mp bc}{bd}$.

Beweis. Es ist $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \mp \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = (ad \mp bc) : db$.

§. 43. Zusatz.

Wenn man statt der Buchstaben Zahlen nimmt, so können nur wenige Quotienten Zahlen der Zahlenreihe vorstellen. Da aber auch im entgegengesetzten Falle $\frac{a}{b}$ einen bestimmten Werth hat, indem $\frac{a}{b} \cdot b = a$ ist, und da keiner der gegebenen Sätze sich darauf stützt, daß $\frac{a}{b}$ einer Zahl der Zahlenreihe gleich sein muß, so kann man die gegebenen Formeln benutzen, ohne erst zu untersuchen, ob $\frac{a}{b}$ einer Zahl der Zahlenreihe gleich sei, oder nicht, wenn nur a und b positive Zahlen sind. Quotienten, wie z. B. $\frac{5}{7}$, welche keiner ganzen Zahl gleich sind, nennt man auch Brüche oder gebrochene Zahlen und nennt den Dividenden alsdann Zähler, den Divisor Nenner.

§. 44. Erklärung.

Für Quotienten, welche negative Zahlen oder 0 als Divisor oder Dividenden enthalten, ergiebt sich aus der Erklärung des Quotienten folgende Bedeutung:

1) $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Beim Multipliciren mit — b erhält man a.

2) $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$.

3) $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$.

Die Beweise ähnlich wie bei 1.

Das Gesetz der Zeichenänderung ist also dasselbe, wie beim Multipliciren.

4) $\frac{0}{a} = 0$.

Ergiebt sich aus der Erklärung des Quotienten.

5) $\frac{0}{0}$ = jedem Ausdrucke, da jeder Ausdruck den Zähler 0 giebt, wenn man ihn mit dem Nenner 0 multiplicirt.

6) $\frac{a}{0}$ keinem Ausdrucke gleich, da kein Ausdruck a giebt, wenn man ihn mit 0 multiplicirt.

§. 45. Zusatz.

Aus vorigem Paragraphen folgt, daß die bis jetzt gegebenen Formeln unrichtig werden können, sobald der Nenner eines Quotienten = 0 ist und daß überhaupt in einem solchen Falle die Rechnung nicht fortgesetzt werden kann. Für alle übrigen Differenzquotienten sind indeß die gegebenen Sätze gültig. Die Grundsätze 3 und 5 des §. 38 werden unrichtig, wenn m = 0 ist.

§. 46. Zusatz.

Wenn Buchstaben in ganz allgemeiner Bedeutung gebraucht werden sollen, so können dieselben von jetzt an Null, eine positive ganze oder gebrochene und eine negative ganze oder gebrochene Zahl bedeuten.

§. 47. Zusatz.

Vergleicht man die Formeln für Producte und Quotienten mit den Formeln für Summen und Differenzen, so findet man, daß die ersteren Formeln, wenn sie bloß das Multiplications- und Divisionszeichen enthalten, augenblicklich in die entsprechenden Formeln letzterer Art dadurch verwandelt werden können, daß man das Multiplicationszeichen in das Additionszeichen, das Divisionszeichen in das Subtractionszeichen umwandelt. Es ist nämlich:

$(a.b).c = a.(b.c) = (a.c).b$	$(a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b$
$(a.b):c = (a:c).b = a.(b:c)$	$(a+b)-c = (a-c)+b = a+(b-c)$
$a:(b.c) = (a:b):c = (a:c):b$	$a-(b+c) = (a-b)-c = (a-c)-b$
$a:(b:c) = (a:b).c = (a.c):b$	$a-(b-c) = (a-b)+c = (a+c)-b$
$a.m):(b.m) = a:b$	$(a+m)-(b+m) = a-b$

u. s. w.

§. 48. Zusatz.

Sollen algebraische Summen, deren einzelne Glieder Quotienten sind, in einen additiven und subtractiven Theil zerlegt werden, so behandelt man die Quotienten wie einfache Zahlen. Ist aber der Dividend eines solchen Quotienten selbst eine algebraische Summe, so löst man den Quotienten zunächst auf, nämlich z. B. $\frac{a+b-c}{d}$ in $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}$, schließt diese Summe in Klammern ein und verfährt wie früher.

$$a-\frac{b+c-d}{e}+\frac{g-(h+i)}{k}=$$

$$=a-\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{e}-\frac{d}{e}\right)+\frac{g-h-i}{k}=a-\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{e}-\frac{d}{e}\right)+$$

$$+\left(\frac{g}{k}-\frac{h}{k}-\frac{i}{k}\right)=a-\frac{b}{e}-\frac{c}{e}+\frac{d}{e}+\frac{g}{k}-\frac{h}{k}-\frac{i}{k}=$$

$$=\left(a+\frac{d}{e}+\frac{g}{k}\right)-\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{e}+\frac{h}{k}+\frac{i}{k}\right).$$

Siehe Aufgaben 1 — 17.

§. 49. Zusatz.

Soll eine algebraische Summe, deren einzelne Glieder Quotienten sind, in einen einzigen zusammengesetzten Quotienten verwandelt werden, so müssen die einzelnen Quotienten erst so umgeändert werden, daß sie denselben Nenner erhalten. Diesen nennt man den Generalnenner. Den Generalnenner findet man, wenn man sämmtliche Nenner mit einander multiplicirt. Hat man sämmtliche Quotienten auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, so addirt man alsdann die Brüche nach dem Satze: $\frac{a}{m}\mp\frac{b}{m}=\frac{a\mp b}{m}$. Ist jedoch einer der Zähler aus mehreren Summanden zusammengesetzt, so darf man nicht vergessen, ihn in Klammern einzuschließen, sobald die Zähler addirt werden. (Vergleiche Beispiel 3).

Beispiele.

I. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$

Der Generalnenner ist bdf und folglich

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a\,.\,df}{b\,.\,df}+\frac{c\,.\,bf}{d\,.\,bf}+\frac{e\,.\,bd}{f\,.\,bd}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}.$$

II. $\frac{a}{5}+\frac{b}{3}-\frac{c}{2}=\frac{6a}{30}+\frac{10b}{30}-\frac{15c}{30}=\frac{6a+10b-15c}{30}$.

III. $\frac{a}{2}-\frac{b+c}{3}-\frac{d-e}{4}=\frac{6a}{12}-\frac{4b+4c}{12}-\frac{3d-3e}{12}=$

$=\frac{6a-(4b+4c)-(3d-3e)}{12}=\frac{6a-4b-4c-3d+3e}{12}$.

IV. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{a-c}$.

Generalnenner $(a-b)\,.\,(b-c)\,.\,(a-c)$.

Folglich ist $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{a-c}=$

$=\frac{a.(b-c)(a-c)+b.(a-b)(a-c)+c.(a-b)(b-c)}{(a-b)\,.\,(b-c)\,.\,(a-c)}=$

$=\frac{2aab-abc-aac-abb+bcc}{aab-aac+acc-abb+bbc-ccb}$.

Enthalten die Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so ist die Rechnung einfacher. Es ist z. B.

$$\frac{3a}{6a+12}+\frac{2a}{7a+14}=\frac{3a}{6\,.\,(a+2)}+\frac{2a}{7\,.\,(a+2)}=$$

$$=\frac{a}{a+2}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{7}\right)=\frac{a}{a+2}\,.\,\frac{11}{14}=\frac{11a}{14a+28}.$$

Siehe Aufgaben 47—70.

§. 50. Zusatz.

Sollen algebraische Summen, welche Quotienten enthalten, mit einander multiplicirt werden, so wendet man die Formel $\frac{a}{b}\,.\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ an und verfährt wie früher.

Beispiel.

$$\frac{2a}{b} + \frac{3a}{4c} - \frac{2c}{3}$$

$$\frac{2a}{b} - \frac{3a}{4c} + \frac{3c}{5}$$

$$\frac{4aa}{bb} + \frac{3aa}{2bc} - \frac{4ac}{3b}$$

$$- \frac{3aa}{2bc} \qquad - \frac{9aa}{16cc} + \frac{a}{2}$$

$$+ \frac{6ac}{5b} \qquad + \frac{9ac}{20c} - \frac{2cc}{5}$$

$$\frac{4aa}{bb} \qquad - \frac{2ac}{15b} - \frac{9aa}{16cc} + \frac{a}{2} + \frac{9ac}{20c} - \frac{2cc}{5}.$$

Anm. $-\frac{2ac}{15b}$ ist entstanden durch Vereinigung von $-\frac{4ac}{3b} + \frac{6ac}{5b}$; der Summand $\frac{a}{2}$ ist entstanden aus $-\frac{3a}{4c} \cdot -\frac{2c}{3} = +\frac{3.2.a.c}{4.3.c} = \frac{a}{2}$.

§. 51. Zusatz.

Sollen zwei algebraische Summen durch einander dividirt werden, so hat man zwei Wege.

1) Man verwandele beide Summen in Produkte und streiche die Faktoren, welche dem Zähler und Nenner gemeinschaftlich sind.

Beispiel.

$$\frac{18ac + 30bc - 21ad - 35bd}{15a + 25b} = \frac{(6c - 7d)(3a + 5b)}{5(3a + 5b)} =$$

$$= \frac{6c - 7d}{5} = \frac{6c}{5} - \frac{7d}{5}.$$

Dieses Verfahren ist jedoch meistens zu schwierig.

Anm. Hierbei darf übrigens nicht übersehen werden, daß man bloß Faktoren wegstreichen darf, welche für den ganzen Zähler und Nenner

Faktoren sind (nach dem Satze $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$); man darf also z. B. nicht etwa $\frac{a\,(3b + 4c) + d}{b\,(3b + 4c) + e} = \frac{a + d}{b + e}$ setzen.

Siehe Aufgaben 71—81.

Das zweite Verfahren besteht darin, daß man zunächst sämmtliche Klammern auflöst und dann direkt nachsieht, wie oft der Nenner im Zähler enthalten ist.

Soll z. B. aa + 2b + bb durch a + b dividirt werden, so versucht man zuerst, wie oft der erste Summand des Divisors im ersten Summanden des Dividenden enthalten ist. Nun ist a in aa amal enthalten. Soll aber a + b in einer Zahl amal enthalten sein, so muß diese Zahl = a . (a + b) = aa + ab sein. Diese Summe trennt man nun durch Subtraction vom Divisor. Es ist alsdann:

$$\frac{aa + 2ab + bb}{a + b} = \frac{aa + ab}{a + b} + \frac{ab + bb}{a + b} = a + \frac{ab + bb}{a + b}.$$

Mit dem Reste $\frac{ab + bb}{a + b}$ verfährt man ebenso. a ist in ab bmal enthalten; die Zahl, in welcher (a + b) bmal enthalten sein soll, muß = b . (a + b) = ba + bb sein und ist also gleich dem Dividenden. Das Resultat der Division ist daher a + b. Wäre die Division nicht aufgegangen, so hätte man auf dieselbe Art fortfahren müssen. Ein bequemes Schema ist folgendes:

Es soll berechnet werden: $\frac{9aa + 12ab - 24ac + 4bb - 16bc + 16cc}{3a + 2b - 4c}$

3a + 2b — 4c	9aa + 12ab — 24ac + 4bb — 16bc + 16cc	3a + 2b — 4c
	9aa + 6ab — 12ac	
	6ab — 12ac + 4bb — 16bc + 16cc	
	6ab + 4bb — 8bc	
	— 12ac — 8bc + 16cc	
	— 12ac — 8bc + 16cc	
	0	

Anm. Die Subtraction wird nach §. 33 ausgeführt, indem man die Vorzeichen ändert und alsdann addirt.

Läßt sich ein Glied nicht von einem gleichartigen subtrahiren, so schreibt man es mit veränderten Zeichen wieder hin:

$$\begin{array}{l|l|l} a - b & aa - bb & a + b \\ \hline & aa - ba & \\ \hline & + ba - bb & \\ & + ba - bb & \\ \hline \end{array}$$

§. 52. Zusatz.

Es versteht sich von selbst, daß in den meisten Fällen die Division nicht aufgehen wird. Alsdann muß man sich hüten, etwa den Rest wegzulassen.

Beispiel.

Es soll a durch (1 — a) dividirt werden:

$$\begin{array}{l|l|l} 1 - a & a & a + aa + aaa \\ \hline & a - aa & \\ \hline & + aa & \\ & + aa - aaa & \\ \hline & + aaa & \\ & + aaa - aaaa & \\ \hline & + aaaa. & \end{array}$$

Das Resultat ist also $a + aa + aaa + \frac{aaaa}{1 - a}$.

Zuweilen wird eine vollständige Division noch dadurch möglich, daß man die Ordnung der Glieder etwas ändert. Dividirt man z. B. mit $a + b$ in $2ab + aa + bb$ in unveränderter Ordnung, so geht die Division nicht auf, wohl aber, wenn man in $aa + 2ab + bb$ dividirt. Man muß deßhalb, ehe man die Division anfängt, Divisor und Dividend gleichmäßig alphabetisch ordnen.

§. 53. Zusatz.

Enthalten die algebraischen Summen, welche durch einander dividirt werden sollen, selbst Quotienten, so verfährt man wie bei ganzen Zahlen, berücksichtigt aber die Formeln $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{f} = \frac{ac}{bf}$.

Aufgaben.

I. Addition und Subtraction von Quotienten.

1) $\left(\frac{c}{2}-\frac{2d}{7}+\frac{3e}{8}+\frac{f}{9}\right)+\left(-\frac{2c}{3}-\frac{e}{2}+\frac{f}{3}+\frac{5d}{21}\right)+$
$+\left(-\frac{7f}{27}+\frac{8d}{21}+\frac{e}{16}-\frac{c}{3}\right)+\left(\frac{e}{8}+\frac{8c}{21}-\frac{8d}{7}-\frac{f}{9}\right)$

2) $\left(\frac{3ab}{5}-\frac{2ac}{7}+\frac{3d}{4}\right)+\left(\frac{2a}{3}-\frac{3d}{2}+\frac{2ae}{5}\right)+\left(\frac{2ab}{3}+\frac{3d}{5}-\frac{4ae}{7}\right)+$
$+\left(-\frac{ac}{2}-\frac{4d}{5}+\frac{2a}{5}\right)$

3) $\left(\frac{4ab}{7}+\frac{3ac}{5}-\frac{2ae}{3}+\frac{5ce}{6}\right)-\left(\frac{3ab}{2}-\frac{2ac}{3}+\frac{3ae}{4}-\frac{2ce}{7}\right)$

4) $\left(\frac{3abc}{5}-\frac{4ac}{3}+\frac{5a}{6}-\frac{2b}{7}\right)-\left(\frac{2ab}{5}+\frac{3ac}{4}-\frac{2a}{3}+\frac{3b}{5}-\frac{c}{4}\right)$

5) $\left(\frac{6ab}{11}-\frac{3ac}{5}+\frac{7ad}{8}-\frac{3a}{4}\right)-\left(\frac{2ab}{7}-\frac{4ac}{9}+\frac{3ad}{5}-\frac{a}{2}\right)$

6) $\left(\frac{2x}{3}+\frac{6xy}{7}+\frac{3xz}{8}\right)-\left(\frac{4x}{7}-\frac{2xy}{3}+\frac{3xz}{4}\right)$

7) $\left(\frac{m}{4}-\frac{2mv}{9}+\frac{4mnw}{5}\right)-\left(\frac{m}{3}+\frac{mv}{3}-\frac{mnw}{2}+\frac{p}{4}\right)$

8) $\left(\frac{2l}{3}+\frac{3m}{7}-\frac{3n}{5}-\frac{2p}{11}\right)-\left(-\frac{5p}{33}-\frac{8n}{15}+\frac{5m}{14}+\frac{3l}{4}\right)+$
$+\left(-\frac{2l}{5}-\frac{n}{2}-\frac{p}{7}-\frac{m}{14}\right)-\left(-\frac{8s}{9}-\frac{p}{33}-\frac{4n}{3}-\frac{2m}{9}\right)$

9) $\left(\frac{3ab}{4}-\frac{5ac}{3}+\frac{6af}{7}\right)-\left(\frac{ab}{2}+\frac{3ac}{14}+\frac{5af}{6}\right)+$
$+\left(\frac{5ab}{3}-\frac{2ac}{3}+\frac{6ad}{11}\right)-\left(-\frac{2ac}{5}+\frac{9af}{7}+\frac{2ad}{3}\right)$

10) $\left(\frac{5ab}{3}+\frac{2ac}{5}+\frac{7a}{4}+\frac{b}{5}\right)-\left(\frac{ab}{2}-\frac{3b}{4}-\frac{2a}{5}+\frac{7c}{3}\right)+$
$+\left(\frac{3ac}{2}-\frac{4a}{5}+\frac{2c}{5}-\frac{3b}{7}\right)-\left(-\frac{2b}{3}+\frac{3a}{5}+\frac{2c}{3}-\frac{ab}{4}\right)$

11) $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}$

12) $\frac{6a+4b-3c}{2}+\frac{9a-5b+6c}{3}+\frac{-2b+9c}{6}$

13) $\frac{x+y}{2} - \frac{3x-z}{5} + \frac{y}{3} - \frac{7y+4z}{10}$

14) $5m - \left\{\left(7n + \frac{3v-4w}{2}\right) + \left(8n - \frac{6v+3w}{2} - \frac{4m+7v}{4}\right)\right\}$

15) $5x - \frac{3y+2z}{2} - \left\{\frac{15y+3x-8z}{5} - \frac{2x-y-z}{3}\right\}$

16) $-\left\{1 - \left[\frac{2m+3n}{5} + \frac{4n-3m}{2}\right] + 2m - \frac{3l+7n}{4}\right\}$

17) $6bce + \frac{3ae-2ed}{5} - \left\{\frac{(10bc+a-d)\,3e}{5}\right\}$

II. Multiplication von Quotienten.

18) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}c + \frac{1}{3}b\right)$

19) $\left(\frac{3}{2}c - 5d - \frac{1}{3}ee\right)\left(\frac{1}{4}c - 2d + 6ee\right)$

20) $\left(\frac{6a}{b} - \frac{5b}{c} + \frac{3bc}{d} - \frac{13b}{d}\right)\left(\frac{6a}{b} + \frac{5b}{c} - \frac{3bc}{d} + \frac{13b}{d}\right)$

21) $\left(\frac{2ab}{3cd} - \frac{4ac}{5bd} + \frac{2bc}{3ad}\right)\left(\frac{5bc}{2ad} + \frac{4ac}{3bd} + \frac{ab}{cd}\right)$

22) $\left(\frac{3a}{5d} - \frac{2b}{3e} + \frac{4c}{5d}\right)\left(\frac{2b}{5e} - \frac{2a}{7d}\right)$

23) $\left(2 + \frac{3a}{5} - \frac{2c}{6}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{3} - \frac{e}{5}\right)$

24) $\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{c}{d}\right)$

25) $\left(\frac{3xx}{y} - \frac{3b}{c} - \frac{2}{3x} - 1\right)\left(\frac{2aa}{bb} - \frac{2ab}{cc} + x\right)$

III. Division.

26) $(9ab - 4adf + 5ac) : 3ag$

27) $(24abc - 12abd + 8bc) : -4abg$

28) $(ac + bc - cc - ad - bd + cd) : (c - d)$

29) $(6am + 15bm - 9cm + 8an + 20bn - 12cn) : (3m + 4n)$

30) $(15aa + 19ab + 42ac + 6bb + 26bc + 24cc) : (3a + 2b + 6c)$

31) $(56xx + 44xy + 93xz + 8yy + 104xv + 42yz + 40yv + 27zz + + 90zv + 48vv) : (7x + 2y + 9z + 6v)$

32) $(8mm + 6mn - 24mp - 9nn + 16pp) : (4m - 3n - 4p)$

33) $(900gg - 60gk - 144hh + 48hk - 3kk) : (30g - 12h + k)$

34) $(6aa - 13ab + ac + 6bb + 4ad - 9bc + 4bd - 15cc + 32cd - 16dd) : (2a - 3b - 3c + 4d)$

35) $\left(\frac{a}{b} + \frac{fd}{2c} - 3ac + 7\right) : \frac{3c}{d}$

36) $\left(\frac{3a}{2bc} - \frac{4bc}{5d} - \frac{8f}{3e}\right) : \frac{4bde}{3acf}$

37) $\left(\frac{36aa}{bb} - \frac{25bb}{cc} + \frac{30bb}{d} - \frac{130bb}{cd} - \frac{9bbcc}{dd} + \frac{78bbc}{dd} - \frac{169bb}{dd}\right) : \left(\frac{6a}{b} + \frac{5b}{c} - \frac{3bc}{d} + \frac{13b}{d}\right)$

38) $\left(\frac{3aa}{8} - \frac{17ab}{4} + \frac{107acc}{12} + 10bb - \frac{88bcc}{3} - 2cccc\right) : \left(\frac{1}{4}a - 2b + 6cc\right)$

39) $\left(\frac{5xxy}{z} - \frac{5xzv}{w} + 5xp - xy + \frac{zzv}{w} - zp\right) : \left(\frac{xy}{z} - \frac{zv}{w} + p\right)$

40) $\left(\frac{xx}{xy} - \frac{2x}{w} + \frac{xz}{yp} + \frac{yz}{ww} - \frac{zz}{wp}\right) : \left(\frac{x}{y} - \frac{z}{w}\right)$

41) $\left(35aa - \frac{21acc}{2d} - \frac{28ccd}{3b} + \frac{42aad}{5bb} + \frac{15abb}{2d} - \frac{9bbcc}{4dd} - \frac{4bcc}{a} + \right.$
$\left. + \frac{9a}{5} + \frac{20bd}{3} - \frac{16ccdd}{9aa} + \frac{8dd}{5b} - \frac{35bbd}{3cc} + \frac{7bb}{2a} + \frac{28bdd}{9aa} - \frac{14dd}{5cc}\right) : \left(\frac{5ab}{c} - \frac{3bc}{2d} - \frac{4cd}{3a} + \frac{6ad}{5bc}\right)$

42) $(aaaa - bbbb) : (a - b)$

43) $1 : (1 - a)$

44) $(1 + a)\ (1 - a)$

45) $c : (a - b)$

46) $(a - b) : (c - b)$

IV. Reductionen durch Vereinigung der Quotienten.

47) $\frac{x}{3} + \frac{4y}{5} - c + \frac{d}{6}$

48) $\frac{x}{3a} + \frac{2y}{4b} - \frac{c}{2a} + d$

49) $-4m + \frac{2n}{5xy} + \frac{v}{3x} - w$

50) $-3a+\frac{6z}{4ab}+\frac{5y}{2c}-\frac{2}{a}$

51) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$

52) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$

53) $3x+\frac{2x-3y}{4}-\frac{5x+2y}{7}-\frac{3x-2y}{2}$

54) $2p+\frac{4p-3x}{3}-\frac{8-(2-v)}{5}$

55) $\frac{a}{3}-\frac{b-2c}{a}+\frac{c+3-a}{7}$

56) $\frac{a-b}{5}-\frac{3b+5c}{2}-\frac{2a-3c}{7}$

57) $\frac{3a}{5c}-\frac{6a-2c}{3d}+4$

58) $\frac{2d-e}{4}+\frac{a-(b+2d)}{7}-\frac{2e-(3a+4b)}{3b}$

59) $\frac{7a}{5}+\frac{2(b-c)}{a}+\frac{a(c-14a)}{5}$

60) $\frac{b-c}{3}+\frac{b}{c}-7$

61) $\frac{3ac+2b}{c}+4a-\frac{6a+5x}{6c}$

62) $2a+\frac{3b-5}{c}+\frac{2b+3}{10cc}-\frac{acc}{5}$

63) $\frac{3}{m}+\frac{5}{m-n}+\frac{p}{mm-nn}$

64) $\frac{5b+4}{c-2}+3d+\frac{4x+3f}{5}$

65) $\frac{13a-5b}{4}-\frac{7a-2b}{6}-\frac{3a}{5}$

66) $\frac{a+3}{4}-(c-3)\ (b-5)+\frac{b}{c-d}$

67) $\frac{3a-5}{a-b}+\frac{7c-d}{a}+\frac{5}{7-c}$

68) $\frac{2a+5}{c+2}+5m-\frac{2x}{3a+2}$

69) $\frac{4a+5}{3c}+\frac{a-(3b+5)}{2xc}+\frac{3a(2b-7c)}{4fc}$

70) $\frac{5}{aa+2ab+bb}-\frac{7}{aa-bb}+\frac{3}{a+b}-\frac{c}{a-b}$

V. Reductionen durch Heben der Brüche.

71) $\frac{14aa-7ab}{10ac-5bc}$

72) $\frac{6ac+9bc-5cc}{12adf+18bdf-10cdf}$

73) $\frac{12aab+16acb-20abd}{15acd+20ccd-25cdd}$

74) $\frac{18acd+12aef}{12bcd+8bef+6ccd+4cef}$

75) $\frac{18aabb-30abc-9abd+15cd}{30cd-18abd-35abc+21aabb}$

76) $\frac{6xzv+8xxy+9yzv+12xyy}{9zvv+12vxy-12zvw-16xyw}$

77) $\frac{6pp+9ps-2p-3s}{9ms+15ns+10np+6mp}$

78) $\frac{bc+ac+ad+bd}{bf+2bx+af+2ax}$

79) $\frac{2xxx+3xx+x}{xxx-xx-2x}$

80) $\frac{8bdamn+6daacm-16efbmn-12efacm}{12bmnef-12acmgh+9efacm-16bmngh}$

81) $\frac{ppp-2pp}{pp-4p+4}$

VI. Vermischte Reductionen.

82) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}$

83) $\frac{3}{15a+5ab}+\frac{7}{6a+2ab}$

84) $\frac{xx+8x+15}{xx+7x+10}-\frac{x-1}{x+2}$

85) $\frac{6mn-2n-9m+3}{4mn-6n-6m+9}-\frac{6mn-15n-8m+20}{9mn-6n-12m+8}$ $\frac{(3m-1)(2n-3)}{(2n-3)(2n-3)}-\frac{(2n-5)(3n-4)}{(3m-2)(3n-4)}$

86) $\dfrac{aa-4a+3}{aa-5a+4}-\dfrac{3c+5d}{5ad-12c-20d+3ac}$

87) $\left\{\left(\dfrac{2a}{ab+2b+3a+6}+\dfrac{a}{ab+2b+a+2}\right):\dfrac{3b+5}{bb+4b+3}\right\}+\dfrac{a+4}{a+2}$

88) $\left[\dfrac{15aa+9ab+20ac+12bc}{3abc-4abd}:\left(\dfrac{5}{b}+\dfrac{3}{a}\right)\right]-\dfrac{bc-ac}{3cb-3ca-4db+4da}$

89) $\left\{\dfrac{aa+6ab+8bb}{cc+9cd+18dd}:\left[\dfrac{2ac-3ad}{2cc-3cd+12cd-18dd}+\dfrac{4bc+4b}{cc+6d+c+6cd}\right]\right\}-$
$-\left[\dfrac{4ah+12bh-2ag-6bg}{4ch-6dg-2cg+12hd}-\dfrac{b}{c+3d}\right]$

90) $\left[\left(6a+\dfrac{3a-2b}{4c+3d}\right)\left(\dfrac{2c+e}{5}\right)-\dfrac{12acc+6aec-6aed-12acd}{5c-5d}\right]\cdot$
$\cdot\left[4\cdot\left(\dfrac{8ac+8ad-bc-bd}{-be-2bc+8ae+16ac}\right)-\dfrac{d}{2c+e}\right]$

Resultate.

1) $-\dfrac{5c}{42}-\dfrac{17d}{21}+\dfrac{e}{16}+\dfrac{2f}{27}$; 2) $\dfrac{19ab}{15}-\dfrac{11ac}{14}-\dfrac{19d}{20}-\dfrac{6ae}{35}+\dfrac{16a}{15}$;

3) $-\dfrac{13ab}{14}+\dfrac{19ac}{15}-\dfrac{17ae}{12}+\dfrac{47ce}{42}$;

4) $\dfrac{3abc}{5}-\dfrac{2ab}{5}-\dfrac{25ac}{12}-\dfrac{3a}{2}-\dfrac{31b}{35}+\dfrac{c}{4}$;

5) $\dfrac{20ab}{77}-\dfrac{7ac}{45}+\dfrac{11ad}{40}-\dfrac{a}{4}$; 6) $\dfrac{2x}{21}+\dfrac{32xy}{21}-\dfrac{3xz}{8}$;

7) $-\dfrac{m}{12}-\dfrac{5mv}{9}+\dfrac{13mnw}{10}-\dfrac{p}{4}$; 8) $-\dfrac{29l}{60}+\dfrac{2m}{9}+\dfrac{23n}{30}-\dfrac{p}{7}+\dfrac{8s}{9}$;

9) $\dfrac{23ab}{12}-\dfrac{451ac}{210}-\dfrac{4ad}{33}-\dfrac{53fa}{42}$;

10) $\dfrac{17ab}{12}+\dfrac{19ac}{10}+\dfrac{499b}{420}+\dfrac{3a}{4}-\dfrac{39c}{15}$;

11) $\dfrac{85a}{84}-\dfrac{5b}{21}$; 12) $6a+2c$; 13) $-\dfrac{x}{10}+\dfrac{2y}{15}-\dfrac{z}{5}$;

14) $6m-15n+\dfrac{13v}{4}+\dfrac{7w}{2}$; 15) $\dfrac{76x}{15}-\dfrac{29y}{6}+\dfrac{4z}{15}$;

16) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{31m}{10}+\dfrac{87n}{20}$; 17) $\dfrac{ed}{5}$;

18) $\dfrac{aa}{3}-\dfrac{ab}{36}-\dfrac{ac}{24}+\dfrac{5bc}{24}-\dfrac{cc}{16}-\dfrac{bb}{6}$;

19) $\frac{3cc}{8} - \frac{17cd}{4} + \frac{107cee}{12} + 10dd - \frac{88dee}{3} - 2eeee$;

20) $\frac{36aa}{bb} - \frac{25bb}{cc} + \frac{30bb}{d} - \frac{130bb}{cd} - \frac{9bbcc}{dd} + \frac{78bbc}{dd} - \frac{169bb}{dd}$;

21) $\frac{7bb}{3dd} - \frac{10cc}{9dd} + \frac{5bbcc}{3aadd} + \frac{4aa}{45dd} - \frac{16aacc}{15bbdd} + \frac{2aabb}{3ccdd}$;

22) $\frac{226ab}{525de} - \frac{4bb}{15ee} + \frac{8bc}{25de} - \frac{6aa}{35dd} - \frac{8ac}{35dd}$;

23) $a + \frac{3aa}{10} + \frac{ac}{30} + \frac{2c}{3} - \frac{cc}{9} - \frac{2e}{5} - \frac{3ae}{25} + \frac{ec}{15}$;

24) $\frac{aa}{bb} - \frac{aa}{cc} + \frac{ab}{cd} - \frac{ac}{bd} - \frac{bc}{dd} + \frac{2a}{d}$;

25) $\frac{6aaxx}{bby} - \frac{6abxx}{ccy} + \frac{3xxx}{y} - \frac{6aa}{bc} + \frac{6abb}{ccc} - \frac{3bx}{c} - \frac{4aa}{3bbx} + \frac{4ab}{3ccx} - \frac{2}{3} - \frac{2aa}{bb} + \frac{2ab}{cc} - x$;

26) $\frac{3b}{g} - \frac{4df}{3g} + \frac{5c}{3g}$; 27) $-\frac{6c}{g} + \frac{3d}{g} - \frac{2c}{ag}$;

28) $a + b - c$; 29) $2a + 5b - 3c$; 30) $5a + 3b + 4c$;

31) $8x + 4y + 3z + 8v$; 32) $2m + 3n - 4p$; 33) $30g + 12h - 3k$;

34) $3a - 2b + 5c - 4d$; 35) $\frac{ad}{3bc} + \frac{fdd}{6cc} - ad + \frac{7d}{3c}$;

36) $\frac{9aaf}{8bbde} - \frac{3accf}{5dde} - \frac{2cffa}{bdee}$; 37) $\frac{6a}{b} - \frac{5b}{c} + \frac{3bc}{d} - \frac{13b}{d}$;

38) $\frac{3}{2}a - 5b - \frac{1}{3}cc$; 39) $5x - z$; 40) $\frac{x}{z} - \frac{y}{w} + \frac{z}{p}$;

41) $\frac{7ac}{b} + \frac{3bc}{2d} + \frac{4cd}{3a} - \frac{7bd}{3ac}$; 42) $aaa + aab + abb + bbb$;

43) $1 + a + aa + aaa + aaaa + \ldots\ldots$

44) $1 + 2a + 2aa + 2aaa + 2aaaa + \ldots\ldots$

45) $\frac{c}{a} + \frac{c}{a}\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\frac{bb}{aa} + \frac{c}{a}\frac{bbb}{aaa} + \ldots\ldots$

46) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{(a-c)}{c} + \frac{bb}{cc} \cdot \frac{a-c}{c} + \frac{bbb}{ccc} \cdot \frac{a-c}{c} + \ldots\ldots$

47) $(10x + 24y - 30c + 5d) : 30$; 48) $(4bx + 6ay - 6bc + 12adb) : 12ab$;

49) $(-60mxy + 6n + 5vy - 15wxy) : 15xy$;

50) $(-12aabc + 6zc + 10yba - 8bc) : 4abc$; 51) a; 52) b;

53) $(36x - y) : 28$; 54) $(50p - 15x - 18 - 3v) : 15$;

55) $(4aa + 9a + 3ac - 21b + 42c) : 21a$; 56) $(-6a - 119b - 145c) : 70$;

57) $(9ad - 30ac + 10cc + 60cd) : 15cd$;

58) $(84a + 12ab + 112b - 12bb + 18bd - 21be - 56e) : 84b$;

59) $(7aa + 10b - 10c + aac - 14aaa) : 5a$;

60) $(bc + 3b - 21c - cc) : 3c$; 61) $(42ac + 12b - 6a - 5x) : 6c$;

62) $(20acc - 2acccc + 2b + 3 + 30bc - 50c) : 10cc$;

63) $(8mmm + 5mn + mp - 3nn) : (mmm - mnn)$;

64) $(25b + 20 + 15cd - 30d + 4cx + 3cf - 8x - 6f) : (5c - 10)$;

65) $(89a - 55b) : 60$;

66) $\frac{1}{4c - 4d}(ac - ad + 4b - 4bcc - 57c + 57d + 12bc + 20cc + + 4bcd - 12bd - 20cd)$;

67) $\frac{1}{7aa - 7ab - aac + abc}(26aa - 35a - 3aac + 54ac - 49bc - 7acc + + 7bcc - 5ab + 7bd + acd - bcd - 7ad)$;

68) $\frac{1}{3ac + 6a + 2c + 4}(6aa + 19a + 10 + 15acm + 30am + 10cm + + 20m - 2cx - 4x)$;

69) $\frac{1}{12cfx}(16afx + 20fx + 6af - 18fb - 30f + 18abx - 63acx)$;

70) $\frac{1}{aaa + aab - abb - bbb}(-12b - 2a + 3aa - 3bb - aac - 2abc - bbc)$;

71) $\frac{7a}{5c}$; 72) $\frac{c}{2df}$; 73) $\frac{4ab}{5cd}$; 74) $\frac{3a}{2b + c}$; 75) $\frac{6ab - 3d}{7ab - 6d}$;

76) $\frac{2x + 3y}{3v - 4w}$; 77) $\frac{3p - 1}{3m + 5n}$; 78) $\frac{c + d}{f + 2x}$; 79) $\frac{2x + 1}{x - 2}$;

80) $\frac{2da - 4ef}{3ef - 4gh}$; 81) $\frac{pp}{p - 2}$; 82) $\frac{(ad + bc)\,fh}{(eh + fg)\,bd}$; 83) $\frac{41}{10a(3 + b)}$;

84) $\frac{4}{x + 2}$; 85) $\frac{5mm + 7m - 13}{6mm - 13m + 6}$; 86) 1; 87) 2; 88) $\frac{3(a + c)}{3c - 4d}$;

89) 0; 90) $\frac{3a - 2b}{5}$.

Zweites Capitel.

Anwendung der gegebenen Formeln auf das Zifferrechnen.

A. Das Zahlensystem.

§. 54. Erklärung.

Zur schriftlichen Darstellung der Zahlen hat man bloß neun Ziffern für die ersten neun Zahlen und außerdem die Null.

Bezeichnet man die auf Neun folgende Zahl Zehn durch z, so kann man die Zahlenreihe darstellen durch:

$$
\begin{array}{llllllllll}
0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\
z, & (z+1), & (z+2), & (z+3), & (z+4), & \ldots\ldots\ldots & & & & (z+9), \\
2z, & (2z+1), & (2z+2), & (2z+3), & (2z+4), & \ldots\ldots\ldots & & & & (2z+9), \\
3z, & (3z+1), & (3z+2), & (3z+3), & (3z+4), & \ldots\ldots\ldots & & & & (3z+9), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
9z, & (9z+1), & (9z+2), & (9z+3), & (9z+4), & \ldots\ldots\ldots & & & & (9z+9), \\
zz, & (zz+1), & (zz+2), & (zz+3), & (zz+4), & \ldots\ldots\ldots & & & & (zz+9),
\end{array}
$$

u. s. w.

Die Reihe dieser Zahlzeichen nennt man das zehntheilige Zahlensystem. Die Zahl z, nach welcher das System geordnet ist, heißt die Grundzahl. Die Zahlen 1 bis 9 nennt man Einer, die Zahlen z, 2z bis 9z Zehner, die Zahlen zz, 2zz bis 9zz Hunderte; alsdann folgen einfache Tausende, Zehntausende, Hunderttausende u. s. w.

§. 55. Erklärung.

Jede nur mögliche Zahl läßt sich also darstellen durch folgende Form:

$$a + b \,.\, z + c \,.\, zz + d \,.\, zzz + e \,.\, zzzz + \ldots.$$

Hat man eine beliebige Anzahl von Einheiten, welche man nach dieser Form schreiben will, so faßt man je zehn Einheiten zu einem Zehner

zusammen; der Rest giebt die Einer; faßt man je zehn Zehner zu einem Hundert zusammen, so giebt der Rest die Zehner u. s. w.

§. 56.

Eine kürzere Bezeichnung dieser Summen wird durch die Bestimmung möglich, daß jede Ziffer, die vor einer andern steht, dadurch einen zehnfachen Werth, wenn sie vor zwei andern Ziffern steht, einen zehnmal zehnfachen Werth erhält, und daß alle diese Zahlen die Bedeutung von Summanden haben. Es ist daher z. B.

$$63542 = 2 + 4 \cdot z + 5zz + 3zzz + 6zzzz$$

und $5 + 8z + 4zz = 485$.

Fehlt irgend ein Glied, so füllt man seine Stelle durch eine Null aus, z. B.

$$5 + 4zz = 5 + 0 \cdot z + 4zz = 405$$
$$z = 0 + 1z = 10.$$

§. 57. Erklärung.

Hätte man statt 10 Ziffern (die Null eingerechnet) bloß 4 oder 5 oder hingegen 11, 12, 13 u. s. w., so könnte man jede Zahl ebenso leicht nach einem viertheiligen, 11theiligen u. s. w. System schreiben. Soll z. B. die nach dem zehntheiligen System geschriebene Zahl 469 nach dem viertheiligen geschrieben werden, so ist:

$$469 = a + b \cdot 4 + c \cdot 4 \cdot 4 + d \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + \ldots. =$$
$$= 1 + 117 \cdot 4 = 1 + 1 \cdot 4 + 29 \cdot 4 \cdot 4 =$$
$$= 1 + 1.4 + 1.4.4 + 7.4.4.4 = 1 + 1.4 + 1.4.4 +$$
$$+ 3.4.4.4 + 1.4.4.4.4 =$$
$$= 13111 \text{ (nach den viertheiligen System).}$$

Soll rückwärts 13111 (vierth. System) nach dem 10theil. geschrieben werden, so hat man zu berechnen $1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 3.4.4.4 + + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

§. 58. Zusatz.

Die Anwendung der vier Species in Buchstaben auf Zahlen, die nach dem zehntheiligen System geschrieben sind, ist so einfach, daß das gewöhnliche Zifferrechnen und die gewöhnliche Bruchrechnung hier übergangen werden können.

Aufgaben.

1) Aus dem 10theil. System soll 342 in das 5theil. übertragen werden.
2) " " " " " 647 " " 7 " " "
3) " " " " " 489 " " 2 " " "
4) " " " " " 38 " " 3 " " "
5) " " " " " 6937 " " 12 " " "
6) " " " " " 638 " " 5 " " "
7) " " 6 " " " 3220 " " 10 " " "
8) " " 4 " " " 31003 " " 10 " " "
9) " " 7 " " " 1233 " " 10 " " "
10) Man soll die nach dem 7theil. System geschriebenen Zahlen 632 und 453 addiren.
11) Man soll die nach dem 4theil. System geschriebenen Zahlen 231, 103, 210 und 103 addiren.
12) Man soll die nach dem 5theil. System geschriebenen Zahlen 123 und 342 mit einander multipliciren.
13) Man soll die nach dem 4theil. System geschriebenen Zahlen 321 und 122 mit einander multipliciren.

Resultate.

1) 2332; 2) 1613; 3) 111101001; 4) 1102; 5) 4021; 6) 5023; 7) 732; 8) 835; 9) 465; 10) 1415; 11) 1313; 12) 104221; 13) 113022.

B. Theilbarkeit der Zahlen.

§. 59. Erklärung.

Eine Zahl ist durch eine andere **theilbar**, oder ist ein **Vielfaches** derselben, wenn sie bei der Division durch letztere einen ganzen Quotienten giebt. So ist 12 durch 3 theilbar, weil $12 : 3 = 4$. Ist eine Zahl bloß durch sich selbst oder durch 1 theilbar, so nennt man sie eine **Primzahl**.

§. 60. Erklärung.

Jede Zahl, die nicht selbst eine Primzahl ist, läßt sich als ein Produkt verschiedener Primzahlen darstellen. So ist z. B. $36 = 2.2.3.3.$

Das Aufsuchen dieser Primzahlen nennt man das Zerlegen einer Zahl in ihre Faktoren. Für das Auffinden der Faktoren hat man verschiedene Regeln, die sich sämmtlich auf den Satz stützen, daß eine Summe durch eine Zahl m theilbar sein muß, wenn alle ihre einzelnen Summanden durch m theilbar sind.

§. 61. Lehrsätze.

1) Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre Einer durch 2 theilbar sind.

Beweis. Da alle Zehner, Hunderte u. s. w. durch 2 theilbar sind, so hängt die Theilbarkeit der Zahl bloß von den Einern ab.

2) Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn ihre Einer und Zehner zusammengenommen durch 4 theilbar sind.

Beweis. Da alle Hunderte, Tausende u. s. w. durch 4 theilbar sind, so hängt die Theilbarkeit der Zahl von den Zehnern und Einern ab.

3) Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn ihre Einer, Zehner und Hunderte zusammengenommen durch 8 theilbar sind.

Beweis wie vorher.

4) Eine Zahl ist durch 10 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.

5) Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

Die Beweise für 4 und 5 ergeben sich von selbst.

6) Eine Zahl ist durch 3 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern, die sogenannte Quersumme, durch 3 theilbar ist.

Beweis. Es ist die Zahl $a + b.10 + c.100 + d.1000 + \ldots =$
$= a + b.9 + b + c.99 + c + d.999 + d + \ldots =$
$= (a + b + c + d + \ldots) + (9b + 99c + 999d + \ldots)$

Der zweite Summand ist jedesmal durch 3 theilbar, die Theilbarkeit der Zahl hängt also vom ersten Summanden, d. h. von der Quersumme ab.

7) Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn die Quersumme durch 9 theilbar ist.

Beweis ebenso, wie bei 6.

8) Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Ziffer so viel beträgt, wie die Summe der zweiten, vierten u. s. w., oder wenn die Differenz beider Summen durch 11 theilbar ist.

Beweis. Es ist die Zahl $a + b.10 + c.100 + d.1000 + e.10000 + f.100000 + \ldots = a + 11b - b + 99c + c + 1001d - d + 9999e + e + 100001f - f + \ldots = (a - b + c - d + e - f + \ldots) + (11b + 99c + 1001d + 9999e + 100001f + \ldots)$.

Der zweite Summand ist stets durch 11 theilbar, also hängt die Theilbarkeit der Zahl davon ab, ob $(a - b + c - d + e - f)$ oder $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$ gleich Null, oder durch 11 theilbar ist.

9) Durch eine aus mehreren Faktoren (2, 3, 5 ...) zusammengesetzte Zahl ist eine andere theilbar, wenn sie durch alle diese Faktoren nach einander theilbar ist.

§. 62. Erklärung.

Sind zwei Zahlen a und b durch eine dritte c theilbar, so nennt man c den gemeinschaftlichen Theiler von a und b. Ist die Zahl 1 der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b, so nennt man a und b relative Primzahlen. Die gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen findet man zum Theil nach den Sätzen des vorigen §.

§. 63. Erklärung.

Um sogleich den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden, bedient man sich folgenden Verfahrens. Man dividirt mit der kleinern Zahl a in die größere b, mit dem Reste c in den vorhergehenden Divisor a, mit dem nun bleibenden Reste d in den vorhergehenden Divisor c und dies so lange, bis die Division aufgeht. Der zuletzt gebrauchte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Theiler.

$$\begin{array}{l|l|l} a & b & x \\ \hline & ax & \\ \hline c & a & y \\ \hline & cy & \\ \hline d & c & z \\ \hline & dz & \\ \hline \end{array}$$

Ist $c - dz = 0$, so ist d der größte gemeinschaftliche Theiler.

Beweis. Da c und d durch d theilbar sind, so ist auch $cy + d$ oder a durch d theilbar, ferner, da c und a theilbar sind, auch $c + ax$ oder b.

Wäre d nicht der größte gemeinschaftliche Theiler, sondern e, so wäre also a und b durch e theilbar, und auch $b - ax$ oder c; wäre nun

c und a durch c theilbar, so wäre auch a — cy oder d durch c theilbar, was aber nicht möglich ist.

Beispiel.

Man soll den größten gemeinschaftlichen Theiler von 9107 und 14311 finden.

$$
\begin{array}{rl|l}
9107 & 14311 & 1 \\
\underline{9107} & & \\
5204 & 9107 & 1 \\
\underline{5204} & & \\
3903 & 5204 & 1 \\
\underline{3903} & & \\
1301 & 3903 & 3 \\
 & \underline{3903} &
\end{array}
$$

Es ist also 1301 der größte gemeinschaftliche Theiler, nämlich

$$9107 = 7 \cdot 1301$$
$$14311 = 11 \cdot 1301$$

daher $\frac{9107}{14311} = \frac{7 \cdot 1301}{11 \cdot 1301} = \frac{7}{11}$.

Aufgaben.

Folgende Brüche sollen nach Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers gehoben werden.

1) $\frac{9228}{11535}$; 2) $\frac{13790}{15169}$; 3) $\frac{30254}{38898}$; 4) $\frac{5481}{14616}$; 5) $\frac{13302}{24387}$; 6) $\frac{51864}{56186}$;
7) $\frac{13956}{17445}$; 8) $\frac{550494}{1022346}$; 9) $\frac{11601}{65739}$; 10) $\frac{26971}{46236}$; 11) $\frac{8276}{45518}$;
12) $\frac{97496}{100978}$; 13) $\frac{90552}{94864}$.

Resultate.

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{10}{11}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{3}{8}$; 5) $\frac{6}{11}$; 6) $\frac{12}{13}$; 7) $\frac{4}{5}$; 8) $\frac{7}{13}$; 9) $\frac{3}{17}$;
10) $\frac{7}{12}$; 11) $\frac{2}{11}$; 12) $\frac{28}{29}$; 13) $\frac{21}{22}$.

---

§. 64. Erklärung.

Ist eine Zahl a theilbar durch b, c, d, e ..., so nennt man sie ein gemeinschaftliches Vielfache von b, c, d, e.

Ist a ein gemeinschaftliches Vielfache, so gilt dasselbe natürlich für 2a, 3a u. s. w. Die kleinste Zahl unter diesen verschiedenen Vielfachen nennt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

§. 65. Erklärung.

Die Aufgabe, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu suchen, fällt zusammen mit der Aufgabe, für mehrere Brüche einen Generalnenner zu suchen. Sind die Zahlen unter einander Primzahlen, so ist ihr Produkt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Haben aber verschiedene von den Zahlen einen oder mehrere gemeinschaftliche Faktoren, so bringt man dieselben bloß einmal in Rechnung. Da z. B. $6 = 2 \cdot 3$ und $8 = 2 \cdot 4$ ist, so ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6 und 8 nicht $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)$, sondern $2 \cdot 3 \cdot 4$; die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 4$ ist theilbar durch $2 \cdot 3$ und $2 \cdot 4$.

Soll man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 4, 6, 10, 9, 15 suchen, so muß dieses theilbar sein durch 2.2, 2.3, 2.5, 3.3, 3.5.

Ist es zunächst theilbar durch 2, so muß es ferner noch theilbar sein durch 2, 3, 5, 9, 15.

Ist es außer durch 2 auch noch durch 3 theilbar, so muß es ferner noch durch 2, 5, 3, 5 theilbar sein.

Ist es schließlich außer durch 2 und 3 auch noch durch 5 theilbar, so muß es ferner auch noch durch 2 und 3 theilbar sein.

Es ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 180$.

Ein kurzes Schema ist folgendes:

	4	6	10	9	15
2)					
	2	3	5	9	15
3)					
	2		5	3	5
5)					
	2			3	

Resultat: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 180$.

In $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$ liegen $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 5$ als Faktoren.

C. Die Decimalbrüche.

§. 66. Erklärung.

Ein Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner aus einer 1 und beliebig vielen Nullen besteht, z. B. $\frac{6}{10}$, $\frac{28}{100}$, $\frac{7}{1000}$ u. s. w.

Jeder Decimalbruch läßt sich in eine Summe von Brüchen mit den aufeinanderfolgenden Nennern 10, 100, 1000 u. s. w. zerlegen.

Es ist z. B.

$$\frac{7632}{10000} = \frac{2}{10000} + \frac{3}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{7}{10}$$

$$\frac{6403}{100000} = \frac{3}{100000} + \frac{0}{10000} + \frac{4}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{0}{10}.$$

Auf dieser Zerlegbarkeit beruht die Methode, Decimalbrüche kürzer zu schreiben. Schreibt man nämlich zuerst die Ganzen, dann die Anzahl der Zehntel, darauf die Anzahl der Hundertel u. s. w. und füllt die fehlenden Stellen durch eine Null aus, so hat man nicht nöthig, auch die Nenner hinzuschreiben, wenn man nur die Ganzen von den Zehnteln durch ein Komma trennt.

So ist z. B.

$$4\,\frac{305}{10000} = 4 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{5}{10000} = 4{,}0305.$$

$$\text{und } 5{,}0072 = 5 + \frac{7}{1000} + \frac{2}{10000} = 5\,\frac{72}{10000}.$$

§. 67. Erklärung.

Will man einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, so dividirt man mit dem Nenner in den Zähler, indem man zugleich die ganze Zahl des Zählers nach und nach in Zehntel, Hundertel u. s. w. verwandelt.

Beispiel.

$$\frac{5}{8} = \frac{50}{10} : 8 = \frac{6}{10} + \left(\frac{2}{10} : 8\right) = \frac{6}{10} + \left(\frac{20}{100} : 8\right) = \frac{6}{10} +$$

$$+ \frac{2}{100} + \left(\frac{4}{100} : 8\right) = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \left(\frac{40}{1000} : 8\right) = \frac{6}{10} +$$

$$+ \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}625.$$

Ein kurzes Schema dafür ist folgendes:

$$\begin{array}{l|l|l} 8 & 50 & 0{,}625 \\ \underline{48} & & \\ 20 & & \\ \underline{16} & & \\ 40 & & \\ \underline{40} & & \end{array}$$

§. 68. Erklärung.

Decimalbrüche, welche sich vollständig hinschreiben lassen, wie 0,625, nennt man rational.

Man erhält jedoch nicht für jeden gewöhnlichen Bruch einen rationalen Decimalbruch.

Verwandelt man z. B. $\frac{5}{7}$ in einen Decimalbruch, so gelangt man mit der Division nie zu Ende und der Bruch erhält daher unendlich viele Stellen. Diese Brüche nennt man irrational.

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285 \ldots .$$

Wiederholen sich indeß bei einem irrationalen Decimalbruche dieselben Zahlen in wiederkehrender Ordnung, so nennt man ihn vollkommen periodisch und zwar heißt die Zahlenreihe, die sich regelmäßig wiederholt, eine Periode. Die Periode obigen Bruchs ist 714285.

Sind die ersten Stellen abweichend, so daß die Periodicität erst nachher eintritt, so heißt der Bruch unvollkommen periodisch, z. B. $\frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots .$

Die übrigen irrationalen Decimalbrüche heißen unperiodisch.

§. 69. Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß jeder gewöhnliche Bruch entweder einen rationalen oder einen periodischen (unvollkommenen oder vollkommenen) Decimalbruch geben muß, da die Periode wiederkehrt, sobald man in einen Rest dividirt, in den man schon einmal dividirt hatte. Ist z. B. der Nenner eines Buches $= 17$, so kann man beim Verwandeln desselben in einen Decimalbruch die verschiedenen Reste 1, 2, 3 ... 16 erhalten; alsdann muß aber ein Rest bleiben, den man schon einmal erhalten hatte, und es muß also die Periodicität eintreten. Diese zeigt sich indessen gewöhnlich schon früher.

§. 70. Erklärung.

Sollen Decimalbrüche addirt werden, so schreibt man Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., indem man die Kommata genau untereinander setzt, und addirt dann wie gewöhnlich. Zehn Zehntel geben ein Ganzes u. s. w.

Beispiel.

6,34
0,2384
3,026
5,82
15,4244.

Kommen irrationale Decimalbrüche vor, so nimmt man von diesen so viele Stellen, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt.

§. 71. Erklärung.

Bei der Subtraction schreibt man die Brüche ebenso untereinander, wie beim Addiren, und subtrahirt dieselben wie ganze Zahlen. Hat der Minuend weniger Decimalstellen, als der Subtrahend, so denkt man sich die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt.

Beispiele.

6,241	3,25	3,5
− 3,246	2,1378	6,8
2,995	1,1122	− 3,3

§. 72. Erklärung.

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Komma 1 oder 2 Stellen nach rechts rückt, hingegen durch 10, 100 u. s. w. dividirt, wenn man das Komma 1 oder 2 Stellen nach links rückt. Reichen in beiden Fällen die Decimalstellen nicht aus, so ergänzt man die fehlenden Stellen durch Nullen.

Beispiele.

6,5 . 100 = 650
0,023 . 10 = 0,23
8,42 : 10 = 0,812
0,31 : 100 = 0,0031.

§. 73. Erklärung.

Sollen zwei oder mehrere Decimalbrüche multiplicirt werden, so multiplicirt man sämmtliche Zähler und dividirt das Produkt derselben durch das Produkt der Nenner, indem man durch das Komma so viel Stellen abschneidet, als die Nenner zusammen Nullen haben.

Beispiele.

$6{,}234 \,.\, 0{,}002 = (6234 \,.\, 2) : (1000 \,.\, 1000) =$
$= 12468 : 1000000 = 0{,}012468.$

$2{,}35 \,.\, 200 = 47000 : 100 = 470.$

§. 74. Zusatz.

Sind die zu multiplicirenden Decimalbrüche irrational, so kann man von dem Produkte der Zähler bloß die ersten Stellen als richtig betrachten; man läßt daher die übrigen weg.

	0,6843 ....
	0,2575 ....
3	4215 ....
47	901 .....
342	15 .....
1368	6 .....
1762	0725.

Durch die Punkte sind die Zahlen bezeichnet, die man erhalten haben würde, wenn man von beiden Brüchen mehr Stellen genommen hätte.

Das richtige Resultat ist also 0,1762 .....

§. 75.

Sollen zwei Decimalbrüche durch einander dividirt werden, so giebt man beiden denselben Nenner, indem man demjenigen, der die wenigsten Decimalstellen hat, so lange Nullen anhängt, bis beide Brüche gleichviel Decimalstellen, also auch gleiche Nenner haben. Alsdann braucht man bloß die Zähler zu dividiren. $\left(\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b\right)$.

Beispiele.

$$6{,}234 : 5{,}64897 = 6{,}23400 : 5{,}64897 = \frac{623400}{564897}$$

$$0{,}0024 : 8{,}6 = 0{,}0024 : 8{,}6000 = \frac{24}{86000}.$$

Die gewöhnlichen Brüche, die man hierbei erhält, verwandelt man schließlich noch in Decimalbrüche und erhält dann in obigen Beispielen

$$\frac{623400}{564897} = 1{,}107 \ldots.$$

$$\frac{24}{86000} = 0{,}000027 \ldots.$$

§. 76. Zusatz.

Sind die beiden Brüche irrational, so kann man, wie beim Multipliciren, nur ein in den ersten Stellen richtiges Resultat erhalten. Um diese Stellen schneller zu erhalten, hängt man beim Verwandeln des erhaltenen gewöhnlichen Bruchs in einem Decimalbruch nicht dem Dividenden Nullen an, sondern streicht die letzten Stellen des Divisors eine nach der andern.

Beispiel.

$$6{,}2341 \ldots. : 2{,}689421 \ldots. = \frac{6234100}{2689421}$$

2689421 | 6234100 | 2,3105 ....
5378842
268942 | 855258
806826
26894 | 48432
26894
268(9) | 1538
1340
198

Anm. Hat man eine Stelle weggelassen, die größer als 5 ist, so vergrößert man die vorhergehende Stelle um 1. In dem eben angeführten Beispiele hätte also bei der letzten Division die 8 in eine 9 verwandelt werden müssen.

§. 77. Erklärung.

Jeder periodische Decimalbruch läßt sich in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln.

Soll z. B. 0,646464 .... in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so bezeichnet man 0,646464 .... durch x und multiplicirt dann den Bruch hintereinander so oft mit 10, bis die erste Periode auf der linken Seite des Komma's steht. Man erhält:

$$\begin{aligned} 64{,}6464 \ldots &= 100x \\ 0{,}6464 \ldots &= 1x \end{aligned}$$

Subtrahirt man die untere Gleichung von der obern, so bleibt

$$\begin{aligned} 64 &= 99x \\ \frac{64}{99} &= x. \end{aligned}$$

Ist der Bruch unvollkommen periodisch, so multiplicirt man das erste Mal so lange mit 10, bis alle nicht zur Periode gehörenden Stellen auf der linken Seite des Komma's stehen, und dann ein zweites Mal so lange, bis auch die erste Periode an dieser Stelle steht. Dann verfährt man, wie in dem vorhergehenden Falle. Soll also 0,23696960 .... in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so ist 0,23696969 = x.

$$\begin{aligned} 2369{,}6969 \ldots &= 10000x \\ 23{,}6969 \ldots &= 100x \\ \hline 2346 &= 9900x \end{aligned}$$

$$\text{also } x = \frac{2346}{9900} = \frac{391}{1650}.$$

Aufgaben.

I. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.

1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{40}$; 3) $\frac{15}{1280}$; 4) $\frac{11}{16}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{4}{11}$; 7) $\frac{4}{7}$; 8) $\frac{4}{35}$;
9) $\frac{7}{12}$; 10) $\frac{8}{13}$; 11) $\frac{11}{15}$; 12) $\frac{5}{44}$; 13) $\frac{35}{74}$; 14) $\frac{29}{37}$; 15) $\frac{1}{223}$;
16) $\frac{3}{713}$; 17) $\frac{5}{833}$; 18) $\frac{6}{102}$; 19) $\frac{9}{3547}$; 20) $\frac{8}{1697}$; 21) $\frac{7}{28}$;
22) $\frac{7}{26}$; 23) $\frac{6}{17}$; 24) $\frac{5}{38}$.

II. Addition und Subtraction.

25) 6,00031 + 2,8347 + 9,6314 + 0,0082
26) 3,5 + 0,002 + 3,1847 + 4,9
27) 0,001 + 4,2865 + 3,167 + 2,00031
28) 2,346 + 0,678 + 1,007 + 0,857
29) 5,634 + 5,007956 + 3,90058
30) 4,2034 + 8,176 + 0,002 + 1,3465 + 8,2314 + 9,3654
31) 2,17 + 5,31 + 0,3281 + 3,0031 + 2,25
32) 12,300497 + 0,003 + 4,186732
33) 4,3012 + 3,00267 + 2,1314 + 0,002 + 0,03 + 6,0004
34) 3,1457 — 2,831
35) 2,18 — 1,243
36) 11,246 — 3,1573
37) 2,1 — 0,00002
38) 3,147 — 2,16
39) 12,2145 — 8,39785
40) 4,187 — 3,168
41) 2,1678 — 1,4865
42) 3 — 2,1895
43) 7 — 6,8214
44) 3 — 4,6835
45) 2,87 — 5,683
46) 5,279 — 9,13

III. Multiplication.

47) 0,97 . 4,43
48) 0,131 . 0,347
49) 0,00353 . 1,49
50) 0,8747 . 700
51) 0,0043 . 0,043 . 1100
52) 0,00107 . 199
53) 0,0007 . 2999
54) 0,13 . 1,09 . 0,013
55) 0,07 . 2,3 . 1,13
56) 1,1 . 2,3 . 0,241
57) 1,09 . 1,73
58) 0,13 . 0,67 . 0,071
59) 2,3 . 0,29 . 0,031
60) 0,109 . 0,0499
61) 0,59 . 0,0031 . 1300
62) 2,9 . 0,13 . 0,7 . 0,07
63) 1,27 . 0,11 . 0,43
64) 0,0061 . 0,00349
65) 0,00211 . 0,0281
66) 0,029 . 0,02027
67) 0,00193 . 30,7
68) 0,00383 . 3700
69) 0,1327 . 7000
70) 0,0643 . 11000

Multiplication irrationaler Decimalbrüche.

71) 0,347892 .... mit 3,257318 ....
72) 0,032865 .... „ 0,027138 ....
73) 0,070526 .... „ 0,0020865 ....

74) 2,1004635 .... mit 3,145367 ....
75) 3,4035S2 .... = 5,126357 ....
76) 2,18653 .... = 7,135786 ....
77) 3,12934 .... = 2,124687 ....

IV. Diviſion.

78) 1385,3 : 700
79) 141,83 : 1300
80) 33,361 : 730
81) 3587,3 : 2900
82) 3589,1 : 1900
83) 475,57 : 1900
84) 51,953 : 47,23
85) 0,52537 : 0,0491
86) 2,0687 : 1,51
87) 3,0587 : 4,19
88) 0,00203 : 0,007
89) 0,706 : 59,07
90) 1,9 : 0,1365
91) 0,013 : 0,0022
92) 0,3 : 0,035
93) 0,15 : 1,7
94) 3,163 : 0,03415
95) 0,02478 : 0,0013
96) 0,078 : 3,14
97) 0,00004 : 0,00203
98) 0,0023 : 33,14

Diviſion irrationaler Decimalbrüche.

99) 6,839423 .... durch 2,213528 ....
100) 3,427 .... = 0,027385 ....
101) 5,712973 .... = 0,0315734 ....
102) 0,02345 .... = 4,7034 ....
103) 5,32187 .... = 2,369846 ....
104) 0,023684 .... = 0,693473 ....
105) 4,2186 .... = 2,6974 ....
106) 0,0026893 .... = 0,0487217 ....
107) 14,68213 .... = 16,35189 ....

V. Verwandlung periodiſcher Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche.

108) 0,3333 ....
109) 0,272727 ....
110) 3,1414 ....
111) 0,080808 ....
112) 0,0444 ....
113) 0,004004004 ....
114) 0,0144144 ....
115) 0,0315315315 ....
116) 0,216666 ....
117) 3,257878 ....
118) 4,123555 ....

Resultate.

1) 0,875; 2) 0,075; 3) 0,01171875; 4) 0,6875; 5) 0,8333 ....;
6) 0,363636 ....; 7) 0,57142857 ....; 8) 0,114285714285 ....;
9) 0,583333 ....; 10) 0,6153846153 ....; 11) 0,7333 ....;
12) 0,113636 ....; 13) 0,4729729 ....; 14) 0,783783 ....;
15) 0,004484 ....; 16) 0,004207 ....; 17) 0,006002 ....;
18) 0,005882 ....; 19) 0,002537 ....; 20) 0,004714 ....;
21) 0,2413793 ....; 22) 0,26923076923 ....; 23) 0,352941 ....;
24) 0,1315789 ....; 25) 18,47461; 26) 11,5867; 27) 9,45481;
28) 4,888; 29) 14,542536; 30) 31,3247; 31) 13,0612; 32) 16,490229;
33) 15,46767; 34) 0,3147; 35) 0,937; 36) 8,0887; 37) 2,09998;
38) 0,987; 39) 3,81665; 40) 1,019; 41) 0,6813; 42) 0,8105;
43) 0,1786; 44) $-1,6835$; 45) $-2,813$; 46) $-3,851$; 47) 4,2971;
48) 0,045457; 49) 0,0052597; 50) 612,29; 51) 0,20339; 52) 0,21293;
53) 2,0993; 54) 0,0018421; 55) 0,18193; 56) 0,60973; 57) 1,8857;
58) 0,0061841; 59) 0,020677; 60) 0,0054391; 61) 2,3777;
62) 0,018473; 63) 0,060071; 64) 0,000021289; 65) 0,000059291;
66) 0,00058783; 67) 0,059251; 68) 14,171; 69) 928,9; 70) 707,3;
71) 1,13319 ....; 72) 0,00089189 ....; 73) 0,000147152 ....;
74) 6,6067285 ....; 75) 17,44797 ....; 76) 15,6026 ....;
77) 6,64886 ....; 78) 1,979; 79) 0,1091; 80) 0,0457; 81) 1,237;
82) 1,889; 83) 0,2503; 84) 1,1; 85) 10,7; 86) 1,37; 87) 0,73;
88) 0,29; 89) 0,01195192 ....; 90) 13,9194139 ....;
91) 5,9090 ....; 92) 8,571428 ....; 93) 0,08823529 ....;
94) 92,620790 ....; 95) 19,0615384 ....; 96) 0,02484076 ....;
97) 0,0197044 ....; 98) 0,000069402 ....; 99) 3,0898 ....;
100) 125,14 ....; 101) 180,942 ....; 102) 0,004985 ....;
103) 2,24566 ....; 104) 0,03415 ....; 105) 1,5639 ....;
106) 0,05519 ....; 107) 0,89788 ....;

108) $\frac{1}{3}$; 109) $\frac{3}{11}$; 110) $3\frac{14}{99}$; 111) $\frac{8}{99}$; 112) $\frac{2}{45}$; 113) $\frac{4}{999}$;

114) $\frac{8}{555}$; 115) $\frac{7}{222}$; 116) $\frac{13}{60}$; 117) $3\frac{851}{3300}$; 118) $4\frac{139}{1125}$.

D. Benannte Zahlen.

§. 78. Erklärung.

Wird zu einer Zahl noch der Gegenstand hinzugefügt, dessen Größe sie angeben soll, so heißt sie eine benannte Zahl z. B. 6 Thlr., 8 Fuß, 9 Pfd. Die allgemeine Bezeichnung der benannten Zahl ist xA, wo x die Zahl, A den Gegenstand bezeichnet.

A nennt man das Maaß, x die Maaßzahl.

§. 79. Erklärung.

Zwei benannte Zahlen xA und yA sind einander gleich, wenn $x = y$ ist.

Eine benannte Zahl xA ist größer als eine andere yA, wenn $x > y$ ist.

Besteht zwischen zwei verschieden benannten Zahlen eine Gleichung, wie $B = x \cdot A$ oder $B = \frac{x}{y}A$, so nennt man B und A verwandte Größen, z. B. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 5 Pf. $= \frac{5}{12}$ Sgr.

Verwandte Größen lassen sich beliebig durch einander ausdrücken.

Ist $B = x \cdot A$, so ist $m \cdot B = m \cdot x \cdot A$; $\frac{1}{n} \cdot B = \frac{1}{n} \cdot x \cdot A$.

Da z. B. 1 Thlr. = 30 Sgr. ist, so sind 2 Thlr. = 2 . 30 Sgr.; $\frac{1}{7}$ Thlr. $= \frac{30}{7}$ Sgr. u. s. w.

§. 80. Erklärung.

Sollen zwei oder mehrere benannte Zahlen zu einer dritten vereinigt werden, so ist dies nur möglich bei gleich benannten Zahlen oder bei verwandten Größen, da eine andere Vereinigung widersinnig wäre. Zwei gleichbenannte Zahlen vereinigt man aber im Allgemeinen zu einer dritten, indem man ihre Maaßzahlen vereinigt.

§. 81. Lehrsätze.

1) $xA + yA + zA + \ldots = (x + y + z)A$

2) $xA - yA = (x - y)A$

3) $(xA + yA - zA - vA)\ldots = (x + y - z - v\ldots)A.$

Die Beweise ergeben sich aus der vorhergehenden Erklärung von selbst.

§. 82. Zusatz.

Liefert die Formel 2 des vor. §. in $(x - y)A$ eine negative Zahl $(-mA)$, so muß $(-mA)$, wenn es in einer algebraischen Summe erhalten worden ist, subtractiv in Rechnung gebracht werden. Es gelten alsdann dieselben Formeln, die in Kap. I. für negative Zahlen aufgestellt worden sind.

Für sich allein bedeuten $+mA$ und $-mA$ das Vorhandensein oder den Mangel von mA, oder die Vorzeichen bedeuten einen in der Natur der Sache begründeten Gegensatz; wenn $+mA = 4$ Thlr. Vermögen oder Gewinn ist, so ist $-mA = 4$ Thlr. Schulden oder Verlust.

§. 83. Erklärung.

Nach §. 81 ist $mA + mA + mA = (m + m + m)A = (3m)A$, sonst aber auch $(mA + mA + mA) = (mA) \,.\, 3$.

Allgemein ausgedrückt ist also:

$$(mA) \,.\, n = (m \,.\, n)A = (nA) \,.\, m$$

$$6\,\text{Thlr.} \,.\, 3 = (6 \,.\, 3)\,\text{Thlr.} = 3\,\text{Thlr.} \,.\, 6 = 18\,\text{Thlr.}$$

§. 84. Zusatz.

$xA \,.\, yA$ und $xA \,.\, yB$ haben keine Bedeutung. Benannte Zahlen können nicht mit einander multiplicirt werden.

§. 85. Erklärung.

Für die Division ergeben sich, als für die umgekehrte Operation des Multiplicirens, zwei mögliche Fälle.

Da $(xm)A = (xA)m = (mA)x$ ist, so folgt:

$$1)\quad \frac{(xm)A}{m} = \frac{(xA)m}{m} = xA$$

$$2)\quad \frac{(xm)A}{xA} = \frac{(xA)m}{xA} = m.$$

Eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt, liefert wieder eine benannte Zahl; die zu letzterer gehörige unbenannte Zahl ist der Quotient der beiden unbenannten Zahlen.

Zwei gleich benannte Zahlen durch einander dividirt, liefern eine unbenannte, welche gleich dem Quotienten der beiden zugehörigen unbenannten Zahlen ist.

Ist in $\frac{x}{y}A$ die Zahl x durch y nicht theilbar, so nennt man $\frac{x}{y}A$ eine gebrochene benannte Zahl.

§. 86. Zusatz.

$\frac{x}{yA}$ hat keine Bedeutung, da keine Zahl x liefert, wenn sie mit yA multiplicirt wird. Man kann jedoch $\frac{x}{yA} = \frac{xm}{ymA} = \frac{(y : v)A}{x : v}$ setzen. — Die Bedeutung einer solchen Gleichung wird in einem der nächsten Kapitel (bei den Proportionen) entwickelt werden.

Drittes Kapitel.

Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

§. 87. Erklärung.

Eine Zahl, welche sich in m gleiche Faktoren zerlegen läßt, heißt eine Potenzzahl und zwar die 2te, 3te, mte Potenz von a, je nachdem sie aus 2, 3 oder m Faktoren, von denen jeder a ist, besteht. Die mte Potenz von a schreibt man kürzer a^m (ausgesprochen a hoch m oder a in der mten Potenz), nennt a den Dignanden oder die Grundzahl, b den Exponenten. Die zweite Potenz nennt man auch das Quadrat, die dritte Potenz den Kubus oder den Würfel. Die Bedeutung einer jeden geschriebenen Potenz und die möglichen Veränderungen in der Art der Abkürzung kann man daher sehr leicht finden, wenn man die angedeutete Multiplication ausführt. So ist:

$$a^4 = aaaa$$

$$(ab)^3 = ab \,.\, ab \,.\, ab = aaa \,.\, bbb = a^3 \,.\, b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} = aaa \,:\, bbb = a^3 : b^3$$

$$a^3 \,.\, a^2 \,.\, a^5 = aaa \,.\, aa \,.\, aaaaa = a^{3+2+5}$$

$$a^6 : a^2 = aaaaaa : aa = aaaa = a^{6-2}$$

$$(a^4)^3 = a^4 \,.\, a^4 \,.\, a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3} = (a^3)^4$$

$$(a \mp b)^2 = (a \mp b)(a \mp b) = a^2 \mp 2ab + b^2$$

$$(a \mp b)^3 = (a \mp b)(a \mp b)(a \mp b) = a^3 \mp 3a^2 b + 3ab^2 \mp b^3.$$

Für die Potenz gilt außerdem der Grundsatz:

Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$.

§. 88. Zusatz.

Für die vier Species in Potenzen erleiden die in Kap. I. gegebenen Formeln keine Abänderung, da die Potenz bloß ein Produkt von gleichmäßiger Form ist. Daher ist:

$$5a^3 + 8a^3 = 13a^3$$

$$5a^3 - 2a^3 + 7a^3 = 10a^3$$

$$6a^2 \,.\, 7a^3 = 6 \,.\, 7 \,.\, a^2 \,.\, a^3 = 42a^5$$

$$12a^5 : 4a^3 = 3a^2$$

$$4a^2 + 2a^3 = 2a^2\,(2 + a)$$

$$\frac{3a^3 + 3a^2}{4a.b^2 + 4b^2} = \frac{3a^2\,(a+1)}{4b^2\,(a+1)} = \frac{3a^2}{4b^2}.$$

Anm. Verschiedene von den in Kap. I. gegebenen Aufgaben können als Beispiele für die Potenzrechnung benutzt werden.

§. 89. Erklärung.

Wenn $a^m = b$, also b die mte Potenz von a ist, so nennt man umgekehrt a die mte Wurzel aus b und versteht hierunter die Zahl, welche b giebt, wenn man sie mit m potenzirt (d. h. m mal mit sich selbst multiplicirt). Die mte Wurzel aus b bezeichnet man durch die Form $\sqrt[m]{b}$ und nennt b den Radicanden, m den Wurzelexponenten. Die zweite Wurzel aus a bezeichnet man durch $\sqrt[2]{a}$ oder gewöhnlich kurz durch $\sqrt{a}$. Nach obiger Erklärung ist also:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

$$\sqrt[2]{ab} \cdot \sqrt[2]{ab} = \left(\sqrt[2]{ab}\right)^2 = a.$$

Das Berechnen oder Ausziehen der Wurzeln oder das Radiciren beschränkt sich, wenn man keine weitern Hülfsmittel anwendet, auf das Ausziehen der 2ten und 3ten oder der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I. Berechnung der Quadratwurzeln.

§. 90. Erklärung.

Da das Ausziehen der zweiten Wurzeln eine Umkehrung des Verfahrens zur Berechnung der zweiten Potenzen ist, so kann man durch Umkehrung der Potenzformeln verschiedene Formeln für die Wurzeln erhalten.

Da die zweite Potenz von $ab = a^2 . b^2$ ist und man diese erhält, indem man sowohl a, wie auch b potenzirt, so muß umgekehrt ab die zweite Wurzel aus $a^2 . b^2$ sein und man muß dieselbe erhalten, indem man sowohl a^2 wie auch b^2 radicirt. Es ist also:

1) $\sqrt{a^2 . b^2} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b^2} = ab$

2) $\sqrt{c . d} = \sqrt{c} . \sqrt{d}$

3) $\sqrt{c^2 . d} = \sqrt{c^2} . \sqrt{d} = c \sqrt{d}$.

Da ferner die zweite Potenz von $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$ ist, so muß umgekehrt $\frac{a}{b}$ die zweite Wurzel aus $\frac{a^2}{b^2}$ sein. Es ist also:

4) $\sqrt{a^2 : b^2} = \sqrt{a^2} : \sqrt{b^2} = a : b$

5) $\sqrt{c : d} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$

6) $\sqrt{c^2 : d} = \sqrt{c^2} : \sqrt{d} = c : \sqrt{d}$

7) $\sqrt{c : d} = \sqrt{cd : dd} = \sqrt{cd} : \sqrt{dd} = \sqrt{cd} : d$.

Da schließlich $(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$ ist, so muß

8) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ und

9) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ sein.

Da man außerdem beim Potenziren einer Summe immer die eben angeführte Form für die zweite Potenz erhält, so ergiebt sich, daß man aus einer Summe nur dann die Wurzel ziehen kann, wenn sie die angegebene Form $a^2 \mp 2ab + b^2$ hat, den Fall ausgenommen, wo sich die Summe in ein Produkt von Quadraten verwandeln läßt; z. B. $\sqrt{3a^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

§. 91. Erklärung.

Die eben angegebenen Formeln bedürfen noch einer Erläuterung. Es hat nämlich zwar jede Zahl nur eine einzige Quadratzahl, aber jede Quadratzahl hat zwei Quadratwurzeln. Es ist

$$(+b).(+b) = +36,$$
$$\text{ebenso} \quad (-b).(-b) = +36.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß das Quadrat jeder positiven und jeder negativen Zahl positiv sein muß, daß aber die Wurzel aus $+36$ sowol $= +6$, als auch $= -6$ sein kann. Hat man also die Gleichung $a^2 = b^2$, so braucht nicht $a = b$ zu sein, aber es ist jedesmal $a = \mp b$. Nimmt man indeß die Werthe von a und b absolut, d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so ist jedesmal $a = b$, sobald $a^2 = b^2$ ist.

Die gegebenen Formeln sind also bloß vollständig richtig, wenn die Zahlenwerthe absolut genommen werden. Im gegenwärtigen Kapitel soll übrigens, sobald von einer Wurzel die Rede ist, nur der positive Werth derselben gemeint sein.

Da die Quadratzahl sowohl von positiven, als auch von negativen Zahlen positiv sein muß, so läßt sich also aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel nicht ziehen. Die Wurzel $\sqrt{-36}$ ist weder einer positiven, noch einer negativen Zahl gleich, und heißt ein imaginärer Ausdruck im Gegensatz zu den reellen (positiven oder negativen ganzen und gebrochenen Zahlen). Die imaginären Ausdrücke werden indeß erst in spätern Kapiteln von Wichtigkeit.

Numerisches Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 92. Erklärung.

Für die ersten zehn Zahlen hat man:

$1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$;

also $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$;

$6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$;

also $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$;

Ferner ist $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; $1000^2 = 1000000$ u. s. w.

also $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{10000} = 100$; $\sqrt{1000000} = 1000$ u. s. w.

Es ergiebt sich hieraus, daß die Quadrate der Zahlen von 10 bis 100, also die zweiziffrigen Zahlen, 3 oder 4 Stellen, die Quadrate der dreiziffrigen Zahlen 5 oder 6 Stellen haben, und umgekehrt, daß die Wurzel aus einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl drei Stellen haben müsse u. s. w.

§. 93. Erklärung.

Jede mehrziffrige Zahl stellt eine Summe vor. Wird eine Summe mit sich selbst multiplicirt, so erhält man:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

daher $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 . 30 . 5 + 5^2 = 1225.$

Soll nun die Wurzel aus 1225 gezogen werden, so sucht man 1225 wieder in die Summanden 30^2, $2 . 30 . 5$ und 5^2 zu zerlegen.

§. 94. Erklärung.

Diese Zerlegung führt man auf folgende Art aus:

1) Es soll die Wurzel aus der vierziffrigen Zahl 1225 gezogen werden.

Die Wurzel muß nach §. 92 zweiziffrig sein, daher aus Zehnern und Einern bestehen, und muß zwischen dreißig und vierzig liegen, weil $30^2 = 900$ und $40^2 = 1600$ ist. (Man findet das Quadrat der Anzahl der Zehner leicht, wenn man die beiden letzten Stellen der Quadratzahl wegläßt und das größtmöglichste Quadrat aus den vordern Stellen sucht. In unserm Beispiel ist 9 das größte in 12 enthaltene Quadrat). Bezeichnet man die Einer durch x, so ist die Wurzel $= 30 + x$.

Nun ist $(30 + x)\ (30 + x) = 900 + 2 . 30 . x + x^2 = 1225$, also

$$2 . 30\ x + x^2 = 325.$$

Da x^2 im Verhältniß zu $2 . 30x$ klein ist, so muß $2 . 30x$ annähernd $= 325$ sein und man findet daher x, wenn man mit $2 . 30$ oder 60 in 325 dividirt und den Rest nicht berücksichtigt. $325 : 60$ giebt 5 Ganze. Ist $x = 5$, so ist $2 . 30x + x^2 = 325$, und die Wurzel aus 1225 ist also $= 30 + 5 = 35$.

2) Es soll die Wurzel aus der dreiziffrigen Zahl 169 gezogen werden.

Die Wurzel muß aus Zehnern und Einern bestehen. Das Quadrat der Anzahl der Zehner findet man, wenn man 69 wegläßt und das größte in 1 enthaltene Quadrat sucht, welches selbst $= 1$ ist. Die Wurzel ist also $= 10 + x$.

$$(10 + x)(10 + x) = 100 + 20x + x^2 = 169$$
$$20x + x^2 = 69.$$

20 in 69 dividirt, giebt drei Ganze, also $x = 3$.

$$20x + x^2 = 69, \text{ wenn } x = 3.$$

Die Wurzel ist demnach $= 10 + 3 = 13$.

§. 95. Zusatz.

In den eben berechneten Aufgaben wurden die Einer gefunden, indem man x^2 vernachlässigte und z. B. in der 2ten Aufgabe $20x = 69$ setzte. Zuweilen ist jedoch x^2 groß genug, um nicht vernachlässigt werden zu können. Die Zahl, die man bei der Division erhält, ist alsdann zu groß und man muß die zunächst kleinere wählen.

Beispiel.

Die Wurzel aus 225 ist zunächst $10 + x$,

also $(10 + x) . (10 + x) = 100 + 20x + x^2 = 225$
$$20x + x^2 = 125.$$

Setzt man $20x = 125$, so ist $x = 6$.

Dieser Werth ist aber zu groß, weil $20x + x^2 = 156$ wird, sobald man $x = 6$ setzt. Giebt man hingegen x den Werth 5, so wird $20x + x^2 = 125$ und die Wurzel ist demnach $= 15$.

§. 96. Zusatz.

Ein kurzes Schema für die Berechnung ist folgendes:

	10|24	32
$3^2 =$	9	
$2 . 3 = 6(2)$	1 24	
2	1 24	
12 4		

Man schneidet die beiden letzten Stellen ab, sucht die größte Quadratzahl, welche in 10 enthalten ist, also $9 = 3^2$, schreibt 3 rechts und subtrahirt 9 von 10. Zu dem Reste fügt man die beiden letzten Stellen 24 und dividirt mit $2 . 3$ oder 6 in 13; man erhält 2; diese Zahl schreibt man hinter die 6 und multiplicirt 62 mit 2; da dies 124 giebt, so ist der Werth 2 richtig und wird deshalb rechts hinter die 3 geschrieben.

Dieses Verfahren ist dasselbe, wie das frühere. Statt 900 von 1024 zu subtrahiren (siehe §. 94), subtrahirt man 9 von 10 und schreibt

24 hinter den Rest 1 (also 124); statt mit 2 . 30 in 124 zu dividiren, dividirt man mit 2 . 3 in 12; statt 60 . 2 + 2 . 2 oder (60 + 2) . 2 zu berechnen, schreibt man die 2 hinter die 6, wodurch man ebenfalls 62 erhält, und multiplicirt diese Zahl mit 2.

§. 97. Zusatz.

Ist die Zahl, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, keine Quadratzahl, so muß natürlich ein Rest bleiben.

Beispiel.

	1739	41
	16	
8(1)	139	
1	81	
81	58	

Die Wurzel aus 1739 ist daher = 41 und der Rest = 58, oder 41 ist die Wurzel aus 1739 — 58 = 1681.

§. 98. Zusatz.

Ist die Wurzel aus 1225 = 35,
aus 169 = 13,
so muß die Wurzel aus 122500 = 350,
aus 16900 = 130
sein. Ist die Wurzel aus 1739 = 41 (Rest 58) so ist zunächst die Wurzel aus 173900 = 410 (Rest 5800).

§. 99. Erklärung.

Soll die Wurzel aus einer 5 oder 6ziffrigen Zahl gesucht werden, z. B. aus 339889, so erhält man nach den vorigen §. die Wurzel aus 3398 = 58 (Rest 34),

also aus 339889 = 580 (Rest 3489).

Zu dieser Wurzel kann man jedoch leicht auch noch die Einer finden. Bezeichnet man nämlich die Einer durch x, so ist:

$3489 = 2.580x + x^2 = 1160x + x^2$

und x genau gleich 3,

daher $\sqrt{339889} = 343$.

	33|98|89	583
	25	
2a = 10(8)	8 98	
8	8 64	
86 4		
2a = 118(3)	34 89	
3	34 89	
348 9		

§. 100. Erklärung.

Soll aus einer 7 oder 8ziffrigen Zahl die Wurzel gezogen werden, so verfährt man ebenso, wie bei einer sechsziffrigen. Man läßt zuerst die zwei letzten Stellen weg, zieht zunächst die Wurzel aus den übrigen Stellen und bestimmt hernach die Einer. Das Wurzelausziehen aus vielziffrigen Zahlen ist bloß eine Wiederholung ein und desselben Verfahrens.

Beispiele.

I.

	658230336	25656
	4	
2a = 4(5)	258	
5	225	
22 5		
2a = 50(6)	3323	
6	3036	
303 6		
2a = 512(5)	28703	
5	25625	
2562 5		
2a = 5130(6)	307836	
6	307836	
30783 6		

II.

$$\begin{array}{lr} & 11088932416 \mid 105304 \\ & 1 \\ \hline 2a = 2(0)(5) & 1088 \\ & 1025 \\ \hline 2a = 210(3) & 6393 \\ & 6309 \\ \hline 2a = 2106(0)(4) & 842416 \\ & 842416 \\ \hline \end{array}$$

Anm. Bei dem zweiten Beispiele erhält man zweimal beim Dividiren Null. Man schreibt in diesem Falle die 0 hin und zieht zwei neue Stellen herunter.

§. 101. Erklärung.

Soll aus einem Bruche die Wurzel gezogen werden, so zieht man sie aus dem Zähler und aus dem Nenner; z. B. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, weil $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

§. 102. Erklärung.

Soll die Wurzel aus einer Zahl gezogen werden, welche keine Quadratzahl ist, so verwandelt man sie in einen Decimalbruch und zieht die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner. Damit sich die Wurzel aus dem Nenner leicht ziehen lasse, nimmt man jedesmal eine gerade Anzahl von Decimalstellen.

Beispiel.

$$5 = \frac{500}{100} = \frac{50000}{10000} = \frac{5000000}{1000000} \text{ u. s. w.}$$

$\sqrt{5} = 2$, Rest 1.

$\sqrt{\frac{500}{100}} = \frac{22}{10}$, Rest $\frac{16}{100}$.

$\sqrt{\frac{50000}{10000}} = \frac{223}{100}$, Rest $\frac{271}{10000}$.

$\sqrt{\frac{5000000}{1000000}} = \frac{2236}{1000}$, Rest $\frac{304}{1000000}$.

Die Wurzel aus 5 kann natürlich nie vollständig erhalten werden, weil kein Bruch eine ganze Zahl giebt, wenn man ihn mit sich selbst multiplicirt. Je mehr Decimalstellen man jedoch anhängt, desto geringer wird der Fehler und desto mehr ist man berechtigt, das noch immer fehlerhafte Resultat als Wurzel der gegebenen Zahl anzusehen. — Die Berechnung führt man nach folgendem leicht verständlichen Schema aus:

```
                5          | 2,236 ....
                4
          ------
4(2)            100
                 84
          ---------
44(3)            1600
                 1329
          ----------
446(6)            27100
                  26796
          ----------
                    304
```

Will man noch einige Stellen auf kürzere Art erhalten, so fahre man nicht auf gewöhnliche Art fort, sondern dividire mit 4466 in 27100 auf verkürzte Art (siehe §. 76). — Das Komma schreibt man, sobald dem Reste die ersten zwei Nullen angehängt worden sind.

§. 103.

Dasselbe Verfahren wendet man an, wenn die Wurzel aus einem Bruche gezogen werden soll, dessen Zähler und Nenner nicht Quadratzahlen sind. Man verwandelt ihn in einen Decimalbruch mit gerader Stellenzahl und zieht die Wurzel aus Zähler und Nenner. Um schnell eine gerade Stellenzahl zu erhalten, theilt man die Decimalstellen vom Komma an zu zweien ab. Die Wurzel aus dem Nenner muß alsdann gerade so viel Stellen erhalten, wie der Zähler Stellenpaare hat.

Beispiele.

I. $\frac{5}{7} = 0{,}71428571 \ldots.$

```
                0,71428571 | 0,8451 ....
                 64
          ------
16(4)             742
                  656
          ---------
168(5)             8685
                   8425
          ----------
1690(1)             26071
                    16901
          ----------
                     9170
```

II. $15\frac{3}{8} = 15{,}375000\ldots.$

	15,375000	3,921 ....
	9	
6(9)	637	
	621	
78(2)	1650	
	1564	
784(1)	8600	
	7841	
	759	

III. $0{,}0432 = 0{,}043200\ldots.$

	0,0432	| 0,2078 ....
	4	
4(0)(7)	3200	
	2849	
414(8)	35100	
	33184	
	1916	

IV. $0{,}0000325 = 0{,}0000325000\ldots.$

	0,00003250	| 0,00569 ....
	25	
10(6)	750	
	636	
112(9)	11400	
	10161	
	1239	

§. 104. Erklärung.

Die Wurzel aus einer Quadratzahl läßt sich auch dadurch finden, daß man die Zahl in ihre Faktoren zerlegt und die Wurzeln aus den Faktoren einzeln auszieht.

Da z. B. $576 = 9 \cdot 64$ ist, so ist auch

$$\sqrt{576} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24.$$

§. 105. Zusatz.

Nach vorigen §. ist $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{98} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

also $\sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{98} = 6 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{2} =$

$= \sqrt{2} \cdot (6 + 5 - 7) = 4 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot (1{,}41424 \ldots) = 5{,}6569 \ldots$

Statt der drei Wurzeln braucht man also bloß eine einzige auszuziehen.

§. 106. Erklärung.

Die Quadratwurzeln aus algebraischen Summen werden auf dieselbe Art berechnet, wie die Quadratwurzeln aus Zahlen. Sie lassen sich jedoch nach §. 90 nur dann ausziehen, wenn die algebraische Summe von der Form $a^2 \mp 2ab + b^2$ ist. Da das Verfahren von dem früheren bloß darin abweicht, daß man die einzelnen Summanden erst alphabetisch ordnen muß, so genügt ein bloßes Beispiel.

Es soll die Wurzel aus $25a^2 + 40ab - 30ac + 16b^2 - 24bc + 9c^2$ gezogen werden.

	$25a^2+40ab-30ac+16b^2-24bc+9c^2$	$5a+4b-3c$
$(5a)^2 = 25a^2$		
$10a + (4b)$	$40ab-30ac+16b^2-24bc+9c^2$	
$4b$		
$20ab+16b^2$	$40ab \quad +16b^2$	
$10a + 8b - (3c)$	$-30ac \quad -24bc+9c^2$	
$-3c$		
$-30ac-24bc+9c^2$	$-30ac \quad -24bc+9c^2$	

Anm. Man darf hierbei jedoch nicht übersehen, daß die Wurzel absolut genommen ist, daß dieselbe also, wenn sie inmitten einer Rechnung auftritt, nicht $= 5a + 4b - 3c$, sondern $= \mp (5a + 4b - 3c)$ ist.

II. Berechnung der Kubikwurzeln.

§. 107. Erklärung.

Für die Kubikwurzeln gelten ähnliche Formeln, wie für die Quadratwurzeln; die Formeln erhält man ebenfalls durch Umkehrung der Potenzformeln. Es ist:

1) $\sqrt[3]{abc\ldots} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c} \ldots$

2) $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b} = a \cdot \sqrt[3]{b}$

3) $\sqrt[3]{a : b} = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$

4) $\sqrt[3]{a^3 : b} = \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{b} = a : \sqrt[3]{b}$

5) $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$

6) $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} = a - b$

7) $\sqrt[3]{-a^3} = -a.$

Anm. Die Kubikwurzel jeder positiven und negativen Zahl liefert, wie in einem spätern Capitel gezeigt werden wird, einen reellen und zwei imaginäre Wurzelwerthe. In den folgenden §§. wird unter der dritten Wurzel bloß der reelle Wurzelwerth verstanden.

Numerische Berechnung der Kubikwurzeln.

§. 108. Erklärung.

Für die ersten 10 Zahlen ist:

$1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$; $10^3 = 1000$;

also $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{64} = 4$ u. s. w.

Ferner ist $10^3 = 1000$; $100^3 = 1000000$; $1000^3 = 1000000000$;

daher $\sqrt[3]{1000} = 10$; $\sqrt[3]{1000000} = 100$ u. s. w.

Je drei Stellen einer Kubikzahl geben also, wenn man von rechts nach links abtheilt, eine Stelle für die Kubikwurzel.

§. 109. Erklärung.

Beim Ausziehen der dritten Wurzel theilt man die Stellen des Radicanden zu dreien ab (nach vor. §.) und benutzt alsdann die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Beispiel.

Es soll die dritte Wurzel aus 14348907 gezogen werden.

Die Wurzel aus 14,348,907 muß zwischen 100 und 1000 liegen, ferner, da der größte Cubus in 14 gleich 8 ist, zwischen 200 und 300.

Bezeichnet man die Wurzel durch $(a + x) = 200 + x$, so ist also

$$8000000 + 3 \cdot 200^2 \cdot x + 3 \cdot 200 \cdot x^2 + x^3 = 14348907,$$

daher $3 \cdot 200^2 x + 3 \cdot 200 x^2 + x^3 = 6348907$.

Da $3.200^2.x$ sehr groß im Verhältniß zum Reste ist, so setzt man $3 \cdot 200^2 . x$ oder $120000x = 6348907$ und erhält dadurch $x = 40$.

Alsdann ist

$$\begin{aligned} 3a^2x &= 4800000 \\ 3ax^2 &= 960000 \\ x^3 &= 64000 \\ \hline & 5824000 \end{aligned}$$

Subtrahirt man diese Zahl von 6348907, so bleibt 524907 als Rest. Die Wurzel ist also zunächst $= 240$ (Rest 524907).

Bezeichnet man wiederum die Wurzel durch $(240 + x)$, so ist

$$\begin{aligned} 524907 &= 3 \cdot 240^2 x + 3 \cdot 240 x^2 + x^3 \\ &= 172800x + 720x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Setzt man $172800x$ annähernd gleich 524907, so ist $x = 3$. Für diesen Werth von x wird $172800x + 720x^2 + x^3$ genau gleich 524907 und die gesuchte Wurzel ist daher gleich 243.

Anm. Bei den Kubikwurzeln tritt noch häufiger, als bei den Quadratwurzeln, der Fall ein, daß man den Werth für x zu groß gewählt hat. Man nimmt alsdann, wie früher bei den zweiten Wurzeln, die um 1 kleinere Zahl.

§. 110. Zusatz.

Der Zeitersparniß wegen kann man bei obigen Berechnungen sämmtliche Nullen weglassen, muß aber alsdann bei der Berechnung von

$3a^2x + 3ax^2 + x^3$ jedes folgende Glied um eine Stelle nach rechts ausrücken.

	14|348|907 | a = 2		$3a^2x = 48$
$a^3 =$	8 | x = 4		$3ax^2 = 96$
			$x^3 = 64$
$3a^2 = 12$	6348		5824
	5824		
$3a^2 = 1728$	524907	a = 24	$3a^2x = 5184$
	524907	x = 3	$3ax^2 = 1648$
			$x^3 = 27$
	Wurzel = 243		524907

§. 111. Erklärung.

Ist die Zahl, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, keine Kubikzahl, so berechnet man die Wurzel annähernd, indem man je drei Nullen anhängt und im Uebrigen wie bei den Quadratwurzeln verfährt. Dasselbe gilt von den Kubikwurzeln aus Brüchen.

Läßt sich eine Zahl bequem in Faktoren zerlegen, welche selbst Kubikzahlen sind, so zieht man die Wurzeln aus den Faktoren einzeln.

z. B. $\sqrt[3]{13824} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 8 \cdot 3 = 24.$

Aufgaben.

Es soll die Quadratwurzel berechnet werden zu:

1) 6724
2) 7569
3) 8649
4) 9801
5) 12321
6) 14161
7) 39601
8) 78961
9) 121801
10) 275625
11) 301401
12) 417316
13) 715716
14) 835396
15) 900601
16) 952576
17) 996004
18) 20857489
19) 152967424
20) 101485476

21) 748843225
22) 18720806976
23) 2726
24) 2780
25) 14
26) 19
27) 27
28) 7
29) 43
30) 50
31) 127
32) 82
33) 41,85
34) 47,80
35) 61,85
36) 22,91
37) 0,31
38) 0,4
39) 0,9
40) 0,03
41) 0,0027
42) 0,0005
43) 0,049
44) 0,000068 .
45) 0,4444 ....
46) 0,69444 ....
47) $\frac{5}{7}$
48) $\frac{6}{13}$
49) $\frac{5}{24}$
50) $\frac{7}{129}$
51) $\frac{11}{995}$
52) $\frac{3}{1729}$
53) $3\frac{2}{3}$
54) $5\frac{7}{9}$
55) $21\frac{11}{13}$
56) $12\frac{21}{25}$
57) $7\frac{13}{15}$
58) $131\frac{7}{11}$
59) $9a^2+24ab+48ac+16b^2+64bc+64c^2$
60) $16a^2-48ab-24ac+56ad+36b^2+36bc-84bd+9c^2-42cd+49d^2$
61) $9a^2c^2+24abc+6ac^2d+48ac+16b^2+8bcd+64b+c^2d^2+16cd+64$
62) $9a^2d^2-24abcd^2+36ad^2+16b^2c^2d^2-48bcd^2+36d^2$
63) $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$
64) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
65) $\frac{4}{9}a^2+\frac{16}{15}ab+\frac{16}{25}b^2$
66) $\frac{1}{9}x^2y^2+\frac{1}{3}xzy^2-\frac{1}{6}x^2yz+\frac{1}{4}y^2z^2-\frac{1}{4}xyz^2+\frac{1}{16}z^2x^2$

Es sollen die Kubikwurzeln berechnet werden (und zwar bei den ersten 10 Aufgaben durch Zerlegung der Zahlen in ihre Faktoren) zu:

67) 32768
68) 110592
69) 91125
70) 157464
71) 373248
72) 970299
73) 2097152
74) 1771561
75) 4741632
76) 78888024
77) 4301
78) 51
79) 2966
80) 2,976
81) 0,056
82) 0,001581
83) 0,08 ....
84) $\frac{5}{11}$
85) $\frac{7}{17}$
86) $\frac{5}{48}$
87) $8\frac{1}{19}$
88) $27\frac{1}{4}$
89) 0,296296296 ....
90) 0,037037037 ....

Auflösungen.

1) 82; 2) 87; 3) 93; 4) 99; 5) 111; 6) 119; 7) 199; 8) 281; 9) 349; 10) 525; 11) 549; 12) 646; 13) 846; 14) 914; 15) 949; 16) 976; 17) 998; 18) 4567; 19) 12368; 20) 10074; 21) 27365; 22) 136824; 23) 52,211109 ....; 24) 52,725705 ....; 25) 3,741657 ....; 26) 4,358898 ....; 27) 5,196152 ....; 28) 2,645751 ....; 29) 6,557438 ....; 30) 7,071067 ....; 31) 11,269427 ....; 32) 9,055385 ....; 33) 6,469157 ....; 34) 6,913754 ....; 35) 7,864477 ....; 36) 4,78643 ....; 37) 0,556776 ....; 38) 0,632455 ....; 39) 0,948683 ....; 40) 0,173205 ....; 41) 0,051961 ....; 42) 0,022360 ....; 43) 0,221359 ....; 44) 0,008246 ....; 45) $\frac{2}{3}$; 46) $\frac{5}{6}$; 47) 0,84515 ....; 48) 0,67936 ....; 49) 0,45643 ....; 50) 0,23294 ....; 51) 0,10514 ....; 52) 0,041654 ....; 53) 1,91485 ....; 54) 2,40370 ....; 55) 4,67399 ....; 56) 3,5833 ....; 57) 2,8047 ....; 58) 11,473 ....; 59) $3a+4b+8c$; 60) $4a-6b-3c+7d$; 61) $3ac+4b+cd+8$; 62) $3ad-4bcd+6d$; 63) $x^2-2xy+y^2$; 64) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

65) $\frac{2}{3}a+\frac{4}{5}b$; 66) $\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}yz-\frac{1}{4}xz$; 67) 32; 68) 48; 69) 45; 70) 54; 71) 72; 72) 99; 73) 128; 74) 121; 75) 168; 76) 924; 77) 16,26259 ....; 78) 3,70842 ....; 79) 14,3678 ....; 80) 1,43839 ....; 81) 0,38258 ....; 82) 0,116495 ....; 83) 0,430886 ....; 84) 0,76888 ....; 85) 0,743960 ....; 86) 0,47051 ....; 87) 2,0043 ....; 88) 3,0092 ....; 89) $\frac{2}{3}$; 90) $\frac{1}{3}$.

Viertes Capitel.

Allgemeine Ungleichungen. Proportionen.

A. Allgemeine Ungleichungen.

§. 112. Erklärung.

Die Ungleichung $a > b$ heißt allgemein, wenn a und b positive ganze oder gebrochene Zahlen vorstellen.

Ist $a > b$, so folgt $a = b + x$ (wo x ebenfalls eine positive ganze oder gebrochene Zahl bedeutet).

Ist $a = b + x$, so folgt $a > x$ und $a > b$.

§. 113. Lehrsätze.

1) Ist $a > b$ und $b = c$, so folgt $a > c$.
2) Ist $a > b$ und $b > c$, „ „ $a > c$.
3) Ist $a < b$ und $b < c$, „ „ $a < c$.
4) Ist $a < b$ und $b = c$, „ „ $a < c$.
5) Ist $a > b$, so folgt $a + m > b + m$.
6) „ „ „ „ $a - m > b - m$.
7) „ „ „ „ $m - a < m - b$.

Die Beweise ergeben sich von selbst, wenn man $a = b + x$ setzt.

§. 114. Zusatz.

Nach 7) des vorigen Paragraphen ergiebt sich:

Ist $a > b$, so folgt $0 - a < 0 - b$

oder $-a < -b$.

§. 115. Lehrsätze.

1) Ist $a > b$ und $c > d$, so folgt $a + c > b + d$.

2) . . . . . $a - d > b - c$.

3) Ist $a + b = c + d$ und $a > c$, so folgt $b > d$.

5) Ist $a - b = c - d$ und $a > c$, so folgt $b > d$.

Beweis zu 1) Es ist $a = b + x$

$$c = d + y$$

$$\text{also } (a+c) = (b+d) + (x+y)$$

$$\text{und } a + c > b + d.$$

Die übrigen Beweise werden ebenso geführt.

§. 116. Zusatz.

Alle diese Sätze bleiben richtig, sobald man negative Zahlen einführt, mit Ausnahme der Erklärung: Ist $a = b + x$, so folgt $a > b$ und $a > x$.

Sind a und b negativ, aber x positiv, so ist $a < x$;

sind a, b und x negativ, so folgt $a < b$, $a < x$;

ist a positiv, b negativ, so folgt $a < x$.

Die übrigen Sätze sind hingegen richtig für jeden Werth der einzelnen Buchstaben.

§. 117. Lehrsätze.

1) Ist $a > b$, so folgt $am > bm$.

2) Ist $a > b$, so folgt $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

3) Ist $a > b$, so folgt $\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$.

Die Beweise für 1 und 2 ergeben sich leicht, wenn man $a = b + x$ setzt.

Beweis zu 3. Es ist $\frac{m}{a} = \frac{mb}{ab}$

$$\frac{m}{b} = \frac{ma}{ba}$$

Da nun $a > b$, also nach 1 auch $am > bm$ ist, so folgt, daß $\frac{am}{ab} > \frac{bm}{ab}$ oder $\frac{m}{b} > \frac{m}{a}$.

Anm. Diese drei Sätze sind nur gültig für positive Zahlen.

Ist $5 > 3$, so folgt $5 . 4 > 3 . 4$,
daher $-5 . 4 < -3 . 4$
oder $5 . (-4) < 3 . (-4)$.

B. Proportionen.

§. 118. Erklärung.

Werden zwei Zahlen (benannte oder unbenannte), welche ungleiche Größe haben, mit einander verglichen, so läßt sich die Verschiedenheit der Größe auf zweifache Art angeben. Man kann z. B. sagen, 12 ist um 9 Einheiten größer als 3, oder 12 ist 4 mal so groß als 3. Die Zahl 9 nennt man den Unterschied $(12 - 3)$, die Zahl 4 das Verhältniß $(12 : 3)$ von 12 und 3.

§. 119. Erklärung.

Da viele Paare von Zahlen entweder denselben Unterschied oder dasselbe Verhältniß haben, so kann man leicht eine Gleichung zwischen zwei Differenzen oder zwischen zwei Quotienten erhalten.

Man hat alsdann:

1) $a - b = c - d$ Beispiel: $7 - 4 = 9 - 6$;

2) $a : b = c : d$ " $6 : 2 = 15 : 5$.

Die Gleichung 1 nennt man eine arithmetische, die Gleichung 2 eine geometrische Proportion. Letztere spricht man aus: a verhält sich zu b, wie c zu d, oder a dividirt durch b ist gleich c dividirt durch d. Beides ist dasselbe, weil das Verhältniß zweier Zahlen dadurch gefunden wird, daß man mit der einen in die andere dividirt.

a und d nennt man in beiden Proportionen die äußern, b und c die innern Glieder.

§. 120. Erklärung.

Addirt man in 1) des vor. §. auf beiden Seiten $b + d$, so erhält man

$$a + d = b + c,$$

d. h. bei einer arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der innern.

Multiplicirt man in 2) des vor. §. auf beiden Seiten mit bd, so erhält man

$$a . d = b . c,$$

d. h. bei einer geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern.

§. 121. Zusatz.

Aus den beiden Gleichungen

$$a + d = b + c$$
$$a \cdot d = b \cdot c$$

kann man rückwärts durch Subtrahiren oder Dividiren wieder die Gestalt der Proportion herstellen. Je nachdem man $c + d$ oder $a + b$ oder $c + a$ subtrahirt, und im andern Falle mit cd oder ab oder ca dividirt, erhält man:

1) $a - c = b - d$
2) $d - b = c - a$
3) $b - a = d - c$
4) $a : c = b : d$
5) $d : b = c : a$
6) $b : a = d : c$.

Man kann also bei jeder Proportion die innern Glieder vertauschen, ebenso die äußern, und kann schließlich jede Seite in sich umkehren, welches letztere sich indeß schon aus dem Begriff der Proportion ergiebt.

§. 122. Zusatz.

Ist in einer Proportion eins der vier Glieder unbekannt, so erhält man es leicht mit Hülfe der drei übrigen.

Ist $a - x = c - d$, so erhält man

$$a + d = x + c,$$
$$a + d - c = x.$$

Ist $a : x = c : d$, so erhält man

$$a \cdot d = x \cdot c,$$
$$\frac{ad}{c} = x.$$

Sind die zwei innern Glieder der Proportion gleich groß, so heißt die Proportion stetig. Das Auffinden der unbekannten Glieder geschieht auf dieselbe Art.

Ist $a - x = x - b$, so ist

$$a + b = 2x,$$
$$\frac{a + b}{2} = x.$$

x heißt das arithmetische Mittel zwischen a und b.

Ist $a : x = x : b$, so ist

$$ab = x^2,$$
$$\sqrt[2]{ab} = x.$$

x heißt das geometrische Mittel zwischen a und b.

§. 123. Lehrsätze.

1) Ist $a : b = c : d$, so folgt $(a \mp b) : b = (c \mp d) : d$.

2) . . . . . $(a \mp mb) : b = (c \mp md) : d$.

Beweis zu 1. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a}{b} \mp 1 = \frac{c}{d} \mp 1$ oder $\frac{a \mp b}{b} = \frac{c \mp d}{d}$.

Der Beweis zu 2 wird ebenso geführt.

3) Ist $a : b = c : d$, so folgt

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Beweis. Ist $a : b = c : d$, so folgt aus 1:

$$(a + b) : (c + d) = b : d$$

und $(a - b) : (c - d) = b : d$,

also $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - b)$

oder $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$.

4) Ist $a : b = c : d = e : f$, so folgt

$$(a + c + e) : (b + d + f) = a : b = c : d = e : f.$$

Beweis. Aus $a : b = c : d$ folgt $a : c = b : d$ und $(a + c) : c = (b + d) : d$ oder $(a + c) : (b + d) = c : d = e : f$.

Aus $(a + c) : (b + d) = e : f$ folgt $(a + c) : e = (b + d) : f$ und $(a + c + e) : e = (b + d + f) : f$ oder $(a + c + e) : (b + d + f) = e : f = a : b = c : d$.

§. 124. Zusatz.

Läßt sich zwischen zwei Zahlen das Verhältniß nicht genau bestimmen, so nennt man sie incommensurabel. 1 und $\sqrt{2}$ sind demnach incommensurabel. Will man das Verhältniß annähernd bestimmen, so giebt man die Gränzen an, zwischen welchen dasselbe liegt.

Da $\sqrt{2} = 1{,}41424 \ldots$ ist, so liegt das Verhältniß von $1 : \sqrt{2}$ zwischen $1 : 1{,}41424$ und $1 : 1{,}41425$; will man noch näher an einander liegende Gränzen haben, so berechnet man noch einige Decimalstellen für die Wurzel.

§. 125. Erklärung.

Sind die Glieder einer Proportion benannte Zahlen, so nennt man diese Proportion eine Größenproportion. Bei der arithmetischen Größenproportion müssen alle vier Glieder gleich benannt sein, bei der geometrischen brauchen sie jedoch nur paarweise gleich benannt zu sein.

1) Arithm. Prop. $aA - bA = cA - dA$

2) Geometr. Prop. 1) $aA : bA = cA : dA$

2) $aA : bA = c : d$

3) $aA : bA = cB : dB$

oder in Zahlen: 6 Thlr. : 8 Thlr. = 3 Thlr. : 4 Thlr.

6 Thlr. : 8 Thlr. = 3 : 4

6 Thlr. : 8 Thlr. = 3 Pfd. : 4 Pfd.

§. 126. Erklärung.

Die eben angeführten Proportionen können nur richtig sein, wenn dieselben Proportionen in unbenannten Zahlen richtig sind.

Ist z. B. $aA - bA = cA - dA$, oder $aA : bA = cA : dA$,

so muß auch $a - b = c - d$, oder $a : b = c : d$ sein.

Hierin liegt ein Mittel, um jedes fehlende Glied einer Größenproportion aus den drei übrigen zu bestimmen.

Ist z. B. $aA : bA = cB : xB$, so ist auch

$a : b = c : x$ und

$$x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

§. 127. Zusatz.

Das fehlende Glied einer geometrischen Größenproportion zu bestimmen, ist die Aufgabe der Regel de tri. Die Proportion entsteht dadurch, daß z. B. verschiedene Mengen derselben Waare sich ebenso verhalten müssen, wie ihre Preise.

Hat man z. B. die Aufgabe: 6 Pfd. kosten 18 Thlr., was kosten 13 Pfd., so erhält man die Proportion:

6 Pfd. : 13 Pfd. = 18 Thlr. : x Thlr.

oder 6 : 13 = 18 : x

oder 1 : 13 = 3 : x

x = 39.

Verwechselt man in obiger Proportion die innern Glieder, so erhält man: 6 Pfd. : 18 Thlr. = 13 Pfd. : 39 Thlr., d. h. das Verhältniß der Waarenmenge zum Preise ist in beiden Fällen dasselbe.

Fünftes Capitel.

Algebraische Gleichungen.

§. 128. Erklärung.

Durch eine Gleichung wird entweder angezeigt, daß man bei irgend einer Operation auf verschiedene Art dasselbe Resultat erhalten könne, oder daß zwei aus verschiedenen Zahlen zusammengesetzte Ausdrücke gleiche Größe haben. Die Gleichungen ersterer Art nennt man *analytische Gleichungen* oder *Formeln*, die Gleichungen letzterer Art hingegen *algebraische Gleichungen* oder *Bestimmungsgleichungen*.

Es ist also $(a + b) - c = (a - c) + b$ eine analytische,

$a + b = c$ eine algebraische Gleichung.

§. 129. Erklärung.

Eine Formel bleibt richtig, wenn man statt der Buchstaben beliebige Zahlen setzt; eine algebraische Gleichung hingegen ist nur für bestimmte Zahlenwerthe richtig.

Ist z. B. in der Gleichung $a + b = c$

$$a = 4, \quad c = 6,$$

so muß nothwendig b gleich 2 sein, denn die Gleichung wird falsch, sobald man für b einen andern Werth setzt. Setzt man für b den richtigen Werth 2 in die Gleichung, so erhält man $6 = 6$, was dasselbe sagt, wie $a = a$ oder $0 = 0$. Eine Gleichung dieser Art heißt *identisch*.

§. 130. Erklärung.

Wenn in einer algebraischen Gleichung sämmtliche Buchstaben mit Ausnahme eines einzigen bestimmte Zahlen vorstellen, so giebt es eine oder mehrere Zahlen, welche an Stelle jenes Buchstaben gesetzt die Gleichung zu einer identischen machen. Das Aufsuchen dieser Zahlen nennt man *Auflösen der Gleichung*. Die unbekannten Zahlen bezeichnet man gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z ....), die bekannten durch die ersten Buchstaben (a, b, c ....).

§. 131. Erklärung.

Die algebraischen Gleichungen theilt man ein in *algebraische Gleichungen im engern Sinne* und in *transcendente Glei-*

chungen. Bei letztern ist der Exponent einer Potenz oder Wurzel die unbekannte Größe.

Die algebraischen Gleichungen im engern Sinne zerfallen in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grades.

Die Form für die Gleichungen des ersten Grades ist $ax + b = c$, für die des zweiten Grades $ax^2 + bx + c = d$ und für die des dritten Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = e$.

§. 132. Erklärung.

Haben eine oder beide Seiten einer Gleichung die Form von algebraischen Summen, so kann man ein beliebiges Glied der einen Seite weglassen und mit verändertem Zeichen auf die andere Seite setzen (transponiren).

Der Grund liegt darin, daß man auf beiden Seiten Gleiches entweder wegnimmt oder hinzufügt.

Durch Transponiren sämmtlicher Glieder erhält man dieselbe Gleichung wieder, aber mit umgeänderten Zeichen sämmtlicher Glieder.

Ferner kann man beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren, oder mit derselben Zahl potenziren.

Alle diese Umänderungen beruhen auf den Grundsätzen:

Ist $a = b$, so folgt $a + m = b + m$,

$a - m = b - m$,

$a \cdot m = b \cdot m$,

$a : m = b : m$.

$a^m = b^m$

A. Gleichungen des ersten Grades mit einem Unbekannten.

§. 133. Erklärung.

Die einfachste Form für die Gleichungen des ersten Grades ist

$$ax = b.$$

Dividirt man beide Seiten durch a, so erhält man

$$x = \frac{b}{a},$$

womit also die Gleichung gelöst ist.

§. 134. Zusatz.

Da nicht jede Gleichung von vorn herein diese Form hat, so ist gewöhnlich erst eine Umformung nöthig. Enthält die Gleichung keine Quotienten, so lassen sich beide Seiten der Gleichung auf die Form der algebraischen Summen mit einfachen Gliedern bringen. Alsdann transponirt man die einzelnen Glieder so, daß sämmtliche Glieder, welche den Faktor x enthalten, auf der einen Seite stehen, die übrigen auf der andern Seite. Durch einfache Addition oder Subtraction erhält man schließlich die Form $ax = b$.

Beispiele.

I. $3x + 7 - 5x + 9 - 21 = 2x - 12 - 10x + 13.$

Durch Transponiren erhält man:

$$3x - 5x - 2x + 10x = -12 + 13 - 7 - 9 + 21.$$

Durch Addition der einzelnen Glieder geht die Gleichung über in:

$$6x = 6,$$

und hieraus folgt: $x = 1.$

II. $6x + 7 - 4x + (9x - 5) - (3x + 7) = 8 - (4x + 5) + 16.$

Nach Auflösen der Klammern erhält man:

$$6x + 7 - 4x + 9x - 5 - 3x - 7 = 8 - 4x - 5 + 16.$$

Durch Transponiren der Glieder erhält man:

$$6x - 4x + 9x - 3x + 4x = 8 - 5 + 16 - 7 + 5 + 7$$

$$\text{oder } 12x = 24,$$

$$x = 2.$$

III. $x - \big[3x - 2(4x - 5) + 6x\big] + \big[9x - (6 - 2x)\big] \cdot 4 =$
$= 14 - \big[8x - 3 \cdot (4x + 5)\big] + 17,$

$x - (3x - 8x + 10 + 6x) + (36x - 24 + 8x) =$
$= 14 - (8x - 12x - 15) + 17,$

$x - 3x + 8x - 10 - 6x + 36x - 24 + 8x =$
$= 14 - 8x + 12x + 15 + 17,$

$x - 3x + 8x - 6x + 36x + 8x + 8x - 12x =$
$= 14 + 15 + 17 + 24 + 10.$

Es ist daher $40x = 80,$

und $x = 2.$

§. 135. Zusatz.

Enthält die Gleichung Divisoren, welche der Rechnung hinderlich sind, so entfernt man dieselben, indem man sämmtliche Glieder der Gleichung mit dem Generalnenner multiplicirt. Besteht der Dividend eines Bruches aus mehreren Summanden, so darf man nicht vergessen, dieselben in Klammern einzuschließen, sobald der Nenner entfernt wird.

Beispiele.

I. $\frac{x+4}{3} - \frac{2x+5}{4} = \frac{6x+3}{2} + \frac{1}{6}$.

Die Gleichung wird mit dem Generalnenner 12 multiplicirt.

Alsdann ist $\frac{x+4}{3} \cdot 12 - \frac{2x+5}{4} \cdot 12 = \frac{6x+3}{2} \cdot 12 + \frac{1}{6} 12$,

oder $(x+4) \cdot 4 - (2x+5) \cdot 3 = (6x+3) \cdot 6 + 2$,

$4x + 16 - 6x - 15 = 36x + 18 + 2$.

Hieraus folgt $4x - 6x - 36x = 18 + 2 - 16 + 15$,

$-38x = 19$,

$38x = -19$,

$x = -\frac{1}{2}$.

II. $\frac{3x+7-(4x-5)+6x}{5x-8-(x-5)} = 3$,

$\frac{3x+7-4x+5+6x}{5x-8-x+5} = 3$,

$\frac{5x+12}{4x-3} = 3$,

$5x + 12 = 12x - 9$,

$5x - 12x = -9 - 12$,

$-7x = -21$,

$x = 3$.

§. 136. Zusatz.

Sind die bekannten Zahlen nicht in Ziffern, sondern in Buchstaben gegeben, so verfährt man auf dieselbe Art.

Beispiele.

I. $ax + (b - x)\,c - (d - e)\,x = f + (g - h)\,x,$

$ax + bc - xc - dx + ex = f + gx - hx,$

$ax - cx - dx + ex - gx + hx = f - bc,$

$x\,(a - c - d + e - g + h) = f - bc,$

$$x = \frac{f - bc}{a - c - d + e - g + h}.$$

II. $$\frac{x}{a} + \frac{b - x}{c} + d = \frac{f}{a} - \frac{g - x}{b}.$$

Der Generalnenner ist abc. Wird mit demselben jedes Glied multiplicirt, so ergiebt sich:

$$\frac{x}{a} \cdot abc + \frac{b - x}{c} \cdot abc + d \cdot abc = \frac{f}{a} \cdot abc - \frac{g - x}{b} \cdot abc$$

oder $xbc + bab - xab + dabc = fbc - gac + xac;$

hieraus folgt $xbc - xab - xac = fbc - gac - bab - dacb,$

$x\,(bc - ab - ac) = fbc - gac - bab - dacb,$

$$x = \frac{fbc - gac - bab - dacb}{bc - ab - ac}.$$

III. $$\frac{a}{x} + \frac{b - c}{d} = \frac{f}{x} + \frac{g}{x};$$

$$\frac{a}{x} \cdot xd + \frac{b - c}{d} \cdot xd = \frac{f}{x} \cdot xd + \frac{g}{x} \cdot xd,$$

$ad + bx - cx = fd + gd;$

$x\,(b - c) = fd + gd - ad,$

$$x = \frac{fd + gd - ad}{b - c}.$$

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $3x + 5 - 12x = -22$
2) $8x + 9 + 5x - 11 - 3x = 9x + 2$
3) $3x - 4 = 12x - 67$
4) $15x + 7 - 23x = 135x + 1 - x$
5) $35x + 13 + 2 = 60x$
6) $x + 2x - 5x + 4x - 1 = -3x$
7) $3x - 12\,(x + 1) = -12$
8) $(7x - 6) \cdot 6 = (2x + 20)\,2$
9) $-6\,(x + 9) + (x + 9)\,16 = 0$
10) $5x - (2x + 3) - 2 - 8x = -6$

11) $24x+2+6(x-4)+28-21x-6=-5$

12) $20x-2(x+7)-6=(x+3)9+7$

13) $(36x+24)3-(5x-36)-8=171x+32$

14) $7x+4-[3-(2x+7)]=8-(4-11x)$

15) $3x-(5-2x)-(15+8x)=3-(6x+2)+[1-(2x+2)]$

16) $2(x+7)(3x-4)=6x(x+6)-[9(2x+1)-1]$

17) $3(2x-3)(4x-7)+11(x+2)=6x(10-4x)-(2-8x)$

18) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+3=\frac{x}{6}+x-4$

19) $\frac{6x}{7}+3-\frac{x}{2}=\frac{x}{3}+\frac{x-17}{3}$

20) $\frac{7x+3}{2}-\frac{7-3x}{2}+\frac{6+8x}{7}-\frac{6x+1}{7}=4$

21) $\frac{8x-12}{5}+\frac{3x-7}{4}=2x-1$

22) $\frac{x-3}{4}-\frac{7-x}{2}+\frac{8-x}{2}=1\frac{1}{2}$

23) $\frac{12x-8}{5}-\frac{3x-11}{2}-\frac{7x-30}{4}-8=0$

24) $\frac{13x-7}{4}-\frac{(6x-3).5}{7}=\left(\frac{x-3}{6}-\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{4}$

25) $\frac{13x-15}{4}+(3-x)(8x+7)+24x.\frac{x-4}{3}+\frac{4x}{3}+14=0$

26) $\left(\frac{x+1}{3}-\frac{x+1}{2}+\frac{2x}{4}\right)\frac{5x}{4}=x^2-\frac{15x}{4}$

27) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-1+\frac{1}{3x}=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{5x}$

28) $\frac{1}{5x}-3+\frac{7}{4x}=\frac{19}{20x}$

29) $(x+3):(x-7)=(1-3):2$

30) $(7x-2):(5x+8)=\left(3x-6.\frac{1+x}{3}-x\right):(-3)$

31) $\left[6x-\left(8-\frac{2x+3}{5}\right)\right]:\left[11x-\left(7-\frac{3x+3}{7}\right)\right]=$
$=[(x+1)(x-1)-x^2]:(-2)$

32) $[(8x+5)(2x-9)]:\frac{(2x-7)(4x-5)}{2}=2:1$

33) $(x+3):5=\left(2x-\frac{5x+1}{4}+x-6\right):3$

34) $5{,}5x-\frac{x}{2}+4{,}263=8x-1{,}737$

35) $\frac{5{,}072}{6}x+\frac{x}{2}=\frac{6{,}25}{4}x-1{,}303$

36) $0{,}2+x-0{,}34x=3{,}25x-5{,}007$.

37) $7{,}6988-\frac{3}{4}x+18{,}1x=\frac{x}{10}+5x+7834{,}5035$

38) $\sqrt{x+7}=3$

39) $\sqrt{3x-8}=5$

40) $\sqrt{5x+11}:\sqrt{5x-9}=3:2$

41) $\sqrt{x^2+9}=x+1$

42) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x+12}-2$

43) $\sqrt{8x+1}=2\,.\sqrt{2x+3}-1$

44) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-2}=7$

45) $\sqrt{3+4x}-\sqrt{4\frac{1}{4}+4x}=-\frac{1}{2}$

46) $ax+bx-f=gx+hx-d$

47) $(a-x)\,c-(b+x)\,(d-e)=e\,(b-x)$

48) $xa+x+3ab-bx=-3b+abx$

49) $\frac{4ab+cx}{d}=xa+\frac{b}{c}$

50) $\frac{acd}{bx}=ac+\frac{d}{x}-1$

51) $\frac{a\,(b^2-x^2)}{bx}=ab-\frac{ax}{b}$

52) $(a+x)\,(b+x)-a\,(b+c)=\frac{a^2\,c}{b}+x^2$

53) $\frac{ax}{2a-b}+\frac{5b\,(2a-b)}{b^2-a^2}-\frac{5ab}{3a-b}=\frac{(3a^2-b^2)\,x}{2ab\,(b-a)}-\frac{(3a^2+b^2)\,x}{2ab\,(a+b)}$

54) $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2\,b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)\,b^2\,x}{a\,(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$

55) $3a-\frac{2b-x}{x}+\frac{d}{g}=\frac{e}{x}$

56) $\frac{bx}{m} - \frac{ax}{n} + \frac{ax}{m} - \frac{bx}{n} - ac = 1$

57) $\frac{8x}{3} + 3 - \frac{n+p-x}{d} - \frac{x+2}{3} = d - \frac{x}{3} + \frac{5x}{d}$

58) $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$

59) $\frac{3a-5x}{a-c} + \frac{2a-x}{d} = \frac{a+f}{a-c} - dx$

60) $3a^2b - (a+3b)^2x = 6b^2x - 5(2a-b)(2a-3b) \cdot x$

61) $\frac{c-2x}{3d} + 2 - \frac{5d^2}{2c^2} = \frac{x}{d} + \frac{d(x-d)}{c^2}$

62) $\sqrt{x+a} - b = \sqrt{x+c}$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

63) 600 Thlr. sollen so unter vier Personen getheilt werden, daß die erste halb so viel wie die zweite, diese halb so viel wie die dritte, und diese halb so viel wie die vierte erhalte. Wie viel wird jede erhalten?

64) Von drei neben einander liegenden Gärten ist der erste um 200 Quadratruthen kleiner als der zweite und dritte zusammen genommen, der zweite aber um 100 Quadratruthen größer als der dritte. Wie groß ist jeder der drei Gärten, wenn alle drei zusammen 800 Quadratruthen groß sind?

65) 1300 Thlr. sollen unter drei Personen getheilt werden; die erste soll $1\frac{1}{2}$ mal mehr bekommen als die zweite, und diese 2 mal mehr als die dritte. Wie viel erhält jede?

66) Drei Zahlen sollen sich verhalten wie m : n : v und ihre Summe soll gleich a sein. Welches sind diese Zahlen?

67) Eine Zahl soll in drei Theile zerlegt werden, so daß sich der erste Theil zum zweiten wie m : n, der zweite zum dritten wie v : w verhalte. Welche Theile sind es?

68) Ein Spieler verlor in 3 Tagen seine ganze Baarschaft bis auf 2 Thlr., am ersten Tage nämlich $\frac{7}{12}$ seines Geldes, am zweiten $\frac{3}{5}$ des Restes und am dritten $\frac{6}{7}$ des abermaligen Restes. Wie viel hatte er anfangs?

69) Bei welcher Zahl ist der 6te Theil um 4 größer als der 8te Theil?

70) Bei welcher Zahl ist der ate Theil um m größer, als der bte Theil?

71) Welche Zahl muß man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{5}{9}$ addiren, wenn derselbe gleich $\frac{2}{3}$ werden soll?

72) Welche Zahl muß man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addiren, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll?

73) Welche Zahl muß man zum Zähler des Bruches $\frac{59}{101}$ addiren und vom Nenner desselben subtrahiren, wenn man den Bruch $\frac{2}{3}$ erhalten will?

74) Welche Zahl muß man zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addiren und vom Nenner desselben subtrahiren, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll?

75) Welche Zahl giebt, wenn sie zu 6 addirt wird, dasselbe, als wenn sie mit 6 multiplicirt wird?

76) Welche Zahl giebt, wenn sie zu a addirt wird, dasselbe, als wenn sie mit a multiplicirt wird?

77) Welche Zahl giebt, wenn sie von 6 subtrahirt wird, dasselbe, als wenn sie mit 6 multiplicirt wird?

78) Welche Zahl giebt, wenn sie von a subtrahirt wird, dasselbe, als wenn sie mit a multiplicirt wird?

79) Ein Kaufmann bezahlt zwei Rechnungen, die eine mit $\frac{1}{3}$, die andere mit $\frac{1}{5}$ seiner Kasse, erhält aber gleichzeitig eine Rechnung bezahlt, deren Betrag gleich dem vierten Theil der Kasse ist. Diese verringert sich hierbei im Ganzen um 850 Thlr. Wie groß war dieselbe?

80) Wie groß war hingegen die Kasse, wenn er die erste Rechnung mit $\frac{1}{5}$ derselben, die zweite mit $\frac{1}{3}$ des Restes bezahlte, durch die einlaufende Rechnung der Kassenbestand sich um $\frac{3}{4}$ vermehrte und nun bloß noch 400 Thlr. am anfänglichen Bestande fehlten?

81) Ein Vater ist 40 Jahre alt, sein Sohn 12 Jahr. Nach wie viel Jahren wird der Vater dreimal so alt sein, als der Sohn?

82) Ein Vater ist 60 Jahr alt, sein Sohn 32. Vor wie viel Jahren war der Vater achtmal so alt, als der Sohn?

83) Ein Vater ist viermal so alt, als sein Sohn, und war 8 Jahre vorher zehnmal so alt, als derselbe. Wie alt sind jetzt beide?

84) Ein Vater ist 30 Jahre älter als sein Sohn. Wie alt sind beide, wenn zugleich der Vater sechsmal so alt ist, als der Sohn?

85) Ein Vater ist bmal so alt, als sein Sohn, und wird nach m Jahren emal so alt sein, wie derselbe. Wie alt sind beide?

86) Jemand verspielt von seinem Gelde den dritten Theil und 1 Thlr., ein anderes Mal vom Reste den siebenten Theil und 2 Thlr. Hierauf hat er bloß noch $\frac{8}{15}$ von seinem anfänglichen Vermögen. Wie groß war dasselbe?

87) Ein Bote geht den fünften Theil seines Weges und fährt hierauf 4 Meilen; den andern Tag geht er den vierten Theil des noch übrigen Weges und fährt wieder 5 Meilen. Wenn er nun in diesen beiden Tagen eben so viel Meilen gegangen, als gefahren ist, wie viel Meilen hat er alsdann noch zurückzulegen?

88) Eine Summe soll so unter drei Personen getheilt werden, daß die erste den halben Theil und 50 Thlr., die zweite vom Reste den dritten Theil und noch 50 Thlr., die dritte die noch übrigen 150 Thlr. Rest erhalte. Wie groß war die Summe?

89) Eine Erbschaft soll so getheilt werden, daß der erste Erbe den vierten Theil und noch 100 Thlr., der zweite vom Reste den vierten Theil und noch 200 Thlr., der dritte wieder vom Reste den vierten Theil und noch 300 Thlr. erhalten soll, und nach demselben Verhältniß die übrigen Erben. Wenn nun doch alle gleichviel erhalten, wie groß war alsdann die Erbschaft?

90) Wenn in voriger Aufgabe der erste Erbe den aten Theil und noch b Thlr., der zweite vom Reste wieder den aten Theil und noch 2 b Thlr. erhält und nach Verhältniß die übrigen, und doch zuletzt alle gleichviel erhalten, wie groß war alsdann die Erbschaft, und wie viel Erben waren es?

91) Wie groß ist hingegen die Erbschaft, wenn der erste Erbe zunächst 100 Thlr. und vom Reste den fünften Theil, der zweite zunächst 200 Thlr. und vom Reste den fünften Theil erhält u. s. w. und doch alle gleichviel erhalten?

92) Wie groß ist hingegen die Erbschaft, und wie viel Erben sind es, wenn der erste Erbe zunächst b Thlr. und dann vom Reste den aten Theil, der zweite zunächst 2 b Thlr. und dann vom Reste den aten Theil erhält u. s. w. und alle gleichviel erhalten?

93) 3050 Soldaten werden auf 90 Kähnen über einen Fluß gesetzt. Die einzelnen Kähne fassen theils 20, theils 45 Mann. Wie viel Kähne der größern Art waren vorhanden?

94) 193 Thlr. werden theils in Dukaten, theils in Friedrichsdoren bezahlt. Wenn nun der Dukaten zu $3^1/_6$ Thlr., der Friedrichsdor zu $5^2/_3$ Thlr. gerechnet wird und im Ganzen 42 Geldstücke ausgezahlt werden, wie viel Friedrichsdor wurden alsdann bezahlt?

95) 100 Stück Wildpret, Hasen und Rehe, werden mit 260 Thlr. bezahlt. Ein Reh wird dabei mit 4 Thlr., ein Hase mit $^1/_2$ Thlr. bezahlt. Wie viel Rehe waren darunter?

96) Ein Grundstück von 80 Morgen besteht zu drei Theilen aus Acker, zu zwei Theilen aus Garten. Nachdem einige Morgen Acker verkauft worden sind, verhält sich die Größe vom Garten zum Acker wie 8 : 11. Wie viel Morgen wurden verkauft?

97) Die Preise zweier Waaren verhalten sich wie 12 : 7. Würde aber von der bessern Sorte das Pfund um 1 Sgr. billiger gegeben, so verhielten sich die Preise wie 5 : 3. Wie viel kostete das Pfund der bessern Sorte?

98) Die Einwohnerzahlen dreier Städte verhielten sich sonst wie 2 : 4 : 5. Bei einer neuen Zählung ergab sich aber, daß die Einwohnerzahl der ersten Stadt um 300, die der zweiten um 700, und die der dritten um 1000 sich vermehrt, und daß die Gesammtbevölkerung dadurch um $^1/_{33}$ zugenommen hatte. Wie verhalten sich jetzt die Einwohnerzahlen?

99) Zu 18 Pfund einer Legirung aus Zinn und Blei, in der sich das Zinn zum Blei wie 5 : 4 verhält, werden einige Pfund einer zweiten Legirung, in welcher doppelt so viel Zinn wie Blei ist, gesetzt. Wenn sich nun hierauf Zinn und Blei wie 3 : 2 verhalten, wie viel Pfund der zweiten Legirung wurden alsdann zugesetzt?

100) Bei jedem Spiele wettete Jemand 4 Thlr. gegen 3 Thlr. Nach 12 Spielen hatte er 20 Thlr. verloren. Wie oft hatte er verloren?

101) In einer Abendgesellschaft ist der Beitrag zu jeder Versammlung 10 Sgr.; ein fehlendes Mitglied zahlt jedoch bloß 2 Sgr. Wenn nun ein Theilnehmer für 20 Versammlungen 5 Thlr. 10 Sgr. bezahlt, wie oft hat er alsdann gefehlt?

102) Ein Kaufmann übergab einem Fuhrmann eine Fracht 50 Meilen weit zu fahren unter der Bedingung, daß er bei richtiger Ablieferung derselben 40 Thlr. baar erhalten und ein ihm früher gegebener Vorschuß getilgt sein sollte. Der Fuhrmann brachte aber die Fracht nur 28 Meilen weit. Er erhielt daher die 40 Thlr. nicht und blieb noch auf den Vorschuß 4 Thlr. schuldig. Wie viel betrug der Vorschuß?

103) Von einem Kapitale steht der vierte Theil zu 3 %, der dritte Theil zu 4 % und der Rest zu 6 %. Wie groß war das Kapital, wenn es binnen 4 Jahren 550 Thlr. Zinsen brachte?

104) Welches Kapital beträgt mit seinen Zinsen nach m Jahren bei p % a Thlr.?

105) Wie groß muß das Kapital sein, bei welchem der mte Theil jährlich a Thlr. weniger Zinsen bringt, als der Rest, wenn zugleich das ganze Kapital zu p % steht?

106) Zwei Kapitalien betragen zusammen 8000 Thlr. Das eine steht zu 5 %, das andere zu 3 %, aber beide geben jährlich gleich viel Zinsen. Wie groß ist jedes?

107) Bei welchem Kapitale giebt die eine Hälfte, die zu 3 % steht, jährlich 600 Thlr. Zinsen weniger, als die andere Hälfte, die zu 4 % steht?

108) Wie groß muß das Kapital sein, bei welchem der mte Theil, der zu p % steht, jährlich a Thlr. mehr Zinsen bringt, als der Rest, welcher zu t % steht?

109) Zwei Kapitalien, welche zusammen a Thlr. betragen, bringen jährlich gleichviel Zinsen, obgleich das eine zu p %, das andere zu t % steht. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

110) Ein Kaufmann bezahlt das Pfund einer Sendung mit 7 Sgr. Von dieser Waare verderben ihm jedoch 20 Pfd. Da er aber das Pfund zu 8 Sgr. verkauft, so gewinnt er $11\frac{3}{7}$ Prozent. Wie viel Pfunde hatte er eingekauft?

111) Ein Fabrikant verkauft seine Waaren mit 20 % Rabatt. Um den wie vielsten Theil muß er den Preis seiner Waaren erhöhen, wenn er 25 % Rabatt geben und doch den nämlichen Preis erhalten will?

112) Wird das Pfund einer Waare mit 8 Sgr. bezahlt, so sind 12 % davon reiner Gewinn. Wird es aber mit $7\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt, so bleiben nach Abzug von 4 % immer noch 16 Sgr. Gewinn. Wie viel Pfunde waren es?

113) Ein Kapital von 1100 Thlr. mit den 10monatlichen Zinsen liefert die Pacht für 4 Grundstücke von gleichem Werthe auf 10 Monate. Ein Kapital von 1200 Thlr. würde mit den 15monatlichen Zinsen die Pacht für 5 Grundstücke von gleichem Werthe, wie die ersteren, auf 9 Monate liefern. Zu wie viel Prozent standen beide Kapitalien?

114) Ein Kaufmann vermehrte sein Vermögen jährlich um 20 Prozent, nahm aber alle Jahre 1000 Thlr. davon weg. Nach drei Jahren findet er, daß nach Abzug der gewöhnlichen 1000 Thlr. das Vermögen sich um 200 Thlr. über $\frac{3}{5}$ des angelegten Kapitals vermehrt habe. Wie groß war dasselbe?

115) Um die Kosten zu einer gemeinschaftlichen Reise aufzubringen, giebt jeder Theilnehmer zunächst 6 Thlr. Da aber noch 7 Thlr. fehlen, so giebt jeder Theilnehmer noch 1 Thlr. nach, wodurch ein Ueberschuß von 1 Thlr. entsteht. Wie viel Theilnehmer waren es und wie viel betrugen die Kosten?

116) Wird das Pfund einer Sendung mit 8 Sgr. bezahlt, so gewinnt der Kaufmann 12 Thlr. Wird es aber nur mit $7\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt, so verliert er 4 Thlr. Wie viel Pfund enthält die Sendung und wie viel kostet die ganze Sendung?

117) Ein Fuhrmann hat die Anfuhr einer bestimmten Anzahl Steine übernommen. Macht er täglich drei Fuhren und ladet dabei jedesmal gleichviel Steine auf, so sind nach 6tägigem Fahren die Steine fortgeschafft. Fährt er jedoch täglich viermal mit einem kleinern Wagen, der 100 Steine weniger faßt, als der erste, so könnte er in derselben Zeit 2400 Steine mehr fahren. Wie viel Steine hat er zu fahren und wie viel faßt jeder Wagen?

118) Eine Baumschule soll in Form eines Quadrats angelegt werden. Bei dem ersten Versuche bleiben jedoch 43 der vorhandenen Bäume übrig. Als nun die Seite des Quadrats um 1 vermehrt wurde, so fehlten 30 Bäume an der nöthigen Anzahl. Wie viel Bäume waren es?

119) Beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einer dreiziffrigen Quadratzahl war das Resultat um 1 zu klein und es blieb ein Rest von 33. Dies kam aber daher, weil die mittlere schlecht geschriebene Ziffer mit einer um 2 kleineren verwechselt worden war. Nach Abänderung dieses Fehlers ergab sich das richtige Resultat. Welches war die richtig geschriebene Zahl?

120) Als man aus dem Fenster eines Thurmes einen Stein herabfallen ließ, fiel derselbe genau nach einigen Sekunden auf einen 75 Fuß über der Erde befindlichen Vorsprung. Bei einem zweiten Versuche wurde der Vorsprung vermieden und der Stein brauchte nun eine Sekunde länger, um auf die Erde zu gelangen. Wie hoch war das erste Fenster über der Erde?

(Es ist hierbei angenommen, daß der Stein in einer Sekunde 15 Fuß, in 2 Sekunden $2^2 . 15$ Fuß, und in m Sekunden $m^2 . 15$ Fuß fällt.)

121) Zwei Freunde reisen einander entgegen. Der eine macht täglich 5, der andere täglich 4 Meilen. Nach wie viel Tagen treffen sie sich, wenn der Weg 81 Meilen beträgt?

122) Wie lange reisen dieselben, wenn der Weg 6 Meilen beträgt und der eine täglich m, der andere täglich n Meilen macht, und wie viel Meilen macht jeder?

123) Einem Wettrenner, der in der Sekunde 40 Fuß zurücklegte, folgte 12 Sekunden später ein anderer, der in der Sekunde 45 Fuß zurücklegte. Nach wie viel Sekunden wird der erste eingeholt sein?

124) Die eine von zwei Wasserröhren liefert stündlich 200 Quart, die andere 240 Quart. Wenn nun die erste 6 Stunden früher geöffnet wird als die zweite, wie lange wird die zweite dann fließen müssen, um 400 Quart mehr als die erste fortwährend thätige zu liefern?

125) Wenn die eine Röhre stündlich a Quart, die andere $a + b$ Quart liefert und die erste m Stunden früher geöffnet wird, wie viel Stunden muß dann die zweite fließen, um c Quart mehr als die erste fortwährend thätige zu liefern?

126) Wenn sich die Zeiger einer Uhr zwischen 5 und 6 decken, wie viel Uhr ist es alsdann genau?

127) Auf der Peripherie eines Kreises, welche p Fuß mißt, bewegen sich zwei Körper gleichzeitig. Der eine macht in der Sekunde c, der andere d Fuß. Wenn sie nun von demselben Punkt ausgehen und $d \angle c$ ist, nach welchen Zeiten geht dann der eine über den andern weg?

128) Nach welchen Zeiten geht aber der eine über den andern weg, wenn der sich langsamer bewegende dem andern um f Fuß voraus war?

129) Man soll die Größe dreier Weinfässer aus folgender Angabe bestimmen. Wenn man das erste leere Faß aus dem zweiten vollen Fasse füllt, so bleibt im zweiten nur $^2/_5$ des Weins zurück; füllt man das zweite leere Faß aus dem dritten vollen Fasse, so bleibt im dritten nur $^1/_4$ des Weins zurück; wollte man aber das dritte leere Faß aus dem ersten vollen Fasse füllen, so würden 50 Quart fehlen. Wie viel Quart hält jedes von diesen drei Fässern?

130) Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Größe. Füllt er das zweite leere Faß aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $^4/_7$ des Weins zurück; füllt er das dritte leere Faß aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $^1/_3$ des Weins zurück; füllt er das vierte leere Faß aus dem dritten vollen, so wird nur $^9/_{10}$ des vierten gefüllt;

wollte er aber das dritte und vierte leere Faß aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es blieben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

131) Aus zwei ungleichen Oeffnungen eines Behälters strömt das Wasser mit einer ungleichen Geschwindigkeit heraus. Man weiß, daß die Oeffnungen sich wie 5 : 13, die Geschwindigkeiten der Wasserströme aber wie 8 : 7 verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Oeffnung in einem gewissen Zeitraume 561 Kubikfuß Wasser mehr floß, als aus der andern? Wie viel Wasser gab nun jede Oeffnung in diesem Zeitraume?

132) Zwei Schreiber sind mit zwei verschiedenen Abschriften beschäftigt. Die Zeiten, in welchen beide einen Bogen ihrer Arbeit schreiben, verhalten sich wie 5 : 7, hingegen die Bezahlung für einen Bogen wie 10 : 7. Wenn nun der zweite schon 6 Bogen geschrieben hatte, ehe der erste anfing, wie viel Bogen wird dieser schreiben müssen, um eben so viel verdient zu haben, wie der zweite fortwährend thätige?

133) Bei zwei Fabrikanten verhalten sich die Preise derselben Waaren wie 8 : 11; die des ersteren nutzen sich jedoch $1^2/_3$ mal schneller ab, als die des andern. Wenn nun außerdem der zweite auf 11 Stück derselben Sorte das zwölfte umsonst giebt, der erste aber nicht, wie ist dann bei beiden das Verhältniß der Werthe für Waaren von gleichem Preise?

134) Zwei Körper, deren Massen sich wie 5 : 3 verhalten, werden durch zwei Kräfte in Bewegung gesetzt, deren Größe sich wie 11 : 7 verhält. Der erste Körper ist 6 Sekunden früher in Bewegung gesetzt worden. Nach wie viel Sekunden wird er von dem andern eingeholt werden, wenn nach der 24ten Sekunde die Geschwindigkeit desselben durch einen Stoß um $^1/_{35}$ vergrößert wird?

135) Zwei Couriere werden einander entgegengeschickt. Der eine würde den Weg in 12, der zweite in 10 Stunden machen. Nach welcher Zeit treffen sie sich?

136) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Die erste allein würde ihn in 2, die zweite in 4, die dritte in 6 Stunden füllen. In welcher Zeit füllen sie gemeinschaftlich den Behälter?

137) Aus einem vollen Wasserbehälter entnimmt eine Pumpe ihr Wasser und würde denselben in 4 Stunden entleeren, wenn er nicht frischen Zufluß aus einer anderen Röhre erhielte, die in 6 Stunden eben so viel Wasser liefert, als der volle Behälter enthält. Nach wie viel Stunden wird der volle Behälter bei gleichzeitiger Thätigkeit von Pumpe und Zuflußröhre entleert sein?

138) Drei Arbeiter arbeiten gemeinschaftlich an einer Arbeit. Der erste würde sie allein in a, der zweite in b, der dritte in c Tagen vollenden. Wann werden sie dieselbe bei gemeinschaftlicher Arbeit beenden?

Auflösungen.

1) $x = 3$; 2) $x = 4$; 3) $x = 7$; 4) $x = \frac{3}{71}$; 5) $x = \frac{3}{5}$; 6) $x = \frac{1}{5}$;

7) $x = 0$; 8) $x = 2$; 9) $x = -9$; 10) $x = \frac{1}{5}$; 11) $x = -\frac{5}{9}$;

12) $x = 6$; 13) $x = 1$; 14) $x = 2$; 15) $x = 4$; 16) $x = 3$; 17) $x = 1$;

18) $x = 12$; 19) $x = 28$; 20) $x = 1$; 21) $x = 9$; 22) $x = 7$; 23) $x = 4$;

24) $x=\frac{1}{2}$; 25) $x=3$; 26) $x=5$; 27) $x=2\frac{17}{60}$; 28) $x=\frac{1}{3}$;

29) $x=2$; 30) $x=2$; 31) $x=6$; 32) $x=5$; 33) $x=7$; 34) $x=2$;

35) $x=6$; 36) $x=2{,}010424\ldots$; 37) $x=638{,}92283\ldots$; 38) $x=2$;

39) $x=11$; 40) $x=5$; 41) $x=4$; 42) $x=13$; 43) $x=3$;

44) $x=5\frac{1}{2}$; 45) $x=-\frac{1}{2}$; 46) $x=\frac{f-d}{a+b-g-h}$;

47) $x=\frac{bd-ac}{2e-c-d}$; 48) $x=\frac{3b}{b-1}$; 49) $x=\frac{b(4ac-d)}{c(ad-c)}$;

50) $x=\frac{d(ac-b)}{b(ac-1)}$; 51) $x=1$; 52) $x=\frac{ac}{b}$; 53) $x=\frac{5b(2a-b)}{3a-b}$;

54) $x=\frac{ab}{a+b}$; 55) $x=\frac{g(e+2b)}{g(3a+1)+d}$; 56) $x=\frac{mn(ac+1)}{(a+b)(n-m)}$;

57) $x=\frac{(n+p)3+(3d-7)d}{(2d-3)4}$; 58) $x=\frac{c(a+d)(b-c)}{b(b-c)-a^2}$;

59) $x=\frac{d(f-2a)-2a(a-c)}{(a-c)(d^2-1)-5d}$; 60) $x=\frac{3ab}{46b-19a}$;

61) $x=\frac{2c^3+12dc^2-9d^3}{6d^2+10c^2}$; 62) $x=\left(\frac{b^2+a-c}{2b}\right)^2-a$;

63) I. 40 Thlr., II. 80 Thlr., III. 160 Thlr., IV. 320 Thlr.;

64) I. 300, II. 300, III. 200 Quadratruthen;

65) I. 600 Thlr., II. 400 Thlr., III. 300 Thlr.;

66) $\frac{am}{m+n+v}$, $\frac{an}{m+n+v}$, $\frac{av}{m+n+v}$,

67) $\frac{amv}{mv+nv+nw}$, $\frac{anv}{mv+nv+nw}$, $\frac{anw}{mv+nv+nw}$;

68) 84 Thlr.; 69) 96; 70) m. $\frac{ba}{b-a}$; 71) 3; 72) $\frac{ad-bc}{c-d}$; 73) 5;

74) $\frac{bc-ad}{c+d}$; 75) $1\frac{1}{5}$; 76) $\frac{a}{a-1}$; 77) $\frac{6}{7}$; 78) $\frac{a}{a+1}$; 79) 3000 Thlr.;

80) 6000 Thlr.; 81) Nach 2 Jahren; 82) Vor 28 Jahren; 83) B. 48, S. 12;

84) B. 36, S. 6; 85) B. $\frac{c-1}{b-c}$. bm, S. $\frac{c-1}{b-c}$. m; 86) 75 Thlr.;

87) 7 Meilen; 88) 700 Thlr.; 89) 1200 Thlr.;

90) Erbschaft $=ab(a-1)$, Erben $=a-1$; 91) 1600 Thlr., 4 Erben;

92) Erbschaft $=b.(a-1)^2$, Erben $=a-1$; 93) 50; 94) 24 Fr.;

95) 60 R.; 96) 4 Morgen; 97) 36 Sgr.; 98) Wie 123 : 247 : 310

99) 12 Pfd.; 100) 8 mal; 101) 5 mal; 102) 60 Thlr.; 103) 3000 Thlr.;

104) $\frac{100a}{100+mp}$; 105) $\frac{100am}{p(m-2)}$; 106) I. 3000 Thlr., II. 5000 Thlr.;

107) 120000 Thlr.; 108) $\frac{100am}{p+t-mt}$;

109) $\frac{at}{p+t}$ Thlr. zu p% und $\frac{ap}{p+t}$ zu t%; 110) 800 Pfd.;

111) Um den 15ten Theil; 112) 100 Pfd.; 113) $\frac{2}{3}$ % für den Monat;

114) 30000 Thlr.; 115) 8 Theilnehmer, 55 Thlr.; 116) 960 Pfd., 244 Thlr.;

117) 14400 Steine, der erste Wagen faßt 800, der zweite 700 Steine;

118) 1339 Bäume; 119) 729; 120) 135 Fuß; 121) Nach 9 Tagen;

122) Sie gebrauchen $\frac{b}{m+n}$ Tage; der eine macht im Ganzen $\frac{mb}{m+n}$, der andere $\frac{nb}{m+n}$ Meilen;

123) Nach 96 Sekunden; 124) 40 Stunden; 125) $\frac{am+c}{b}$ Stunden;

126) $27\frac{3}{11}$ Minuten nach 5 Uhr;

127) Nach $\frac{p}{c-d}$, $\frac{2p}{c-d}$, $\frac{3p}{c-d}$ u. s. w. Sekunden;

128) Nach $\frac{f}{c-d}$, $\frac{f+p}{c-d}$, $\frac{f+2p}{c-d}$ u. s. w. Sekunden;

129) I. 70, II. 90, III. 120 Quart; 130) I. 140, II. 60, III. 45, IV. 80 Quart;

131) Die eine 440, die andere 1001 Kubikfuß; 132) 210 Bogen;

133) Wie 121 : 160; 134) Nach 74 Sekunden; 135) Nach $5\frac{5}{11}$ Stunden;

136) In $1\frac{1}{11}$ Stunde; 137) In 12 Stunden;

138) In $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ Tagen.

B. Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten.

§. 137. Erklärung.

Kommen in ein und derselben Gleichung zwei Unbekannte vor, z. B.

$$x + y = 12,$$

so kann man unendlich viele Werthe für x und y finden, welche der Gleichung genügen. Sobald aber die Werthe von x und y nicht bloß die Gleichung $x + y = 12$, sondern auch noch eine zweite Gleichung, z. B. $2x + 3y = 31$ zu einer identischen machen sollen, so erhält man bloß einen Werth für jeden der zwei Unbekannten.

§. 138. Zusatz.

Ist die zweite Gleichung der Art, daß man sie aus der ersten ableiten kann, so reichen diese zwei Gleichungen zur Bestimmung von x und y nicht hin, weil beide zusammen nicht mehr sagen, als die eine allein.

Die Gleichungen $x + y = 8$

und $2x + 2y = 16$

sind also zur Bestimmung von x und y nicht ausreichend.

§. 139. Erklärung.

Die bequemste Form für Gleichungen mit 2 Unbekannten ist:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Haben zwei gegebene Gleichungen nicht diese Form, so ordnet man sie auf dieselbe Art, wie Gleichungen mit einem Unbekannten.

§. 140. Erklärung.

Soll aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y zunächst x bestimmt werden, so entfernt oder eliminirt man y auf folgende Art: Man löst beide Gleichungen nach y auf. Die für y gefundenen Werthe enthalten zwar noch x, da aber beide gleich y, folglich auch untereinander gleich sind, so liefern sie eine neue Gleichung, in welcher y nicht mehr vorkommt, die sogenannte Eliminationsgleichung. Diese löst man auf gewöhnliche Art auf. Setzt man den für x gefundenen Werth in eine der für y gefundenen Gleichungen, so erhält man y. Diese Methode heißt die combinatorische.

Beispiele.

I. $$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 4x - 2y = 4. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$1)\ y = \frac{25 - 3x}{4};$$

$$2)\ y = \frac{4x - 4}{2} = 2x - 2.$$

Es ist also $\frac{25 - 3x}{4} = 2x - 2,$

$$25 - 3x = 8x - 8,$$

$$33 = 11x,$$

$$3 = x.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung 2) anstatt x, so erhält man:

$$y = 2x - 2 = 6 - 2$$

oder $$y = 4.$$

II. $$\begin{cases} \frac{x - 2}{5} - \frac{10 - x}{3} = \frac{y - 10}{4} \\ \frac{2y + 4}{3} - \frac{2x + y}{8} = \frac{x + 13}{4}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit dem Generalnenner 60, die zweite mit dem Generalnenner 24, so erhält man:

1) $(12x - 24) - (200 - 20x) = 15y - 150$

oder $12x - 24 - 200 + 20x = 15y - 150$

oder a) $32x - 15y = 74.$

2) $(16y + 32) - (6x + 3y) = 6x + 78$

oder $16y + 32 - 6x - 3y = 6x + 78$

oder b) $-12x + 13y = 46.$

Aus a) erhält man $y = \frac{32x - 74}{15},$

aus b) $y = \frac{46 + 12x}{13}.$

Also ist $\frac{32x - 74}{15} = \frac{46 + 12x}{13}$

$$416x - 962 = 690 + 180x$$
$$236x = 1652$$
$$x = 7.$$

Setzt man diesen Werth ein in $y = \frac{32x - 74}{15}$, so ist $y = 10$.

III. $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

1) $y = \frac{c - ax}{b}$, 2) $y = \frac{f - dx}{e}$.

Also $\frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e}$

$$ce - aex = fb - dbx$$
$$ce - fb = aex - dbx = x \cdot (ae - db)$$
$$\frac{ce - fb}{ae - db} = x.$$

Ferner ist $y = \frac{c - a\left\{\frac{ce - fb}{ae - db}\right\}}{b} = \frac{cae - cdb - ace + afb}{b \cdot (ae - db)} =$

$$= \frac{b(af - cd)}{b \cdot (ae - db)} = \frac{af - cd}{ae - db}.$$

§. 141. Erklärung.

Die Eliminationsgleichung kann man auch auf andere Art durch die sogenannte Substitutionsmethode erhalten.

Man bestimmt nämlich den Werth von y aus der ersten Gleichung und setzt den gefundenen Werth in die zweite Gleichung statt y.

Beispiel.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 4x + 11y = 19 \end{cases}$$

Nach 1) ist $y = \frac{13 - 5x}{3}$. Dies in die zweite Gleichung gesetzt, giebt:

$$4x + 11 \cdot \frac{13 - 5x}{3} = 19$$

$$\text{oder } 12x + 143 - 55x = 57$$

$$12x - 55x = 57 - 143$$

$$-43x = -86$$

$$x = 2.$$

Setzt man diesen Werth ein in $y = \frac{13 - 5x}{3}$, so ergiebt sich $y = 1$.

§. 142. Erklärung.

Eine dritte Methode, die Eliminationsgleichung zu bilden, ist die Additionsmethode. Hat nämlich zufällig in beiden Gleichungen der eine Unbekannte denselben Zahlenfaktor oder Coefficienten, so kann man diesen Unbekannten dadurch eliminiren, daß man beide Gleichungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die Vorzeichen verschieden sind oder nicht.

Die Gleichungen

$$\begin{cases} 3x + 4y = 16 \\ 7x - 4y = 4 \end{cases}$$

geben durch Addition die Eliminationsgleichung

$$10x = 20.$$

Ebenso geben die Gleichungen

$$\begin{cases} 4x + 9y = 20 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

durch Subtraction die Eliminationsgleichung

$$6y = 12.$$

Gewöhnlich haben nun zwar die Unbekannten nicht dieselben Coefficienten, aber man kann ihnen dieselben leicht geben.

Soll z. B. in den Gleichungen

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 5x + 3y = 27 \end{cases}$$

x denselben Coefficienten erhalten, so multiplicire man die erste Gleichung mit 5 (dem Coeffic. zu x in der zweiten Gleichung), die zweite mit 3 (dem Coeffic. zu x in der ersten Gleichung). Man erhält alsdann:

$$\begin{aligned} 15x + 20y &= 125 \\ 15x + 9y &= 81 \\ \hline 11y &= 44 \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so ist

$$\begin{aligned} 3x + 16 &= 25 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

C. Gleichungen des ersten Grades mit drei oder mehreren Unbekannten.

§. 143. Erklärung.

Kommen in einer Gleichung drei Unbekannte vor, so muß man zur Bestimmung derselben im Ganzen drei von einander unabhängige Gleichungen haben. Die geordnete Gleichungsform ist alsdann:

$$\begin{aligned} &1)\ ax + by + cz = m \\ &2)\ a_1x + b_1y + c_1z = m_1 \\ &3)\ a_2x + b_2y + c_2z = m_2. \end{aligned}$$

Einzelne der Coefficienten können natürlich $= 0$ sein.

Um die Unbekannten zu bestimmen, eliminirt man nach einer der drei gegebenen Methoden einen Unbekannten und bildet zwei Eliminationsgleichungen mit zwei Unbekannten.

Man kann also aus allen drei Gleichungen x bestimmen. Bezeichnet man die drei gefundenen Werthe, welche noch y und z enthalten, durch A, B, C,

so sind $\begin{cases} A = B \\ A = C \end{cases}$ oder $\begin{cases} A = B \\ C = B \end{cases}$ oder $\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases}$

die Eliminationsgleichungen, welche man, als Gleichungen mit 2 Unbekannten, nach den früheren Methoden löst.

Ferner kann man x (oder y oder z) aus einer der drei Gleichungen bestimmen und den gefundenen Werth in die übrigen setzen, wodurch man ebenfalls 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält.

Schließlich kann man mit Hülfe der Additionsmethode durch Verbindung der Gleichungen 1 und 2, 1 und 3, oder 1 und 2, 2 und 3, oder 1 und 3, 2 und 3 einen der drei Unbekannten eliminiren.

Welche von den drei Methoden die vortheilhafteste sei, hängt von der Aufgabe ab.

Zur Bestimmung von m Unbekannten braucht man m Gleichungen. Aus diesen eliminirt man einen Unbekannten und erhält (m — 1) Gleichungen mit (m — 1) Unbekannten. Nun eliminirt man wieder einen Unbekannten und setzt dies so lange fort, bis man schließlich eine Gleichung mit einem Unbekannten erhält.

Beispiele.

I.

$$\begin{cases} 1)\ 2x + 3y + 4z = 20 \\ 2)\ 3x + 4y + 5z = 26 \\ 3)\ 4x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

Zunächst wird, um x mit Hülfe der Additionsmethode zu eliminiren, die Gleichung 1) mit 3, die Gleichung 2) mit 2 multiplicirt.

$$\begin{array}{ll} 1) & 6x + 9y + 12z = 60 \\ 2) & 6x + 8y + 10z = 52 \\ \hline a) & \quad y + 2z = 8. \end{array}$$

Durch Verbindung von 1) und 3) erhält man

$$\begin{array}{ll} 1) & 4x + 6y + 8z = 40 \\ 3) & 4x + 2y - 3z = -1 \\ \hline b) & \quad 4y + 11z = 41. \end{array}$$

Aus den Gleichungen a) und b) wird y eliminirt, indem man a mit 4 multiplicirt,

$$\begin{array}{rl} \text{also} & 4y + 8z = 32 \\ & 4y + 11z = 41 \\ \hline & 3z = 9 \\ & z = 3. \end{array}$$

Setzt man z in die Gleichung a, so ergiebt sich $y = 2$, und setzt man diese Werthe für z und y in eine der drei ursprünglichen Gleichungen, so erhält man $x = 1$.

II.

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{5x+7y}{x+y} = 6 \\ 2)\ \dfrac{3(z-x)}{x-y+z} = 1 \\ 3)\ \dfrac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3} = 4 \end{cases}$$

Aus 1) erhält man $5x + 7y = 6x + 6y$ oder $x = y$.

Setzt man diesen Werth für x in die Gleichungen 2) und 3), so gehen diese über in:

$$2)\quad \frac{3(z-y)}{z} = 1$$

$$\text{oder } 3z - 3y = z$$

$$\text{oder } 2z = 3y;$$

$$3)\quad \frac{2y+3y-z}{\frac{y}{2}+3} = 4$$

$$\text{oder } 5y - z = 2y + 12$$

$$\text{oder } 3y = z + 12$$

Es ist also: $3y = 2z$ (nach 2)

und $3y = z + 12$ (nach 3)

also $2z = z + 12$

$z = 12.$

Aus $3y = 2z = 24$ folgt

$y = 8$

und aus $x = y$ folgt

$x = 8.$

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $\begin{cases} 3x+5y=27 \\ 7x+4y=40 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-8y=-12 \\ 3x-5y=-5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-8y=34 \\ -3x+4y=-18 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (3x+5)\,3=4y+2 \\ 2x+3y=36 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{4x}{3}+\frac{5y}{4}=6 \\ \frac{5x}{6}-\frac{3y}{2}=22 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5x+4y}{3}-3=10 \\ \frac{4x+9y-6}{5}=12 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x+3y=5x+3-3y \\ (6x+2):(2y+1)=4:1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+7y=8x-3y+25 \\ \left(2x+\frac{1}{2}\right):(y+3)=1:2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x+3y=8x+y-6 \\ 3\frac{4}{5}x+5\frac{3}{7}y=57 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x+2y-[3x+2(y-3x)]+x-5(y+2x-3)=24 \\ -(8y+5x+6)+8(3x+4y)-[6-(3x+2y)]=-24 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 4x+3(x-y)-2(x-3y)+468=8(x+5y) \\ 3x+120-7(x+y-2)=2-(8-2y) \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x+3)(2y-4)-\frac{1}{2}(y-7)(4x+8)=10(x+y) \\ 4x+2y=6y-(x-2) \end{cases}$

13) $\begin{cases} (6x+4y):7=y+\frac{3x}{4} \\ 5x-2y=[6x-(y+2)]:7 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x+\frac{4y-2}{3}\cdot\frac{5-3x}{4}+x(y+2)=\frac{3}{4}(5x+3y-2)+1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{5}(x+5):\frac{4y+4}{5}=2:1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x-\frac{3y+4x}{7}+4=3x+2y \\ \frac{5y-(3x+2)}{4}+4x-7=\frac{y-13}{4} \end{cases}$

16) $\begin{cases} 4x-\left[6+\frac{3x-4}{2}-(y+3)\right]=7 \\ (3x+5):(10y+3)=1:3 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x+5y-2(x+3y)=\dfrac{4x-2y}{3}-\dfrac{2-8x-3y}{3} \\ \dfrac{x+y-3}{x}-2=\dfrac{3x+2y}{3x}-8 \end{cases}$

18) $\begin{cases} (3x+4)(8y-7):\left(4x-11\dfrac{2}{3}\right)(5y+2)=6:5 \\ 4y+\dfrac{16-3x}{2}-\left(3y-\dfrac{19-4x}{17:3}\right)=2y+\dfrac{3x}{5}+1 \end{cases}$

19) $\begin{cases} [3x+4y-6(x-3y)]:[8x+9y-4(8-7y)]=95:193 \\ 8x-3(y+5x)-7=-57 \end{cases}$

20) $\begin{cases} (x+3y-9):(3x-2y+6)=4:1 \\ (3x+2y):8=5x+7 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=1\dfrac{3}{8} \end{cases}$

22) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+9}=\sqrt{x+3y+22}-1 \\ 3x-\dfrac{3y+5}{2}-\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{x}{2} \end{cases}$

23) $\begin{cases} 3x-\dfrac{bf}{b-f}\cdot\dfrac{8b-2f}{b+f}=-5y \\ (b+c+f)fy-(b+2f)\cdot bf+b^2x=f^2x+\dfrac{bcf^2}{b+f} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{a}{b+y}=\dfrac{b}{3a+x} \\ ax+2by=d \end{cases}$

25) $\begin{cases} (x+a):(y+b)=c:d \\ (x-a):(y-b)=m:p \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{x}}:\dfrac{b}{\sqrt{x}}=c:d \\ x-y=m \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=c \\ \dfrac{c}{x}-\dfrac{a}{y}=b \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dfrac{a}{m+px}=\dfrac{b}{n-py} \\ \dfrac{ax}{my}-c=b-\dfrac{x}{y} \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dfrac{(x+a)(cx-b)}{c}=(x-d)y \\ ay=\dfrac{bx}{c} \end{cases}$

30) $\begin{cases} bcx=cy-2b \\ b^2y+\dfrac{a(c^3-b^3)}{bc}=\dfrac{2b^3}{c}+c^3x \end{cases}$

31) $\begin{cases} 3x+2y=24 \\ 5x+2z=24 \\ 3y-5z=8 \end{cases}$

32) $\begin{cases} 8x-3y=23 \\ 5x-9z=2 \\ 3z+8y=30 \end{cases}$

33) $\begin{cases} \frac{2x}{5}-\frac{7y}{2}=-38 \\ \frac{3x}{4}+\frac{5z}{3}=39 \\ \frac{8y}{3}-\frac{7z}{2}=-31 \end{cases}$

34) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-8y=-13 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x+y+z=-1\frac{1}{2} \\ 5x+3y=-21\frac{1}{2} \\ 2x-5z=-25 \end{cases}$

36) $\begin{cases} 3x+2y+4z=-21 \\ 4x+3y-6z=30 \\ 5x-6y+8z=-79 \end{cases}$

37) $\begin{cases} 2x-\frac{y}{2}+4z=13 \\ \frac{5x}{4}+y-z=\frac{1}{4} \\ 3x+4y-\frac{5z}{6}=\frac{17}{2} \end{cases}$

38) $\begin{cases} 5x-2y+\frac{5}{6}z=15 \\ 3\frac{1}{6}x-4\frac{1}{5}y-2z=-79 \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{10}y-\frac{5}{12}z=1 \end{cases}$

39) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{6} \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{2y}+\frac{1}{4z}=2\frac{5}{6} \end{cases}$

40) $\begin{cases} \frac{5x+3y+7\frac{1}{2}z}{3}-\frac{2x+4y+6z}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+y+2z}{5} \\ \frac{2x-4y-4z}{3}+\frac{5x-3y+1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{2y-3x+8}{4} \\ \frac{4x+3z}{11}-\frac{4y+5z}{4}-\frac{3y+4z+1}{5}=8x-6y-1\frac{1}{2}z \end{cases}$

41) $\begin{cases} 4x:5y:3z=4:10:9 \\ 3x+4y-6z=-14 \end{cases}$

42) $\begin{cases} \frac{4x-3y+2z}{3\frac{1}{2}x+y-3}=1 \\ \frac{5(2z-3x)}{3x-2y+2\frac{1}{2}z}=1 \\ \frac{3x-8y}{4y+3x}=-1 \end{cases}$

43) $\begin{cases} x^2-5(x+y)=y^2\left(\frac{y+5}{x}\right) \\ \frac{x-5}{z}=\frac{z+5}{x} \\ 2x+3z=5y+10 \end{cases}$

44) $\begin{cases} ax+by+cz=h \\ a_1x+b_1y+c_1z=h' \\ a_2x+b_2y+c_2z=h'' \end{cases}$

45) $\begin{cases} \sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} = a : b : c \\ x + y + z = d \end{cases}$

46) $\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m \\ \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z} = m_1 \\ \frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} + \frac{c_2}{z} = m_2 \end{cases}$

47) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3z = -4 \\ 9y - 4v = 7 \\ 2z + 3v = 23 \end{cases}$

48) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z + 2v = 10 \\ 8x - 6y + 4z - 3v = 11 \\ 5x + 4y - 5z + 2v = 12 \\ 4x + 2y + 3z - 6y = 3 \end{cases}$

49) $\begin{cases} \frac{x - 2y}{4} - \frac{z}{10} + \frac{u - 2y}{3} = \frac{4z - 5y}{2} \\ \frac{2x - 5y}{3} - \frac{2z - x + u}{4} + \frac{2y}{3} = 4 \\ \frac{3x - 6z}{4} = 2u - 3y - 24 \\ x + y + z + u = 162 \end{cases}$

50) $\begin{cases} ax + by = l \\ cx + du = m \\ ex + fz = n \\ gy + hz = p \end{cases}$

51) $\begin{cases} \frac{xy}{ay + bx} = l \\ \frac{yz}{cz + dy} = m \\ \frac{xz}{ez + fx} = n \end{cases}$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

52) Der Umfang eines rechtwinkligen viereckigen Gartens beträgt 320′; die Breite beträgt 40′ mehr als die Länge. Wie lang und wie breit ist der Garten?

53) Wie lang und wie breit ist ein Garten, dessen Umfang 2a beträgt und dessen Breite um b größer als die Länge ist?

54) Zwischen zwei Grundstücken liegt eine Wiese von 12 Morgen. Kauft der Besitzer des einen Grundstücks dieselbe, so wird dadurch sein Grundstück dreimal so groß, als das des andern; kauft jedoch letzterer die Wiese, so beträgt alsdann sein Grundstück $^3/_5$ von dem des erstern. Wie groß sind beide Grundstücke?

55) Von zwei Stücken Zeug wurden verschiedene Ellen verkauft. Nachdem von dem ersten 18 Ellen und von dem andern 10 Ellen verkauft worden waren, verhielten sich die Reste wie $1^1/_2$ zu 1; nachdem aber von dem ersten noch 10 und vom zweiten noch 20 Ellen verkauft worden waren, verhielten sich die Reste wie 2 : 1. Wie viel Ellen enthielt jedes Stück?

56) Von zwei Zahlen giebt das Dreifache der größeren und das Vierfache der kleineren die Summe 96; die Summe der beiden Zahlen dividirt durch die Differenz derselben giebt 7. Welches sind die Zahlen?

57) Die monatliche Miethe für zwei Wohnungen beträgt zusammen 80 Thlr. Wie viel beträgt die jährliche Miethe für jede dieser Wohnungen, wenn die erste jährlich 96 Thlr. weniger kostet, als die andere in 10 Monaten?

58) Für 12 Scheffel Roggen und 2 Wispel Weizen werden 110 Thlr. bezahlt. Was kostet der Scheffel jeder Art, wenn 5 Scheffel Roggen 5 Sgr. weniger kosten, als 3 Scheffel Weizen?

59) Das Dreifache einer Zahl ist um 7 kleiner, als das Fünffache einer andern; hingegen ist das Vierfache der zweiten um 10 kleiner, als das Fünffache der ersten. Welches sind die beiden Zahlen?

60) Jemand zieht von seinem Hause, welches einen Werth von 10000 Thlr. hat, nach Abzug der Zinsen für 2400 Thlr. Schulden, die auf dem Hause stehen, jährlich 404 Thlr. Zinsen. Bei demselben Zinsfuße zieht sein Nachbar für ein Haus im Werthe von 20000 Thlr. nach Abzug der Zinsen für 8000 Thlr. Schulden jährlich 680 Thlr. Wie viel betrug der Zinsfuß für die Häuser und für die Schulden?

61) Jemand bezieht von seinem Hause, welches einen Werth von 16000 Thlr. hat, nach Abzug der Zinsen für 5000 Thlr. Schulden, jährlich 600 Thlr. Zinsen. Sein Nachbar erhielt 1 % mehr für sein Haus, welches einen Werth von 20000 Thlr. hat, giebt aber auch für seine 8000 Thlr. Schulden 1 % mehr, als sein Nachbar, und erhält jährlich im Ganzen 800 Thlr. Zinsen. Wie viel beträgt der Zinsfuß für die Häuser und für die Schulden?

62) Welcher Bruch wird gleich $\frac{3}{4}$, wenn man zum Zähler und zum Nenner 5 addirt, hingegen gleich $\frac{8}{11}$, wenn man 3 vom Zähler und auch vom Nenner subtrahirt.

63) Welcher Bruch wird gleich 2, wenn man 8 zum Zähler und Nenner addirt; hingegen gleich 3, wenn man 3 zum Zähler und Nenner addirt.

64) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, die sich wie 5 : 7 verhalten, und welche, wenn sie zu zwei andern Zahlen, die im Verhältniß von 3 : 5 stehen, addirt werden, Summen liefern, deren Verhältniß $\frac{9}{13}$ und deren Unterschied 16 ist. Welches sind diese Zahlen?

65) Eine Gesellschaft verzehrte in einem Gasthause eine gewisse Summe, und zwar einer so viel als der andere. Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jede $3\frac{3}{4}$ Sgr. mehr verzehrt, so hätte die Zeche 6 Thlr. $16\frac{1}{4}$ Sgr. mehr betragen; wären aber 3 Personen weniger gewesen, und hätte jede $2\frac{1}{2}$ Sgr. weniger verzehrt, so hätte die Zeche 3 Thlr. $12\frac{1}{2}$ Sgr. weniger betragen. Wie stark war die Gesellschaft und wie viel verzehrte jeder?

66) Bei dem Vermessen eines viereckigen rechtwinkligen Gartens fand man, daß derselbe, wenn er 5 Ruthen breiter und 4 Ruthen länger wäre, 116 Quadratruthen mehr enthalten würde; wenn er aber 4 Ruthen breiter und 5 Ruthen länger wäre, 113 Quadratruthen mehr. Wie groß war die Länge und Breite?

67) Ein rechtwinkliger Garten würde um c Quadratruthen größer sein, wenn er um a Ruthen länger und um b Ruthen breiter wäre; hingegen würde er um c′ Quadratruthen größer sein, wenn er a′ Ruthen länger und b′ Ruthen breiter wäre. Wie groß ist die Länge und wie groß die Breite?

68) A und B spielen zusammen. Beim ersten Spiele gewinnt B so viel, daß sich seine Baarschaft verdoppelt, beim zweiten A so viel, daß sich der ihm gebliebene Rest verdoppelt, und beim dritten wieder B so viel, daß sich der ihm gebliebene Rest verdoppelt. Zuletzt hat Jeder 16 Thlr. Wie viel hatte Jeder anfangs?

69) Wie viel hatte Jeder anfangs, wenn zuletzt Jeder a Thlr. hatte?

70) Ein Kaufmann hat zwei Sorten Kaffee. 8 Pfund der bessern und 6 Pfund der schlechtern Sorte kosten durchschnittlich 6 Thlr., hingegen 5 Pfund der bessern und 9 Pfund der schlechtern durchschnittlich 5 Thlr. 15 Sgr. Wie viel kostet das Pfund jeder Sorte?

71) Was kostet das Pfund einer jeden Sorte, wenn a Pfund der bessern und b Pfund der schlechtern Sorte durchschnittlich c Groschen; ferner f Pfund der bessern und g Pfund der schlechtern durchschnittlich h Groschen kosten?

72) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund, und 9 Pfund Kupfer im Wasser 1 Pfund. Wenn nun eine Composition von Silber und Kupfer, welche 148 Pfund wiegt, $14\frac{2}{3}$ Pfund im Wasser verliert, wie viel Silber und Kupfer befindet sich darin?

73) Die Krone des Königs Hiero wog 20 Pfund, bestand aus Silber und Gold und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund. Wenn nun 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund und 10,5 Pfund Silber im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren, wie viel Gold und wie viel Silber mußte dann die Krone enthalten?

74) Ein Stück Metall, welches p Pfund wiegt, verliert im Wasser a Pfund. Wenn es nun aus zwei andern Metallen besteht, und p Pfund des erstern im Wasser b Pfund, p Pfund des zweiten im Wasser c Pfund verlieren, wie viel Pfund von jedem dieser Metalle befinden sich alsdann in dem gegebenen Stücke?

75) Das Blei ist 11,324 mal schwerer als Wasser; das Korkholz wiegt nur 0,24 mal so viel als Wasser; das Tannenholz hingegen wiegt 0,45 mal so viel als Wasser. Man will nun ein Stück Blei mit einem Stück Korkholz so verbinden, daß dadurch ein Körper entsteht, der 80 Pfund wiegt und gerade so schwer ist, als ein Stück Tannenholz von gleicher Größe. Wie viel Blei und Korkholz muß miteinander verbunden werden?

76) Wenn das Blei p mal, das Korkholz p′ mal, das Tannenholz p″ mal so schwer als Wasser ist, wie viel Blei und Kork müssen dann verbunden werden, wenn sie 9 Pfund wiegen und durchschnittlich so schwer als Tannenholz sein sollen?

77) Ein Kapital bringt jährlich 414 Thlr. Zinsen ein. Wäre es um 1 % höher verliehen, so würde es jährlich 506 Thlr. Zinsen bringen. Wie groß ist das Kapital und wie groß der Zinsfuß?

78) Ein Kapital von 5000 Thlr. wurde in zwei getrennten Summen verliehen, die kleinere um 2 % höher als die größere. Der Zinsfuß der größern Summe wurde später um 1 % vermehrt, und der der kleinern um 1 % vermindert. Dadurch vermehrte sich der ganze Zinsenertrag um den vierten Theil. Wäre aber der Zinsfuß der größern Summe um 1 % erhöhet worden, ohne daß die Prozente der kleinern sich verringert hätten, so wäre der ganze Zinsenertrag um ein Drittel gestiegen. Wie groß waren die Summen und zu welchem Zinsfuße waren sie ausgeliehen?

79) Zwei Röhren können einen Wasserbehälter zusammen in 15 Stunden füllen. Nachdem sie 6 Stunden lang in Thätigkeit gewesen sind, wird die eine Röhre abgesperrt und die andere braucht nun noch 30 Stunden, um den Behälter zu füllen. Wie viel Stunden braucht jede Röhre, um allein den Behälter zu füllen?

80) Ein cylindrisches senkrechtes Gefäß von 270 Quart kann durch zwei Oeffnungen, welche sich wie 5 zu 4 verhalten, und von denen die erstere am Boden, die andere an der Seite befindlich ist, entleert werden. Als das Gefäß ganz gefüllt war, brauchte es $6\frac{1}{3}$ Minute, um sich ganz zu

entleeren. Durch die untere Oeffnung lief dabei in zwei Minuten $\frac{1}{3}$ von dem, was aus beiden Oeffnungen gleichzeitig überhaupt auslaufen konnte. In welcher Entfernung befand sich die zweite Oeffnung über dem Boden, wenn die Höhe des Gefäßes 27 Fuß betrug?

81) Ein Kaufmann hat zwei Sorten derselben Waare. 7 Pfund der zweiten kosten 2 Sgr. weniger, als 4 Pfund der ersten. Nachdem er einige Pfund verkauft hatte und zwar von der ersten Sorte 4 Pfund weniger, als von der zweiten, betrug seine Einnahme 6 Thlr. Hätte er noch $1\frac{1}{2}$ Pfund von der zweiten und $\frac{1}{2}$ Pfund von der ersten mehr verkauft, so wäre seine Einnahme um $\frac{2}{15}$ größer gewesen. Wie viel Pfund hatte er von jeder Waare verkauft und was kostete das Pfund jeder Sorte?

82) Bei einem rechtwinkligen Garten verhält sich der Unterschied zweier Seiten zum Umfange wie 1 : 6 und die Umfangszahl zur Inhaltszahl wie 1 : 20. Wie lang und wie breit ist der Garten?

83) Wie lang und wie breit ist derselbe, wenn sich der Unterschied zweier Seiten zum Umfange wie m : n und die Umfangszahl zur Inhaltszahl wie v : w verhalten?

84) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12, der Unterschied ihrer Quadrate 72. Welches sind die Zahlen?

85) Die Summe zweier Zahlen ist a, der Unterschied ihrer Quadrate gleich b. Welches sind die Zahlen?

86) Die Summe zweier Zahlen beträgt a, ihr Quotient ist gleich b. Welches sind die Zahlen?

87) Wenn **A** so viel Thaler besitzt als **B** und noch den dritten Theil von dem, was **C** besitzt; **B** hingegen so viel als **C** und noch $\frac{1}{3}$ von dem, was **A** besitzt; **C** endlich $\frac{1}{3}$ von dem, was **A** besitzt und außerdem 10 Thlr., wie viel hat alsdann jeder?

88) Giebt **A** an **B** 4 Thlr., so verhält sich ihre Baarschaft wie 1 : 2; giebt hingegen **B** an **C** 10 Thlr., so verhält sich ihre Baarschaft wie 3 : 10; und würde **A** an **C** 5 Thlr. geben, so verhielte sich ihre Baarschaft wie 3 : 11. Wie viel besitzt jeder?

89) Verborgt Jemand von seinem Gelde einen Theil zu 3 %, einen andern Theil zu 4 % und den Rest zu 5 %, so erhält er jährlich 245 Thlr. Zinsen; verborgt er den ersten Theil zu 4 %, den zweiten zu 3 %, den dritten zu $5\frac{1}{4}$ %, so erhält er jährlich 250 Thlr. Zinsen; verborgt er den ersten zu 5 %, den zweiten zu 3 % und den dritten zu 4 %, so erhält er jährlich 245 Thlr. Zinsen. Welches sind die drei Theile?

90) **A** und **B** erhalten für 15 Tage gemeinschaftlicher Arbeit zusammen 22 Thlr.; **A** und **C** für 20 Tage zusammen 31 Thlr.; **B** und **C** für 12 Tage zusammen 17 Thlr. Wie viel erhält jeder täglich?

91) Drei Kapitalien betragen zusammen 10500 Thlr.; das eine ist zu 5%, das andere zu 4%, das dritte zu 3 % ausgeliehen. Die Zinsen betragen zusammen 399 Thlr. und zwar die Zinsen vom zweiten Kapitale 2 Thlr weniger, als vom ersten. Wie groß ist jedes Kapital?

92) Ein Kaufmann hat drei Sorten Tuch; 192 Ellen der ersten, 72 Ellen der zweiten und 120 Ellen der dritten kosten zusammen 734 Thlr.; 72 der ersten, 240 der zweiten und 168 der dritten 812 Thlr.; 144 der ersten, 216 der zweiten und 312 der dritten 1130 Thlr. Wie viel kostete die Elle von jeder Sorte?

93) Ein Stück Metall, welches aus Gold, Silber und Kupfer bestand, wog 1700 Loth, im Wasser aber nur 1556 Loth. Wenn nun das Gold $5\frac{1}{4}$ %, das Silber $9\frac{1}{2}$ % und das Kupfer $12\frac{1}{5}$ % im Wasser verliert,

und wenn sich der Gewichtsverlust des in der Mischung befindlichen Silbers zum Gewichtsverluste des in der Mischung befindlichen Kupfers wie 19 : 32 verhielt, wie viel von jedem Metalle war dann in der Mischung?

94) Jemand hat drei Stücke Metall, von denen jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer; das zweite 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer; das dritte enthält 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Wie viel muß er von jedem Stücke hinwegnehmen, um ein viertes Stück daraus zu bilden, welches 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer enthalten soll?

95) Drei Arbeiter sollen eine Arbeit übernehmen. A und B würden dieselbe gemeinschaftlich in 12 Tagen vollenden, B und C erst in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen. Wie viel Zeit wird jeder einzelne dazu brauchen, und in welcher Zeit werden sie damit zu Stande kommen, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten?

96) Drei Arbeiter sollen eine Arbeit übernehmen. A und B würden dieselbe in a Tagen, A und C in b Tagen, B und C in c Tagen vollenden. Wie viel Zeit wird jeder einzelne dazu brauchen, und in wie viel Tagen werden sie bei gemeinschaftlicher Arbeit damit fertig werden?

97) Man soll drei Zahlen aus folgenden Angaben bestimmen. Wenn die erste zum mfachen der übrigen addirt wird, so ist die Summe $= a$; wird die zweite zum m'fachen der übrigen addirt, so ist die Summe $= a'$; wird aber die dritte zum m''fachen der übrigen addirt, so ist die Summe $= a''$. Welche Zahlen sind es?

98) In einer Gesellschaft waren so viel Männer und Frauen und Kinder, daß, wenn auch nur auf je 8 Erwachsene 1 Kind gerechnet wurde, doch 30 Erwachsene übrig blieben; dabei war der 13te Theil der Frauen dem 12ten der Männer und Kinder gleich. Als die Hälfte der Frauen und $^2/_3$ der Kinder sich entfernt hatten, fehlten noch 2 Frauen, um auf je 8 Frauen ein Kind rechnen zu können. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren zugegen?

99) Ein Kriegsschiff war vollständig bemannt mit Matrosen und Seesoldaten. Wenn auf je 3 Kanonen 22 Matrosen gerechnet wurden, so blieben 10 Matrosen übrig. Die Zahl der ganzen Mannschaft war 5mal größer, als die Zahl der Soldaten und Kanonen zusammengenommen. Nach einem Treffen, worin die Anzahl der Getödteten den vierten Theil der Ueberlebenden betrug, fehlten noch 5, um auf je 2 Kanonen 13 Mann zu rechnen. Wie viel Kanonen, Soldaten und Matrosen waren es?

100) Um zwei Räder, deren Umfänge sich verhalten wie 5 : 3, sind zwei Seile geschlagen, deren Differenz um 280 Ellen größer ist, als die Differenz der Umfänge. Das längere Seil läßt sich 12 mal öfter um das größere Rad wickeln, als das kürzere Seil um das kleine Rad; und wenn das große Rad sich 3 mal so schnell umdreht, als das andere, so wickeln sich die Seile zu gleicher Zeit ab. Wie lang sind die Seile und wie groß sind die Umfänge der Räder?

101) Fünf Spieler machen die Bedingung, daß derjenige, der verliert, allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. Zuerst verliert A, dann B, dann C, dann D, endlich E. Am Ende des fünften Spieles hatte Jeder 160 Thlr. Wie viel hatte Jeder vor dem Spiele?

102) Der Name einer gewissen Stadt wird mit 6 Buchstaben geschrieben. Bezeichnet man die Buchstaben durch die Zahlen, welche ihre Stelle im Alphabet anzeigen, so ist die Summe dieser Zahlen mit Ausschluß der ersten gleich

55, mit Ausschluß der zweiten gleich 52, mit Ausschluß der dritten gleich 40, mit Ausschluß der vierten gleich 46, mit Ausschluß der fünften gleich 48 und mit Ausschluß der letzten gleich 44. Welches ist der Name der Stadt?

Auflösungen.

1) $x=4,\ y=3$; 2) $x=5,\ y=4$; 3) $x=2,\ y=-3$;

4) $x=3,\ y=10$; 5) $x=12,\ y=-8$; 6) $x=3,\ y=6$;

7) $x=3,\ y=2$; 8) $x=\frac{5}{4},\ y=3$; 9) $x=5,\ y=7$;

10) $x=3,\ y=-3$; 11) $x=8,\ y=12$; 12) $x=2,\ y=2$;

13) $x=-\frac{8}{103},\ y=-\frac{2}{103}$; 14) $x=\frac{5}{3},\ y=4$; 15) $x=1,\ y=1$;

16) $x=2,\ y=3$; 17) $x=\frac{34}{63},\ y=-\frac{5}{7}$; 18) $x=3\frac{1}{3},\ y=1$;

19) $x=5,\ y=5$; 20) $x=-1\frac{3}{7},\ y=1\frac{4}{7}$; 21) $x=4,\ y=8$;

22) $x=6,\ y=7$; 23) $x=\frac{bf}{b-f},\ y=\frac{bf}{b+f}$;

24) $x=\frac{2b^2+d-6a^2}{3a},\ y=\frac{3a^2+d-b^2}{3b}$;

25) $x=\frac{2bcm-adm-apc}{dm-pc},\ y=\frac{bdm+bcp-2adp}{dm-pc}$;

26) $x=\frac{a^2d^2m}{a^2d^2-b^2c^2},\ y=\frac{b^2c^2m}{a^2d^2-b^2c^2}$;

27) $x=\frac{a^2+bc}{b^2+ac},\ y=\frac{a^2+bc}{c^2-ab}$;

28) $x=\frac{pm(b+c)[bm(b+c)+a(a+m)]}{(a+m)^2(an-bm)},\ y=\frac{p[bm(b+c)+a(a+m)]}{(a+m)(an-bm)}$;

29) $x=\frac{a^2}{d},\ y=\frac{ab}{cd}$; 30) $x=\frac{a}{bc},\ y=\frac{a+2b}{c}$; 31) $x=4, y=6, z=2$;

32) $x=4, y=3, z=2$; 33) $x=10, y=12, z=18$; 34) $x=1, y=2, z=-3$;

35) $x=-2\frac{1}{2},\ y=-3,\ z=4$; 36) $x=-3,\ y=4,\ z=-5$;

37) $x=1, y=2, z=3$; 38) $x=12, y=25, z=6$; 39) $x=1, y=2, z=3$;

40) $x=3, y=5, z=-4$; 41) $x=2, y=4, z=6$; 42) $x=2, y=3, z=4$;

42) $x=6,\ y=1,\ z=1$;

44) $x = (hb'c'' - hb''c' + h'b''c - h'bc'' + h''bc' - h''b'c) \cdot m$
$y = (ah'c'' - ah''c' + a'h''c - a'hc'' + a''hc' - a''h'c) \cdot m,$
$z = (ab'h'' - ab''h' + a'b''h - a'bh'' + a''bh' - a''b'h) \cdot m;$
$m = 1 : (ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c);$

45) $x = \frac{a^2d}{a^2+b^2+c^2}$, $y = \frac{b^2d}{a^2+b^2+c^2}$, $z = \frac{c^2d}{a^2+b^2+c^2}$;

46) $x = A : (mb'c'' - mb''c' + m'b''c - m'bc'' + m''bc' - m''b'c),$
$y = A : (am'c'' - am''c' + a'm''c - a'mc'' + a''mc' - a''m'c),$
$z = A : (ab'm'' - ab''m' + a'b''m - a'bm'' + a''bm' - a''b'm);$
$A = (ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c);$

47) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $v = 5$; 48) $x = 3$, $y = 3$, $z = 5$, $v = 5$;

49) $x = 60$, $y = 24$, $z = 30$, $u = 48$;

50) $x = \frac{bhn + (gl - bp)f}{beh + afg}$, $y = \frac{afp + (el - an)h}{beh + afg}$,
$z = \frac{bep + (an - el)g}{beh + afg}$, $u = \frac{bh(em - cn) + gf(am - cl) + bcfp}{d(beh + afg)}$;

51) $x = A : (cfmn - bfln + bdlm)$, $y = A : (afln + demn - adlm),$
$z = A : (beln - cemn + aclm)$, $A = lmn(bde + acf)$;

52) Breite $= 180'$, Länge $= 140'$; 53) Breite $= \frac{a+b}{2}$, Länge $= \frac{a-b}{2}$;

54) I. = 60 Morgen, II. = 24 Morgen; 55) I. = 108 Ellen, II. = 70 Ellen;

56) 16 und 12; 57) 576 Thlr. und 384 Thlr.; 58) 2 Thlr. und $1\frac{1}{6}$ Thlr.;

59) 6 und 5; 60) Für die Häuser 5%, für die Schulden 4%;

61) Für die Häuser 5% und 6%, für die Schulden 4% und 5%; 62) $\frac{67}{91}$; 63) $\frac{12}{2}$;

64) 30, 42, 6, 10; 65) 14 Personen, 25 Sgr.; 66) 12 R. lang, 9 R. breit;

67) Länge $= \frac{a'c - ac' + aa'(b' - b)}{a'b - ab'}$, Breite $= \frac{bc' - b'c + bb'(a - a')}{a'b - ab'}$ Ruthen;

68) 22 Thlr., 10 Thlr.; 69) $\frac{11}{8}a$, $\frac{5}{8}a$; 70) 15 Sgr., 10 Sgr.;

71) I. $= \frac{(a+b)cg - (f+g)bh}{ag - bf}$ Sgr., II. $= \frac{(a+b)cf - (f+g)ah}{bf - ag}$ Sgr.;

72) 112 Pfd. Silber, 36 Pfd. Kupfer; 73) 14,77... Pfd. Gold; 5,22... Pfd. Silber;

74) $\frac{(c-a)p}{c-b}$ Pfd. vom ersten und $\frac{(a-b)p}{c-b}$ Pfd. vom zweiten;

75) 38,14 ... Pfd. Blei mit 41,85 ... Pfd. Kork;

76) $\frac{9p\,(p'-p'')}{p''(p'-p)}$ Pfd. Blei und $\frac{9p'(p''-p)}{p''(p'-p)}$ Pfd. Kork;

77) 9200 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ %; 78) 1000 Thlr. zu 4%, 4000 Thlr. zu 2%;

79) Die erste in $21\frac{3}{10}$, die andere in 50 Stunden; 80) 9 Fuß über dem Boden;

81) 5 Pfd. à 18 Sgr. u. 9 Pfd. à 10 Sgr.; 82) Die eine Seite ist 60, die andere 120;

83) Die eine Seite ist $\frac{4nw}{(n+2m)\,v}$, die andere $\frac{4nw}{(n-2m)\,v}$; 84) 9 und 3;

85) $\frac{a^2+b}{2a}$ und $\frac{a^2-b}{2a}$; 86) $\frac{a}{b+1}$ und $\frac{ab}{b+1}$;

87) A 60 Thlr., B 50 Thlr., C 30 Thlr.; 88) A 20 Thlr., B 28 Thlr., C 50 Thlr.;

89) 2000 Thlr., 1500 Thlr., 2500 Thlr.; 90) A $\frac{4}{5}$, B $\frac{2}{3}$, C $\frac{3}{4}$ Thlr.;

91) 2600 Thlr., 3200 Thlr., 4700 Thlr.;

92) I. $=2\frac{1}{3}$ Thlr., II. $=1\frac{3}{4}$ Thlr., III. $=1\frac{1}{3}$ Thlr.;

93) 800 Loth Gold, 400 Loth Silber, 500 Loth Kupfer;

94) Vom ersten 10, vom zweiten 24, vom dritten 25 Loth;

95) A braucht 20, B 30, C 60 Tage; alle drei brauchen 10 Tage;

96) A braucht $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$ Tage, B $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ Tage, C $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ Tage;
gemeinschaftlich brauchen sie $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ Tage;

97) Setzt man $\frac{m}{m-1}+\frac{m'}{m'-1}+\frac{m''}{m''-1}=A$, $\frac{a}{m-1}+\frac{a'}{m'-1}+\frac{a''}{m''-1}=B$,
so sind die Zahlen: $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1}-a'\right)$,
$\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1}-a''\right)$, und ihre Summe $\frac{B}{A-1}$;

98) 114 Männer, 156 Frauen, 30 Kinder;

99) 90 Kanonen, 670 Matrosen, 55 Soldaten;

100) Das eine Seil 360 Ellen, das andere 72 Ellen; der Umfang des einen Rades 20, des anderen 12 Ellen;

101) A 405, B 205, C 105, D 55, E 30 Thlr.; 102) Berlin.

D. Quadratische Gleichungen mit einem Unbekannten.

§. 144. Erklärung.

Die quadratischen Gleichungen enthalten x in der zweiten Potenz und sind nur dadurch zu lösen, daß man sie durch Ausziehen einer Quadratwurzel auf eine Gleichung des ersten Grades reducirt.

Lassen sie sich auf die Form $x^2 = a$ bringen, so nennt man sie reine quadratische Gleichungen; unrein heißen diejenigen, welche sich auf die Form bringen lassen:

$$x^2 + ax = b.$$

§. 145. Erklärung.

Die reine quadratische Gleichung

$$x^2 = a$$

wird dadurch gelöst, daß man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht. Es ist daher:

$$x = \sqrt{a}.$$

Da aber jede Quadratwurzel zwei Werthe hat, einen positiven und einen negativen, so muß man dies bei der Lösung andeuten. Demnach ist:

$$x = \mp \sqrt{a}.$$

Ist $x^2 = +36$, so ist $x = \mp 6$.

Ist $x^2 = -36$, so ist x gleich dem imaginären Ausdruck

$$\mp \sqrt{-36}.$$

§. 146. Zusatz.

Hat die quadratische Gleichung nicht die Form $x^2 = a$, so ordnet man sie nach den früher gegebenen Regeln.

Beispiele.

I. $3x^2 + 8 - 6(1 - x^2) = 5 - 7(x^2 - 3) + 22$

$3x^2 + 8 - 24 + 6x^2 = 5 - 7x^2 + 21 + 22$

$16x^2 = 64$

$x^2 = 4$

$x = \mp 2.$

II. $$\frac{5}{x} + \frac{3x}{5} + x = \frac{2x^2 - 5}{x}$$

$$25 + 3x^2 + 5x^2 = 10x^2 - 25$$
$$3x^2 + 5x^2 - 10x^2 = -25 - 25$$
$$-2x^2 = -50$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \mp 5.$$

III. $$3(x + 4)^2 + 6 = 114.$$

Betrachtet man $(x + 4)$ als den Unbekannten und bezeichnet es durch z, so ist:

$$3z^2 + 6 = 114$$
$$3z^2 = 108$$
$$z^2 = 36$$
$$z = \mp 6.$$

Es ist also $z = x + 4 = \mp 6$

$$x = -4 \mp 6 = -10 \text{ oder } +2.$$

IV. $$a - x^2 = b$$
$$-x^2 = b - a$$
$$+x^2 = a - b$$
$$x = \mp \sqrt{a - b}.$$

§. 147. Erklärung.

Die unreine quadratische Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

läßt sich nur lösen, wenn man im Stande ist, durch Wurzelausziehen auf beiden Seiten die Gleichung auf die Form der Gleichungen vom ersten Grade zu bringen.

Da sich nun die Wurzel aus einer Summe nur dann ausziehen läßt, wenn diese die Gestalt hat:

$$a^2 + 2ab + b^2$$
oder $$a^2 - 2ab + b^2,$$

wobei man die Wurzeln $\mp (a + b)$ oder $\mp (a - b)$ erhält, so muß man obigem Ausdrucke diese Form zu geben suchen. Nun ist:

$$x^2 + ax = x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2}.$$

Es fehlt also zum vollständigen Quadrate bloß noch der Summand $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ oder $\frac{a^2}{4}$. Da aber a eine bekannte Zahl ist, so kann man auf beiden Seiten $\frac{a^2}{4}$ addiren.

Es ist alsdann:

$$x^2 + ax = b$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4} = \frac{4b + a^2}{4}.$$

$$\sqrt{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4b + a^2}{4}}$$

$$x + \frac{a}{2} = \mp \left(\sqrt{4b + a^2} : \sqrt{4}\right) = \mp \frac{\sqrt{4b + a^2}}{2}$$

$$x = \frac{-a \mp \sqrt{4b + a^2}}{2}.$$

Die Gleichung $x^2 - ax = b$ wird eben so gelöst.

Es ist $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{4b + a^2}{4}$

$$x - \frac{a}{2} = \frac{\mp \sqrt{4b + a^2}}{2}$$

$$x = \frac{+a \mp \sqrt{4b + a^2}}{2}.$$

Man hat also, sobald die Gleichung auf die Form

$$x^2 \mp ax = b$$

gebracht ist, nur nöthig, auf beiden Seiten den vierten Theil vom Quadrate des bei x stehenden Zahlenfaktors zu addiren und dann auf beiden Seiten die Wurzel zu ziehen.

Beispiele.

I. $x^2 + 4x = 32.$

$$x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 = 36$$

$$x + 2 = \mp 6$$

$$x = -2 \mp 6 = \begin{cases} -8 \\ +4 \end{cases}$$

II. $$\frac{x}{3} + \frac{9}{x} + 4 = 2x + 2.$$

$$x^2 + 27 + 12x = 6x^2 + 6x$$

$$5x^2 - 6x = +27$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x = +\frac{27}{5}$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{5} + \frac{9}{25} = \frac{144}{25}$$

$$x - \frac{3}{5} = \mp \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{+3 \mp 12}{5} = +3, \text{ oder } = -\frac{9}{5}.$$

III. $$(x + 3)(2x - 4) = 12.$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 12$$

$$x^2 + x = 12$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \mp \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{-1 \mp 7}{2} = \begin{cases} -4 \\ +3. \end{cases}$$

IV. $$x + \sqrt{x} = 72.$$

Setzt man $\sqrt{x} = z$, so ist $x = z^2$, also

$$z^2 + z = 72$$

$$z = \begin{cases} -9 \\ +8 \end{cases} \text{ oder } \sqrt{x} = \begin{cases} -9 \\ +8. \end{cases}$$

V. $$x^4 + x^2 = 20.$$

Setzt man $x^2 = z$, so ist $x^4 = z^2$, also

$$z^2 + z = 20$$

$$z = \begin{cases} -5 \\ +4. \end{cases}$$

Da $z = x^2$ ist, so ist $x^2 = \begin{cases} -5 \\ +4 \end{cases}$ und $x = \mp 2$ oder $\mp \sqrt{-5}$.

§. 148. Zusatz.

Ist $x^2 + ax + b = 0$ und sind m und n die beiden Werthe von x, für welche die Gleichung gleich Null wird, so ist:

$$x^2 + ax + b = (x - m)(x - n).$$

Es hat nämlich $(x - m)(x - n)$ ebenfalls die Eigenschaft, gleich Null zu werden, sobald man entweder m oder n für x einsetzt.

Da $(x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn$ und außerdem $(x - m)(x - n) = x^2 + ax + b$ ist,

so ist alsdann $a = -(m + n)$ und $b = mn$, d. h. $-a$ ist gleich der Summe der beiden Wurzelwerthe, b gleich dem Produkte derselben.

Es ist also $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$, weil $-8 = (-2) + (-6)$ und $12 = (-2) \cdot (-6)$ ist, und die Werthe von x, für welche $x^2 - 8x + 12$ gleich Null wird, sind

$$+2 \text{ und } +6.$$

D. Quadratische Gleichungen mit zwei und mehreren Unbekannten.

§. 149. Erklärung.

Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten ist quadratisch, sobald sie das Quadrat eines Unbekannten oder das Produkt zweier Unbekannten enthält. Ist unter den Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten dienen, bloß eine quadratisch, sind also die übrigen vom ersten Grade, so drückt man mit Hülfe dieser letztern die Werthe sämmtlicher Unbekannten durch ein und denselben Unbekannten aus, setzt diese Werthe in die erste Gleichung, und erhält dadurch eine quadratische Gleichung mit einem Unbekannten.

Beispiele.

I. $\begin{cases} 1)\ x \cdot y = 8 \\ 2)\ x + y = 6. \end{cases}$

Aus 2) ergiebt sich $x = 6 - y$. Daher ist

$$(6 - y) \cdot y = 8 \text{ oder}$$
$$6y - y^2 = 8$$
$$y^2 - 6y = -8$$
$$y = \begin{cases} +2 \\ +4 \end{cases} \text{ daher } x = \begin{cases} +4 \\ +2. \end{cases}$$

II.
$$\begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 = 12 \\ 2)\ x + y = 5. \end{cases}$$

Aus 2) ergiebt sich $x = 5 - y$. Daher ist

$$(5 - y)^2 + y^2 = 13 \text{ oder}$$
$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 13$$
$$2y^2 - 10y = -12$$
$$y^2 - 5y = -6$$
$$y = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases} \text{ also } x = \begin{cases} +2 \\ +3. \end{cases}$$

III.
$$\begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 + z^2 = 90 \\ 2)\ 3x + 2y + 4z = 13x - 6 \\ 3)\ 4x + 3y - 2z = 3x + 15. \end{cases}$$

2) und 3) geordnet geben

a) $-5x + y + 2z = -3$

b) $x + 3y - 2z = 15.$

Durch Addition erhält man

$$-4x + 4y = 12,$$
$$\text{daher } \underline{y = x + 3.}$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung b) so ist

$$x + 3x + 9 - 2z = 15,$$
$$\text{daher } \underline{z = 2x - 3.}$$

Setzt man nun die Werthe von y und z in die Gleichung 1), so ist

$$x^2 + (x + 3)^2 + (2x - 3)^2 = 90$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 12x + 9 = 90$$
$$6x^2 - 6x = 90 - 18 = 72$$
$$x^2 - x = 12$$
$$x = \begin{cases} -3 \\ +4. \end{cases}$$

Alsdann ist $y = x + 3 = \begin{cases} 0 \\ +7 \end{cases}$

$z = 2x - 3 = \begin{cases} -9 \\ +5 \end{cases}$

§. 150. Erklärung.

Kommen unter den gegebenen Gleichungen zwei oder mehrere quadratische vor, so erhält man im Allgemeinen eine Eliminationsgleichung von höheren Graden. Die Lösung ist aldann nur möglich, wenn die Eliminationsgleichung die Form des fünften Beispiels in §. 147 hat. Die Lösung wird meistens dadurch erleichtert, daß man nicht sogleich die Unbekannten selbst, sondern zunächst eine einfache Verbindung derselben, Produkt, Summe u. s. w. zu bestimmen sucht. Die Unbekannten haben in diesen Fällen mehr als 2 Werthe.

Beispiele.

I. 1) $x^2 + xy = 28$

2) $y^2 + xy = 21.$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49$$
$$x + y = \mp 7.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$x^2 - y^2 = 7$$
$$\text{oder } (x + y)(x - y) = 7.$$

Da $(x + y) = \mp 7$ ist, so ist

$$x - y = \mp 1.$$

Aus $x + y = \mp 7$

$x - y = \mp 1$

ergiebt sich $x = \mp 4;\ y = \mp 3.$

Zweite Lösung. Aus 2) erhält man $x = \frac{21 - y^2}{y}$.

Setzt man dies in Gleichung 1), so ist

$$\left(\frac{21 - y^2}{y}\right)^2 + (21 - y^2) = 28$$

$$\frac{441 - 42y^2 + y^4}{y^2} + 21 - y^2 = 28$$

$$441 - 42y^2 + y^4 + 21y^2 - y^4 = 28y^2$$

$$49y^2 = 441$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \mp 3.$$

II. $\begin{cases} 1)\ x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 120 - 2y \\ 2)\ xy - y^2 = 8. \end{cases}$

Aus 1) ergiebt sich

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y) = 120$$

$$(x + y)^2 + 2(x + y) = 120,$$

$$\text{also } x + y = \begin{cases} -12 \\ +10 \end{cases}$$

und $x = 10 - y$ oder $= -(12 + y)$.

Setzt man einen dieser Werthe in die zweite Gleichung statt x, so erhält man eine einfache quadratische Gleichung.

III. $\begin{cases} 1)\ x^2 - y^2 = a \\ 2)\ x \cdot y \quad = b. \end{cases}$

Aus 1) ergiebt sich

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2 \text{ oder}$$

$$3)\ x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2.$$

Da nun $xy = b$, also $4x^2y^2 = 4b^2$ ist, so erhält man aus 3)

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + 4b^2,$$

$$\text{oder } x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + 4b^2$$

$$\text{also } x^2 + y^2 = \mp\sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Da nun $x^2 - y^2 = a$ ist,

so folgt $x^2 = \dfrac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$; $x = \mp\sqrt{\dfrac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}$

$$y^2 = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}; \quad y = \mp\sqrt{\frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}.$$

Zu derselben Lösung gelangt man, wenn man aus der zweiten Gleichung x bestimmt $= \frac{b}{y}$, und diesen Werth in die erste Gleichung setzt.

IV. $\begin{cases} 1) & x^2 + xy + y^2 = a \\ 2) & x + \sqrt{xy} + y = b. \end{cases}$

Aus 1) erhält man

$$(x + y)^2 = a + xy,$$

aus 2)

$$(x + y)^2 = (b - \sqrt{xy})^2.$$

Es ist also $a + xy = (b - \sqrt{xy})^2 = b^2 - 2b\sqrt{xy} + xy$

und $a = b^2 - 2b\sqrt{xy}$;

$$\sqrt{xy} = \frac{b - a}{2b}$$

$$xy = \left(\frac{b - a}{2b}\right)^2 = p.$$

Die Gleichung 1) geht nun über in:

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + p$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a - 3p;$$

also ist $x + y = \mp \sqrt{a + p}$

$$x - y = \mp \sqrt{a - 3p}$$

daher $$x = \frac{\mp \sqrt{a + p} \mp \sqrt{a - 3p}}{2}$$

$$y = \frac{\mp \sqrt{a + p} \pm \sqrt{a - 3p}}{2}.$$

V. $\begin{cases} 1) & x^4 + y^4 = a \\ 2) & x + y = b. \end{cases}$

Aus 2) ergiebt sich

$$(x + y)^4 = b^4$$

oder 3) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4x^3y^3 + y^4 = b^4$.

Subtrahirt man die Gleichung 3) von Gleichung 1), so erhält man:

$$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = b^4 - a$$

$$\text{oder } 4xy\left(x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2\right) = b^4 - a$$

$$\text{oder } 4xy\left(x^2 + 2xy + y^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a$$

$$\text{oder } 4xy\left((x+y)^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a.$$

Da $x + y = b$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$4xy\left(b^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a.$$

Bezeichnet man xy durch p, so ist

$$4p\left(b^2 - \frac{1}{2}p\right) = b^4 - a$$

$$\text{oder } 4b^2p - 2p^2 = b^4 - a.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich p oder xy leicht finden; ist nun $xy = m$ gefunden, so führt diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung $x + y = b$ leicht zur vollständigen Lösung.

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $8x^2 = 72$
2) $4x^2 - 7 = 3x^2 + 9$
3) $8 - x^2 = 3x^2 - 8$
4) $(x+3)^2 + 7 = 71$
5) $9x^2 + 5 = 17$
6) $3x^2 - 8 = 14x^2 - 47$
7) $\sqrt{x^2+5} = 21 : \sqrt{x^2+5}$
8) $x^2 = 2xb - b^2 + a^2$
9) $16 - 8\sqrt{x} = 25 - x$
10) $\frac{13}{4x} + \frac{\sqrt{10\frac{9}{16} - x^2}}{x} = \frac{x}{2}$
11) $\sqrt{a^2 - x^2} : x = (x : b) - (a : x)$
12) $x^2 + 2x = 35$
13) $x^2 - 8x = -15$
14) $x^2 - 15x = -56$
15) $x^2 + 2x = 63$
16) $x^2 - x = 12$
17) $10x^2 + x = 21$
18) $6x^2 - 2x = 20$
19) $10x^2 - 23x = -12$
20) $\frac{x^2}{10} - 3\frac{3}{5}x = -18$

21) $x+7\sqrt{x}=60$

22) $x+\sqrt{x}=20$

23) $\sqrt{x+3}+x=9$

24) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{10x+6}$

25) $x^4-13x^2=-36$

26) $(x-2)(x+5)=x(2x-3)-2$

27) $(5x+3)(4x-7)=13$

28) $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0$

29) $x^2+8x=5$

30) $8x^2-7x+34=0$

31) $6x-30=3x^2$

32) $\frac{25-3x}{10-x}=\frac{6\frac{1}{2}(3x-25)}{2x+3}+\frac{2x}{2x+3}$

33) $\frac{3}{3-x}+\frac{9}{7x-19}+\frac{65}{12-4x}=\frac{20x}{19-7x}-\frac{x}{18-6x}$

34) $-5+\frac{1}{x+1}=\frac{20}{x^2+x}-\frac{32}{x}$

35) $mnx+gn=mfx^2+gfx$

36) $(a-b)^2+2x(a+b)\sqrt{ab}=abx^2$

37) $\frac{dx^2}{f}+\frac{ace}{g}=\frac{acx}{f}+\frac{edx}{g}$

38) $\frac{x^2}{a+b}+\frac{a-b}{4}=x+\frac{b^2}{4(a+b)}$

39) $\frac{a^2x^2}{c}-\frac{a^2-ab}{a+b}=(a-b)x+\frac{b^2x^2}{c}$

40) $ax=b+\sqrt{cx}$

41) $b^2x-c=\frac{-(ab+c)(1+c)x+ab^3x^2}{bd\sqrt{c}}+\frac{bx^2\sqrt{c}}{d}+1$

42) $\begin{cases} x+y=9 \\ x\,.\,y=18 \end{cases}$

43) $\begin{cases} x-y=4 \\ x\,.\,y=96 \end{cases}$

44) $\begin{cases} xy=18 \\ \frac{x}{y}=2 \end{cases}$

45) $\begin{cases} (x+y):x=5:3 \\ x\,.\,y=6 \end{cases}$

46) $\begin{cases} x\,.\,(x+y)=27 \\ y\,.\,(x+y)=54 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x^2y=30-xy^2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$

48) $\begin{cases} x^4-y^4=175 \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

49) $\begin{cases} x^3-y^3=37 \\ x-y=1 \end{cases}$

50) $\begin{cases} x^3-y^3=14915 \\ x-y=\frac{4930}{xy} \end{cases}$

51) $\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ x+y=11 \end{cases}$

52) $\begin{cases} x^3+y^3=189 \\ x+y=9 \end{cases}$

53) $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=9 \\ y^2+x\sqrt{xy}=18 \end{cases}$

54) $\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=7 \\ \dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9 \end{cases}$

55) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y=21 \end{cases}$

56) $\begin{cases} xy+x=36 \\ xy-y=24 \end{cases}$

57) $\begin{cases} (x+y)^2+x+y=\dfrac{43}{36}+2xy \\ x(x+1)-y(y+1)=-\dfrac{11}{36} \end{cases}$

58) $\begin{cases} \dfrac{3x+4y+3}{xy}=2 \\ 3x-4y=25 \end{cases}$

59) $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=18 \\ x+y=15 \end{cases}$

60) $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=c \\ x+y=a \end{cases}$

61) $\begin{cases} \dfrac{3x+5y}{2}=5x+2 \\ \dfrac{x+7}{y}=x-1 \end{cases}$

62) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-y^2}=\dfrac{y}{x+y} \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{y+3}{2} \end{cases}$

63) $\begin{cases} ax+by=h \\ cx^2+dy^2=k \end{cases}$

64) $\begin{cases} (x+y)^2+x+y=a-2xy \\ x(x+1)-y(y+1)=b \end{cases}$

65) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ y^2=2xz+b \\ cx=dz \end{cases}$

66) $\begin{cases} x(y+z)=a \\ y(x+z)=b \\ z(x+y)=c \end{cases}$

67) $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=a \\ \dfrac{xyz}{y+z}=b \\ \dfrac{xyz}{x+z}=c. \end{cases}$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

68) Ein rechtwinkliger Garten ist dreimal so lang als breit und hat 13200 Quadratfuß Inhalt. Wie lang und wie breit ist derselbe?

69) Bei zwei quadratisch angelegten Baumschulen verhält sich die Anzahl der Bäume, welche die Seite des einen bilden, zu der Anzahl der Bäume, welche die Seite des andern bilden, wie 7 : 8. Wie viel Bäume enthält jede Baumschule, wenn die erste 240 Bäume mehr enthält, als die zweite?

70) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Cathete gleich 2 Fuß. Die Hypotenuse verhält sich zur andern Cathete wie 5 : 3. Wie groß sind die beiden unbekannten Seiten?

71) Wenn in einer Gesellschaft jedes Mitglied so viel Groschen bezahlt, als der dritte Theil der Mitglieder beträgt, so fehlen 8 Groschen an einer bestimmten Summe; bezahlt aber jedes Mitglied so viel Groschen, als die Hälfte der Mitglieder beträgt, so werden 2 Thaler 28 Groschen mehr erhalten, als obige Summe beträgt. Wie stark war die Gesellschaft?

72) Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite gleich a ist?

73) Bei zwei Zahlen ist die Differenz 24 mal größer, als das Verhältniß der ersten zur zweiten, hingegen 6 mal größer als das Verhältniß der zweiten zur ersten?

74) Die Zahl 16 soll in zwei solche Theile zerlegt werden, daß die Summe der Quadrate dieser Theile gleich 178 wird. Welche Theile sind es?

75) Der Umfang eines rechtwinkligen Gartens ist 896 Fuß. Die Verbindungslinie der beiden gegenüberstehenden Ecken beträgt 320 Fuß. Wie lang und wie breit ist der Garten?

76) Der Inhalt eines rechtwinkligen Gartens ist 20000 Quadratfuß; der Umfang beträgt 600 Fuß. Wie lang und wie breit ist derselbe?

77) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse gleich 20 Fuß, der Unterschied der Catheten gleich 7 Fuß. Welches sind die Catheten?

78) Ein rechtwinkliger Garten ist 5000 Quadratfuß größer als das Quadrat der kleinern und 7500 Quadratfuß kleiner als das Quadrat der größern Seite. Welches sind die Seiten?

79) Ein rechtwinkliger Garten ist 2000 Quadratfuß kleiner als das Quadrat der Länge; das Quadrat der Länge ist 3600 Quadratfuß größer als das Quadrat der Breite. Wie lang und wie breit ist der Garten?

80) Von einer Arbeit vollendet **A** die Hälfte und hierauf **B** die andere Hälfte in etwas kürzerer Zeit. Zusammen haben sie 14 Tage gearbeitet und erhalten schließlich gleichviel Bezahlung. Da **B** schneller arbeitet als **A**, so erhält er zwar höheres Tagelohn, hingegen bekommt **A** das Tagelohn für eine größere Anzahl von Tagen. Für die Arbeitszeit des **A** hätte **B** 2 Thlr. 4 Sgr., hingegen **A** für die Arbeitszeit des **B** nur 1 Thlr. 6 Sgr. erhalten. Wie lange hat jeder gearbeitet?

81) Zwei Couriere werden einander entgegengeschickt und haben, als sie sich treffen, zusammen 21 Meilen zurückgelegt. Der erste würde zu dem vom zweiten zurückgelegten Wege $4\frac{1}{2}$ Stunde, der zweite hingegen zu dem vom ersten zurückgelegten Wege 8 Stunden gebraucht haben. Wie viel Stunden waren beide unterwegs?

82) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse $4\frac{2}{7}$ Fuß größer als die eine Cathete, und $1\frac{1}{7}$ Fuß größer als die andere Cathete. Welches sind die drei Seiten?

83) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 280 Fuß. Wird jede Seite desselben um ein gleiches Stück verlängert, so beträgt der Inhalt 6300 Quadratfuß. Wie groß ist dieses Stück und welches sind die Seiten des Rechtecks?

84) Ein Kaufmann kauft eine Partie Tücher; im Ganzen für 48 Thlr. Er verkauft hernach das einzelne Stück um 1 Thlr. theurer und erhält dadurch die ausgelegten 48 Thlr. schon wieder, als noch 4 Tücher unverkauft sind. Wie viele Tücher hatte er gekauft?

85) Es will Jemand eine Uhr ausspielen und giebt deshalb eine Anzahl Loose aus, welche ihm 60 Thlr. bringen. Hätte er das Loos um einen Thaler billiger gegeben, so hätte er 10 Loose mehr machen müssen, um 60 Thlr. zu erhalten. Wie viel Loose hatte er anfangs gemacht?

86) Es verkauft Jemand ein Stück mit 36 Thlr. und gewinnt so viel Prozente, als $^{6}/_{25}$ des Einkaufspreises betragen. Wie theuer hat er das Stück eingekauft?

87) Ein Weinhändler verkauft von zwei Sorten Wein im Ganzen 30 Flaschen für 448 Groschen. Von der bessern Sorte kostet zwar die Flasche 2 Groschen mehr, als von der andern; da er aber mehr Flaschen von der geringern Sorte verkauft hat, so erhält er doch für beide Sorten gleichviel. Was kostete die Flasche einer jeden der beiden Sorten?

88) Es kauft Jemand 10 Actien zu gleichen Preisen. Nach einiger Zeit verkauft er dieselben wieder sämmtlich für 2250 Thlr. und gewinnt so viel Prozente, als der dritte Theil einer Actie beim Einkaufspreis betrug. Wie groß war der Einkaufspreis einer Actie?

89) Jemand gewinnt beim Verkaufe einer Actie so viel Prozente, als der $8^{1}/_{5}$ Theil des Verkaufspreises beträgt; im Ganzen gewinnt er 8 Thlr. Wie groß ist der Einkaufspreis?

90) Es soll eine Zahl gefunden werden, die zu $2^{1}/_{4}$ addirt, dasselbe giebt, wie $2^{1}/_{4}$ durch diese Zahl dividirt. Welche Zahl ist es?

91) Beim Herabfallen eines Steines in einen Brunnen hörte man den Stein nach 4 Sekunden aufschlagen. Wie tief war der Brunnen, wenn der Weg, den ein Körper in x Sekunden zurücklegt $= x^2 . 15$ ist, hingegen der Schall in einer Sekunde sich 1050 Fuß weit fortpflanzt?

92) Wäre ein Garten 1 Fuß breiter, so hätte er 15720 Quadratfuß Oberfläche; wäre er aber 1 Fuß weniger lang, so hätte er 15470 Quadratfuß Oberfläche. Wie lang und wie breit ist der Garten?

93) Zwei Kaufleute legen 2000 Thlr. zu einem Handelsgeschäft zusammen. Der eine läßt sein Geld 17 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 1710 Thlr. zurück; der andere läßt sein Geld 12 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 1040 Thlr. Wie viel hatte jeder eingelegt?

94) Zwei getrennt von einander liegende quadratische Wiesenflächen sind jede von einem 4 Fuß (12 auf 1 Ruthe) breiten Graben rings umgeben und haben mit diesen Gräben zusammen einen Flächeninhalt von $309^{7}/_{9}$ Quadratruthen. Die Seitenzahlen beider Wiesen geben mit einander multiplicirt die Zahl $133^{1}/_{3}$. Wie groß ist die Seite jeder Wiese?

95) Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren A und B gefüllt werden. Läßt man durch die Röhre A so lange Wasser einströmen, daß die Röhre B während dieser Zeit $^{2}/_{3}$ des Behälters hätte füllen können und läßt hernach durch die Röhre B den Behälter vollständig füllen, so dauert das Anfüllen des Behälters im Ganzen 2 Stunden länger, als wenn beide Röhren von Anfang an gleichzeitig in Thätigkeit gewesen wären. In letzterm Falle hätte die Röhre A die Hälfte von dem geliefert, was bei dem ersten Versuche die Röhre B noch nachzufüllen hatte. In welcher Zeit füllt jede Röhre für sich allein den Behälter?

96) Ein Schiff war schon 4 Wochen unterwegs, als es noch eine bedeutende Anzahl Matrosen eines gescheiterten Schiffes aufnahm. Obwohl der anfangs mitgenommene Vorrath an Brod für 500 Mann auf 9 Wochen

gereicht hätte, so reichte der Vorrath, trotzdem daß die tägliche Ration um $\frac{1}{2}$ Pfund verringert wurde, für die jetzt vergrößerte Zahl blos noch auf 6 Wochen aus, weil nämlich 10 % des Vorraths verdorben waren, und außerdem die Ratten so viel gefressen hatten, als anfangs 10 Mann in 11 Wochen erhielten. Wäre die Ration nicht verringert worden, so wären nach 4 Wochen blos noch 520 Pfund vorhanden gewesen. Die Offiziere, $\frac{1}{20}$ der anfänglichen Mannschaft, erhielten täglich $\frac{1}{4}$ so viel Quart Wein, als anfangs jeder Mann täglich Pfunde Brod erhalten hatte, und brauchten wöchentlich 70 Quart Wein. Wie stark war die Mannschaft, wie groß die tägliche Ration, und wie viel Matrosen wurden aufgenommen?

97) Ein genau rechtwinkliger, aber nicht würfeliger Stein soll als Fußgestell benutzt und deßhalb die 4 Seitenwände abgeschliffen werden. Je nachdem man aber die verschiedenen Flächen des Steines als Grundflächen benutzt, erhält man als Oberflächen für je vier Seitenwände 4896, 4970 oder 5106 Quadratzoll. Wie groß sind die drei verschiedenen Seitenkanten des Steines?

98) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden mittlern Glieder = a, die Summe der beiden äußern = b, und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder = c. Welche Proportion ist es?

99) Die Differenz der beiden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion ist a, die Differenz der beiden äußern = b, und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder = c. Welche Proportion ist es?

100) Die Summe zweier Zahlen gleich a, die Summe ihrer fünften Potenzen gleich b. Welches sind diese Zahlen?

Auflösungen.

1) $x = \mp 3$; 2) $x \mp 4$; 3) $x = \mp 2$; 4) $x = +5$; -11;

5) $x = \mp \sqrt{4:3} = 1{,}154\ldots$; 6) $x = \mp \sqrt{39:11} = 1{,}882\ldots$;

7) $x = \mp 4$; 8) $x = b \mp a$; 9) $\sqrt{x} = -1$; $+9$; 10) $x = \mp 3$;

11) $x = \mp \sqrt{2ab - b^2}$; 12) $x = 5$; -7; 13) $x = 3$; 5;

14) $x = 7$; 8; 15) $x = 7$; -9; 16) $x = +4$; -3;

17) $x = \frac{7}{5}$; $-\frac{3}{2}$; 18) $x = 2$; $-\frac{5}{3}$; 19) $x = \frac{4}{5}$; $\frac{3}{2}$;

20) $x = 30$; 6; 21) $\sqrt{x} = 5$; -12; 22) $\sqrt{x} = 4$; -5;

23) $x = 6$*); 24) $x = 3$; 19; 25) $x = \mp 2$; ∓ 3; 26) $x = 2$; 4;

---

*) Der zweite Werth $x = 13$ gehört zu der Gleichung

$$-\sqrt{x+3} + x = 9.$$

27) $x=2;\ -\frac{17}{20}$; 28) $x=6\frac{3}{7};\ 3\frac{1}{4}$; 29) $x=-4\mp\sqrt{21}$;

30) $x=\frac{7\mp\sqrt{-1039}}{16}$; 31) $x=1\mp\sqrt{-9}$; 32) $x=13\frac{22}{31};\ 8$;

33) $x=7\frac{22}{113};\ 2\frac{1}{2}$; 34) $x=6;\ -\frac{2}{5}$; 35) $x=\frac{n}{f};\ -\frac{g}{m}$;

36) $x=\left\{(a+b)\mp\sqrt{2a^2+2b^2}\right\}:\sqrt{ab}$; 37) $x=\frac{ac}{d};\ \frac{ef}{g}$;

38) $x=\frac{1}{2}\left\{(a+b)\mp\sqrt{3b^2+2ab}\right\}$; 39) $x=\frac{c\mp\sqrt{c^2+4ac}}{2(a+b)}$;

40) $x=\frac{2ab+c+\sqrt{4abc+c^2}}{2a^2}$; 41) $x=\frac{bd\sqrt{c}}{ab+c};\ \frac{1+c}{b^2}$;

42) $x=3;\ 6;\ y=6;\ 3$; 43) $x=12;\ -8;\ y=8;\ -12$;

44) $x=\mp 6;\ y=\mp 3$; 45) $x=\mp 3;\ y=\mp 2$;

46) $x=\mp 3;\ y=\mp 6$; 47) $x=3;\ 2;\ y=2;\ 3$;

48) $x=\mp 4;\ y=\mp 3$; 49) $x=4;\ -3;\ y=3;\ -4$;

50) $x=34;\ -29;\ y=29;\ -34$; 51) $x=5;\ 6;\ y=6;\ 5$;

52) $x=5;\ 4;\ x=4;\ 5$; 53) $x=\mp 1;\ y=\mp 4$;

54) $x=6;\ y=3$; 55) $x=4;\ -3;\ y=5;\ 12$;

56) $x=9;\ 4;\ y=3;\ 8$; 57) $x=\frac{1}{3};\ -\frac{4}{3};\ y=\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}$;

58) $x=11;\ \frac{4}{3};\ y=2;\ -\frac{21}{4}$; 59) $x=12;\ 3;\ y=13\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}$;

60) $x=\frac{a+2c\mp\sqrt{a^2+4ac-4c^2}}{4};\ y=\frac{3a-2c\pm\sqrt{a^2+4ac-4c^2}}{4}$;

61) $x=3;-\frac{13}{7};\ y=5;-\frac{9}{5}$; 62) $x=9;\ -1;\ y=3;\ -2$;

63) $x=\frac{adh\mp b\sqrt{a^2dk-cdh^2+b^2ck}}{a^2d+b^2c}$;

$y=\frac{bch\pm a\sqrt{a^2dk-cdh^2+b^2ck}}{a^2d+b^2c}$;

64) $x = \frac{-1 \mp \sqrt{2a+2b+1}}{2}$; $y = \frac{-1 \mp \sqrt{2a-2b+1}}{2}$ *);

65) $x = \frac{d\sqrt{a-b}}{c+d}$; $y = \frac{\sqrt{2acd+b(c^2+d^2)}}{c+d}$; $z = \frac{c\sqrt{a-b}}{c+d}$;

66) Bezeichnet man $(b+c-a)$ durch **A**, $(a+c-b)$ durch **B**, $(a+b-c)$ durch **C**, so ist $x = \mp\sqrt{BC:2A}$;
$y = \mp\sqrt{AC:2B}$; $z = \mp\sqrt{AB:2C}$;

67) Bezeichnet man $(-ab+ac+bc)$ durch **A**, $(ab-ac+bc)$ durch **B**, $(ab+ac-bc)$ durch **C**, abc durch **P**, so ist $x = \mp\sqrt{2PB:AC}$;
$y = \mp\sqrt{2PA:BC}$; $z = \mp\sqrt{2PC:AB}$;

68) 120 Fuß breit, 360 Fuß lang; 69) I. = 784 B., II = 1024 B.;

70) $1\frac{1}{2}$ Fuß; $2\frac{1}{2}$ Fuß; 71) 24 Personen; 72) Die Höhe $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$;

73) I. = 12 oder 4; II. = 24 oder −8; 74) 13 und 3;

75) 192 Fuß lang; 256 Fuß breit, oder umgekehrt;

76) 200 Fuß lang; 100 Fuß breit, oder umgekehrt;

77) 10,2... Fuß und 17,2... Fuß; 78) 100 Fuß; 150 Fuß;

79) 100 Fuß lang; 80 Fuß breit;

80) A arbeitete 8 Tage und erhielt täglich 6 Sgr.; **B** arbeitete 6 Tage und erhielt täglich 8 Sgr.;

81) Jeder 6 Stunden; der erste macht in dieser Zeit 12, der andere 9 Meilen;

82) 4,27... Fuß; 7,41... Fuß; 8,55... Fuß;

83) Die Verlängerung = 10 Fuß; die Seiten = 60 Fuß, 80 Fuß;

84) 16 Stück; 85) 20 Loose; 86) Zu $33\frac{1}{3}$ Thlr.;

87) 14 Flaschen zu 16 Sgr., 16 Flaschen zu 14 Sgr.; 88) 150 Thlr.;

89) 80 Thlr.; 90) $\frac{3}{4}$ oder −3; 91) 215,9... Fuß;

92) Die Breite = 130 Fuß oder 119 Fuß; die Länge = 120 Fuß oder 131 Fuß;

93) Der erste 1200 Thlr., der zweite 800 Thlr.;

94) I. = 10 Ruthe; II. = $13\frac{1}{3}$ Ruthe;

95) Die erste in 6, die zweite in 3 Stunden;

96) Anfangs 400 Matrosen, von denen jeder täglich 2 Pfd. Brod erhielt; aufgenommen wurden 120 Matrosen;

97) 34, 35 und 37 Zoll;

---

*) Die zwei Werthe von y können beliebig mit den für x gefundenen Werthen verbunden werden, so daß man also 4 Paare zusammengehöriger Werthe von x und y hat.

98) Die Proportion ist $\frac{1}{2}\left\{b-\sqrt{c-a^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{a-\sqrt{c-b^2}\right\} =$

$= \frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{c-b^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{b+\sqrt{c-a^2}\right\}$;

99) Die Proportion ist $\frac{1}{2}\left\{-b+\sqrt{c-a^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{-a+\sqrt{c-b^2}\right\} =$

$= \frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{c-b^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{b+\sqrt{c-a^2}\right\}$;

100) Das Produkt der beiden Zahlen $= \frac{1}{2}\left\{a^2 \mp \sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right\} = p$;

die Zahlen sind $\frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{a^2-4p}\right\}$ und $\frac{1}{2}\left\{a-\sqrt{a^2-4p}\right\}$.

Fernere Berichtigungen.

Seite 27 Zeile 12 von oben lies Dividenden statt Divisor.
- 31 Aufgabe 40 lies im ersten Gliede zy statt xy.
- 34 Auflösung 4 lies vor dem vierten Gliede das Zeichen + statt −
- 49 Aufgabe 21 lies im Nenner 29 statt 28.
- 56 Zeile 5 von unten lies = ab statt = b.
- 58 Zeile 5 und 6 von oben lies 6 statt b.
- 73 §. 115 Lehrsatz 3 lies $b < d$ statt $b > d$.
- 83 Aufgabe 17 lies $(2+4x)$ statt $(10-4x)$; Aufgabe 26 lies 5 statt 4 als Nenner zu 2x; Aufgabe 32 lies $(4x-17)$ statt $(2x-7)$.
- 84 Aufgabe 53 verbinde die zwei Glieder der rechten Seite durch + statt durch −.
- 85 Aufgabe 65 lies und ferner statt und diese.
- 89 Aufgabe 122 lies b statt 6.
- 101 Aufgabe 26 lies $\sqrt{y}$ statt $\sqrt{x}$ als Nenner zu b; Aufgabe 29 lies $(cy-b)$ statt $(cx-b)$.
- 102 Aufgabe 33 lies 3y statt 3x; Aufgabe 38 lies $= -1$ statt $= 1$.
- 122 Aufgabe 64 lies $+2xy$ statt $-2xy$.
- 123 Aufgabe 83 ergänze: der Inhalt desselben 4800 □′ nach den Worten: 280 Fuß.

Verlag von Gebrüder Katz in Dessau.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Mathematische Abhandlungen

von

Dr. Oskar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik der königl. sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mit einer Figurentafel.

gr. 8. 9½ Bogen. Preis 1 Thlr. 6 Sgr.

Inhalt. I. Ueber das Theorem von Mac Laurin. — II. Die Bürmann'sche Reihe. — III. Ueber approximative Quadraturen. — IV. Ueber ein Doppelintegral mit zwei willkürlichen Funktionen. — V. Ueber die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

Beitrag zur Berichtigung

der

THEORIE DER TURBINEN

von

Johann Andreas Schubert,

Prof. der Ingenieur-Wissenschaften an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mit 4 Tafeln Abbildungen in Steindruck.

gr. 8. 14 Bogen elegant brochirt 1 Thlr.

Die Kräfte der unorganischen Natur

in ihrer Einheit und Entwicklung.

Von

Dr. C. A. Werther.

Mit 5 lithogr. Figurentafeln. 1 Thlr. 15 Sgr.

Um die Naturerscheinungen zu begreifen, sind das Wesen der Naturkräfte und die Gesetze ihres Zusammenwirkens zu erforschen. Dazu einen Beitrag zu liefern, ist die Bestimmung der hier angezeigten Schrift. Der Verfasser hat die Lösung seiner Aufgabe auf einem Wege gesucht, welchen er aus dem Entwicklungsgange des denkenden Geistes rechtfertigt, und weist in Uebereinstimmung mit den feststehenden Resultaten der empirischen Naturforschung nach, daß die die Naturerscheinungen bewirkenden Kräfte eine Reihenfolge von Entwicklungsstufen der allgemeinen Naturkraft darstellen, über welche diese sich allmälig zur Darstellung der Organismen und so zur Bethätigung als geistige Kraft erhebt.

Cameralchemie

für

Land- und Forstwirthe, Techniker, Sanitäts-, Cameral- und Justizbeamte.

In drei Abtheilungen bearbeitet

von

Dr. Franz Döbereiner.

Mit zahlreichen Holzschnitten. gr. 8. 98 Bogen. broch. Preis 5½ Thlr.

Der Zweck, welcher den Verfasser bei der Bearbeitung dieses Werkes vorzugsweise leitete, war: den Land- und Forstwirth nicht allein mit den zur rationellen Bearbeitung der Felder und Forsten nothwendigen chemischen Lehrsätzen und Erfahrungen bekannt zu machen, sondern ihm auch die Mittel zu zeigen, wie die Produkte der Land- und Forstwirthschaft verwendet werden; — den Techniker mit den Verwendungen der verschiedenen Naturkörper und mit den Methoden bekannt zu machen, wie dieselben bearbeitet und die Produkte auf ihre Güte und Reinheit geprüft werden; — dem Sanitätsbeamten Belehrung über die Gegenstände zu geben, welche auf die Gesundheit der Menschen und Thiere nachtheilig wirken, und ihm das Verfahren zu zeigen, wo dieselben erkannt werden, damit er, auf bestimmte Erscheinungen gestützt, ihre Beseitigung oder Vernichtung veranlassen kann; — endlich aber auch den Beamten, welchen die Wahrung gewisser Gewerbsinteressen oder die Ermittelung und Bestrafung von Vergiftungen obliegt, mit denjenigen chemischen Erscheinungen und Erfahrungen bekannt zu machen, welche sich auf derartige Fälle beziehen und gewöhnlich von Sachverständigen ermittelt werden, aber dadurch doch von ihnen ermittelt werden können. Das Werk umfaßt also die Agrikultur- und Forstchemie, die technische und die polizeiliche und gerichtliche Chemie.

Anthropologische Briefe.

Die Wissenschaft vom Menschen in seinem Leben und in seinen Thaten.

Allen Gebildeten, vorzüglich allen Lehrern und Erziehern

gewidmet von

Dr. Karl Schmidt.

Mit 55 lithogr. Abbildungen. gr. 8. 36½ Bog. broch. Preis 3 Thlr.

Die hohe Anschauung, die der Verfasser von seiner Wissenschaft in sich trägt, giebt seinem Werke eine große Wärme und Innerlichkeit. Das Höchste und Edelste ist ihm der Mensch, also ist ihm auch die Lehre vom Menschen die höchste und edelste, die Basis aller anderen Wissenschaften, der sicherste Grund der Ethik, Politik, Kunst, Religion und Pädagogik, mithin auch die nützlichste, die praktischste Wissenschaft. Er betrachtet das kosmische Leben und Menschenthum, d. h. das Verhältniß des Menschen zu dieser Welt; die Gattungseigenschaften, das Wesen des Menschen, d. h. seinen Organismus; die Spezies der Menschheit, d. h. das Sein und Werden des Menschen, und endlich das Individuum, das Resultat von Gattung und Spezies. Den Schluß bildet eine Geschichte der Anthropologie nach den Ergebnissen der Gegenwart und Vergangenheit. Dieser Fingerzeig auf das bedeutende Buch möge vor der Hand genügen.

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,
Lehrer am Gymnasium zu Parchim.

Zweiter Cursus der Arithmetik.

Elemente der ebenen Trigonometrie.

Dessau, 1860.
Aue'sche Buchhandlung.
(Moritz Fels.)

Zweiter Curſus

der

Arithmetik.

Elemente

der

ebenen Trigonometrie.

Vorwort.

Vorliegender Theil ist, wie die frühern, zunächst für den Schulgebrauch bestimmt, und dieser Zweck ist daher maßgebend gewesen bei der Anordnung des Ganzen, wie bei der Bearbeitung des Einzelnen. In Bezug auf die Wahl des zu behandelnden Stoffes war zu beachten, daß die Ausdehnung des mathematischen Unterrichts nicht auf allen Gymnasien dieselbe ist, daß z. B. die Lehre von den unendlichen Reihen und von den höheren Gleichungen hier in den Bereich des Schulunterrichts gezogen, dort einem spätern Studium überlassen werden. Derartige Capitel von bedingter Wichtigkeit konnten zwar nicht übergangen, konnten aber auch nicht als eine später zu benutzende Grundlage betrachtet werden, und es mußten daher, damit sie unbeschadet des Ganzen überschlagen werden könnten, einige Aufgaben in zweifacher Art ihre Lösung finden. So wird zwar der geeignetste Weg zur Berechnung der Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen immer bei den unendlichen Reihen zu suchen sein, aber wenn dies Capitel überschlagen wird, so muß wenigstens die Möglichkeit einer andern Art der Berechnung gezeigt werden, um so mehr, als z. B. bei den Logarithmen das Mittel der Interpolation auch in Wirklichkeit das zuerst angewendete gewesen ist. Bei der Trigonometrie ist aus demselben Grunde die Verallgemeinerung des Sinus und Cosinus ausführlich entwickelt worden, obgleich sich dieselbe auch in dem Capitel über unendliche Reihen findet.

Daß verschiedene, dem Wesen nach zusammengehörende Stoffe, wie der allgemeine binomische Lehrsatz und der mit ganzen Exponenten, die einfachen Progressionen und die von höheren Graden, u. A., nicht an derselben Stelle abgehandelt worden sind, bedarf wol bei einem Schulbuche keiner weitern Rechtfertigung, höchstens der Erwähnung der Absichtlichkeit.

Bei der Bearbeitung des Einzelnen war das Bestreben, zunächst Alles in möglichster Kürze zu behandeln, da häufig die Vertrautheit der Schüler mit ihrem mathematischen Lehrbuche in umgekehrtem Verhältnisse zum Volumen desselben steht, und da durch den mündlichen Vortrag zwar der zu großen Kürze, nicht aber der Breite abgeholfen werden kann. Größere Schwierigkeiten, als die Kürze der Darstellung, bot das Bestreben, das Einzelne nicht als eine vollendete, in sich abgeschlossene Wahrheit hinzustellen, sondern den Gedankengang zu zeigen, auf dem man zu der Aufgabe selbst und dann zu ihrer Lösung gelangt. Es ist dies im mündlichen Vortrage meistens leicht zu erreichen, in einem Lehrbuche nur für vereinzeltere Fälle.

Parchim 1860.

H. Gerlach.

Inhalt.

Zweiter Cursus der Arithmetik.

Seite

Erstes Capitel. Von den Potenzen 1
Zweites Capitel. Von den Wurzeln 8
A. Von den ganzen Wurzeln 8
B. Von den allgemeinen Wurzeln 13
Anhang. Von einigen bei Wurzeln vorkommenden Reductionen . . 16
Drittes Capitel. Von den Logarithmen 20
Viertes Capitel. Von den Progressionen 27
A. Die arithmetische Progression 27
B. Die geometrische Progression 29
C. Von der Interpolation 31
Anhang zu Cap. III. u. IV. Von der zusammengesetzten Zinsrechnung 34
A. Zinseszinsrechnung 34
B. Rentenrechnung 37
Fünftes Capitel. Von den combinatorischen Operationen, vom binomischen und polynomischen Lehrsatze 41
A. Von den Permutationen 41
B. Von den Variationen 44
C. Von den Combinationen im engern Sinne 45
D. Der binomische und polynomische Lehrsatz 48
Anhang. Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung 50
Sechstes Capitel. Von den Kettenbrüchen 57
Siebentes Capitel. Von den unbestimmten oder diophantischen Aufgaben 68
A. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades 68
B. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades 73

Seite

Achtes Capitel. Von den unendlichen Reihen 78
A. Von den Funktionen und von der Methode der unbestimmten Coefficienten 78
B. Der allgemeine binomische Lehrsatz 82
C. Von der Entwicklung der Potenzen in Reihen 86
D. Von der Entwicklung der Logarithmen in Reihen 89
E. Von der Entwicklung der goniometrischen Funktionen in Reihen 92
Neuntes Capitel. Von den endlichen Summen- und Differenzenreihen 100
A. Von den Summenreihen 100
B. Von den Differenzenreihen 102
Zehntes Capitel. Von den höhern Gleichungen 107
A. Allgemeine Eigenschaften der höhern Gleichungen 108
B. Transformation der höhern Gleichungen 110
C. Auflösung der höhern Gleichungen 114

Elemente der ebenen Trigonometrie.

Einleitung 121

A. Analytische Trigonometrie.

Erstes Capitel. Von den Sinus und Cosinus der spitzen Winkel 123
Zweites Capitel. Von den Sinus und Cosinus beliebiger Summen und Differenzen von Winkeln 129
Drittes Capitel. Von den Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten 136

B. Angewandte Trigonometrie.

Viertes Capitel. Von den einfachen trigonometrischen Aufgaben 144
Fünftes Capitel. Von den zusammengesetzten trigonometrischen Aufgaben 152

Arithmetik.

Erstes Capitel.

Von den Potenzen.

§. 1. Erklärung.

Ein Produkt von m gleichen Faktoren, von denen jeder a ist, bezeichnet man kürzer durch a^m (ausgesprochen a hoch m, oder a in der m^{ten} Potenz). Man nennt a^m eine Potenz, a den Dignanden, m den Exponenten. Der Dignand ist beliebig, aber der Exponent muß eine positive, ganze Zahl sein. Nach der Erklärung ist:

$$a^4 = a.a.a.a;$$
$$2^3 = 2.2.2 = 8.$$

Für die Potenzen gelten die Grundsätze:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$.

2) Ist $a = b$, so ist auch $m^a = m^b$.

Anm. Man nennt die zweite Potenz auch das Quadrat, die dritte den Cubus oder Würfel, die vierte das Biquadrat.

§. 2. Lehrsätze.

1) $(a.b)^m = a^m.b^m$;

2) $(a:b)^m = a^m : b^m$;

3) $(a \mp b)^m = (a \mp b)^m$.

Die Beweise zu 1) und 2) ergeben sich, wenn man statt der Potenzen die durch dieselben bezeichneten Produkte schreibt.

Der Lehrsatz 3) soll anzeigen, daß $(a \mp b)^m$ sich nicht in einfacher Art umgestalten läßt. Als besondere Fälle sind zu merken:

$$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2;$$
$$(a \mp b)^3 = a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3.$$

§. 3. Lehrsätze.

1) $a^{(m+1)} = a^m . a;$
2) $a^{(m-1)} = a^m : a;$
3) $a^{(m+n)} = a^m . a^n;$
4) $a^{(m-n)} = a^m : a^n;$
5) $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$

Beweise zu 1) und 2). Wird der Exponent m der Potenz a^m um 1 vergrößert oder verkleinert, so wird dadurch angezeigt, daß zu den m Faktoren a noch ein neuer Faktor a hinzutreten, oder daß einer jener m Faktoren wegfallen soll, daß also die Potenz a^m entweder mit a multiplicirt, oder durch a dividirt werden soll.

Beweise zu 3) und 4). Dieselben ergeben sich aus 1) und 2). Bei 4) ist zu bemerken, daß $m > n$ sein muß (nach §. 1).

Beweis zu 5). Zerlegt man mn in seine Summanden, so ist:

$$mn = \overset{1}{m} + \overset{2}{m} + \overset{3}{m} + \ldots\ldots + \overset{n}{m},$$

oder auch $mn = \overset{1}{n} + \overset{2}{n} + \overset{3}{n} + \ldots\ldots + \overset{m}{n}.$

Daher ist $a^{mn} = a^{(m+m+m+\ldots\ldots+m)} = (a^m . a^m . a^m \ldots\ldots a^m) = (a^m)^n,$

oder auch $a^{mn} = a^{(n+n+n+\ldots\ldots+n)} = (a^n . a^n . a^n \ldots\ldots a^n) = (a^n)^m.$

§. 4. Beispiele.

Nach den gegebenen Formeln ist:

1) $(2abc)^3 = 8a^3b^3c^3;$
2) $2(abc)^3 = 2a^3b^3c^3;$
3) $(a^3)^4 = a^{12};$
4) $(a^7 . a^3) : a^6 = a^4;$
5) $(a^5 : a^7) = 1 : a^2;$
6) $12^4 = 2^4 . 6^4 = 3^4 . 4^4;$
7) $(3^4 . 3^5) : 3^7 = 3^2 = 9;$
8) $(2:3)^4 = 2^4 : 3^4 = 32 : 81;$
9) $8^3 : 8^5 = 1 : 8^2 = 1 : 64;$
10) $a^3 + b^3 = a^3 + b^3.$

§. 5. Erklärung.

Der Quotient $a^m : a^n$ ist nach 4) des §. 3 gleich der Potenz a^{m-n}, wenn $m > n$ ist. Wäre $m = n$, oder $m < n$, so würde die Formel

nicht mehr anwendbar sein. In diesen Fällen würde man als Resultat erhalten, z. B. $a^5 : a^5 = 1$; $a^5 : a^7 = 1 : a^2$; nicht aber $a^5 : a^5 = a^0$; $a^5 : a^7 = a^{-2}$. Man kann jedoch auch in diesen Fällen $(a^m : a^n)$ durch $a^{(m-n)}$ bezeichnen, wenn man unter letzterem Ausdrucke nicht eine Potenz versteht, wie sie in §. 1 erklärt worden ist, sondern ihn als ein symbolisches Zeichen für den Quotienten $a^m : a^n$ betrachtet. Demnach bedeutet also $a^{(m-n)}$, wo m und n beliebige, jedoch positive ganze Zahlen sind, nicht ein Produkt von (m—n) Faktoren, von denen jeder a ist, sondern den Quotienten $a^m : a^n$, und wird eine Differenzpotenz genannt, im Gegensatz zu den in §. 1 erklärten, den ganzen Potenzen.

§. 6. Zusatz.

Für die Differenzpotenzen gelten die Grundsätze des §. 1 ebenfalls; auch die Lehrsätze der §§. 2 und 3 sind noch gültig, wenn man unter den Exponenten m und n beliebige Differenzen positiver, ganzer Zahlen versteht. Auch für diesen Fall ist:

1) $(a.b)^m = a^m . b^m$;

2) $(a:b)^m = a^m : b^m$;

3) $a^{(m+n)} = a^m . a^n$;

4) $a^{(m-n)} = a^m : a^n$;

5) $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Beweis zu 1). Ist $m = (v-w)$, so ist:

$$ab^{(v-w)} = (ab)^v : (ab)^w = (a^v b^v) : (a^w b^w) = (a^v : a^w) . (b^v : b^w) = a^{(v-w)} . b^{(v-w)} = a^m . b^m.$$

Beweis zu 2). Er wird ebenso geführt.

Beweis zu 3). Ist $m = (v-w)$, $n = (x-z)$, so ist:

$$a^{(v-w)+(x-z)} = a^{(v+x)-(w+z)} = a^{v+x} : a^{w+z} = (a^v . a^x) : (a^w . a^z) = (a^v : a^w) . (a^x : a^z) = a^{(v-w)} . a^{(x-z)} = a^m . a^n.$$

Beweis zu 4). Er wird geführt wie der Beweis zu 3).

Beweis zu 5). Ist $m = (v-w)$, $n = (x-z)$, so ist:

$$a^{(v-w).(x-z)} = a^{(vx+wz)-(vz+wx)} = (a^{vx} . a^{wz}) : (a^{vz} . a^{wx}).$$

Ebenso ist $[a^{(v-w)}]^{(x-z)} = (a^v : a^w)^{(x-z)} = (a^v)^{(x-z)} : (a^w)^{(x-z)} = [(a^v)^x : (a^v)^z] : [(a^w)^x : (a^w)^z] = (a^{vx} . a^{wz}) : (a^{vz} . a^{wx})$.

Es ist also $a^{mn} = (a^m)^n$. In derselben Art wird bewiesen, daß $a^{mn} = (a^n)^m$ ist.

§. 7. Zusatz.

Aus der Erklärung der Differenzpotenzen ergeben sich noch folgende Sätze:

1) $a^0 = 1$;

2) $a^{-m} = 1 : a^m$.

Beweis zu 1). Es ist $a^0 = a^{x-x} = a^x : a^x = 1$.

Beweis zu 2). Es ist $a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = 1 : a^m$.

§. 8. Zusatz.

Mit Differenzpotenzen rechnet man nach §. 6 wie mit ganzen Potenzen. Es ist daher z. B.:

$a^5 . a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^2$; $\quad a^3 : a^{-4} = a^{3-(-4)} = a^7$;

$a^{-3} . a^{-4} = a^{-7}$; $\quad a^{-3} : a^{-4} = a^1$;

$a^4 . a^{-6} = a^{-2}$; $\quad a^{-6} : a^{-4} = a^{-2}$;

$a^4 . a^0 = a^4$; $\quad a^{-3} : a^0 = a^{-3}$.

§. 9. Zusatz.

Die m^{te} Potenz von 0 ist wiederum 0, wenn m positiv, hingegen gleich $1:0$, wenn m negativ ist.

Ein ächter Bruch wird durch fortgesetztes Potenziren immer kleiner und nähert sich immer mehr der Null, ein unächter Bruch wird hingegen immer größer; sind die Exponenten negativ, so findet das Umgekehrte statt.

Die m^{te} Potenz einer negativen Zahl ist negativ, wenn m ungerade, hingegen positiv, wenn m gerade ist.

§. 10. Zusatz.

Sollen algebraische Summen mit Potenzausdrücken durch die vier ersten Operationen verbunden werden, so behandelt man die Potenzausdrücke unter Berücksichtigung der in diesem Kapitel entwickelten Formeln wie Produkte, und verfährt nach den früher für einfache Ausdrücke gegebenen Regeln.

Beispiele.

I. Addition und Subtraktion.

Aufgabe: $(5a^5b^7 - 2a^{-3}b^6 + 3a^{-2}b^{-3}) + (6a^4c^2 + 5a^{-3}b^6 - 7a^5b^7) + (2a^{-2}b^{-3} - 4a^4c^2 + 4a^5b^7) - (2a^4c^2 - 4a^{-2}b^{-3} - 3a^{-3}b^6)$.

Berechnung. Man löst die Klammern, schreibt die Glieder untereinander, welche gleiche Potenzen gleicher Buchstaben haben, und addirt. Man erhält:

$$+5a^5b^7-2a^{-3}b^6+3a^{-2}b^{-3}+6a^4c^2$$
$$-7a^5b^7+5a^{-3}b^6+2a^{-2}b^{-3}-4a^4c^2$$
$$+4a^5b^7+3a^{-3}b^6+4a^{-2}b^{-3}-2a^4c^2$$

Summe: $+2a^5b^7+6a^{-3}b^6+9a^{-2}b^{-3}$.

II. Multiplication.

Aufgabe: $(15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6).(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)$.

Berechnung. Man multiplicirt die Summanden des ersten Faktoren mit $8a^{-2}b^2$, dann mit $-3a^{-1}b^4$, und addirt die erhaltenen Ausdrücke. Bei der Ausführung der Multiplication beachtet man die Formeln dieses Kapitels und setzt z. B.:

$$15a^{-6}b^2.8a^{-2}b^2=15.8.a^{-6}.a^{-2}.b^2.b^2=120a^{-8}b^4.$$

Die Multiplication führt man nach dem gewöhnlichen Schema aus.

$$\begin{array}{l}
15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6 \\
8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4 \\
\hline
120a^{-8}b^4-56a^{-7}b^6+48a^{-6}b^8 \\
\quad -45a^{-7}b^6+21a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10} \\
\hline
120a^{-8}b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}.
\end{array}$$

III. Division.

Aufgabe: $(-2a^{-8}b^5+17a^{-4}b^6-5b^7-24a^4b^8):(2a^{-3}b^3-3ab^4)$.

Berechnung. Man verfährt ebenso, wie bei der Division einfacher algebraischer Summen, nach dem gewöhnlichen Schema.

$$\begin{array}{l|l}
2a^{-3}b^3-3ab^4 & -2a^{-8}b^5+17a^{-4}b^6-5b^7-24a^4b^8 \;\big|\; -a^{-5}b^2+7a^{-1}b^3+8a^3b^4 \\
: & \underline{-2a^{-8}b^5+3a^{-4}b^6} \\
 & \quad +14a^{-4}b^6-5b^7-24a^4b^8 \\
 & \quad \underline{+14a^{-4}b^6-21b^7} \\
 & \qquad +16b^7-24a^4b^8 \\
 & \qquad \underline{+16b^7-24a^4b^8}
\end{array}$$

IV. Reductionen zusammengesetzter Ausdrücke.

Aufgabe: $\dfrac{14a^4b^3-10a^3b^4+6a^2b^5}{7a^2b^2cd^2-5ab^3cd^2+3b^4cd^2}$ soll reducirt werden.

Berechnung:

Es ist $\dfrac{14a^4b^3-10a^3b^4+6a^2b^5}{7a^2b^2cd^2-5ab^3cd^2+3b^4cd^2}=\dfrac{2a^2b^3(7a^2-5ab+3b^2)}{b^2cd^2(7a^2-5ab+3b^2)}=\dfrac{2a^2b}{cd^2}$.

Aufgabe: $\left\{\dfrac{5}{(\frac{1}{3})^3}+\dfrac{3:8^2}{\frac{1}{5}}\right\}:\dfrac{15^2}{2^5}$ soll reducirt werden.

Berechnung. Es ist $\left\{\frac{5}{((\frac{4}{3})^3}+\frac{3:8^2}{\frac{1}{5}}\right\}:\frac{15^2}{2^5}=\left\{\frac{5.3^3}{4^3}+\frac{3.5}{8^2}\right\}\cdot\frac{2^5}{15^2}=$

$=3.5\left\{\frac{3^2}{4^3}+\frac{1}{8^2}\right\}\cdot\frac{2^5}{15^2}=\frac{3.5.(3^2+1).2^5}{2^6.15^2}=\frac{3^2+1}{2.15}=\frac{1}{3}.$

Aufgaben.

I. Multiplication und Division.

1) $(2a^4+5a^3b-a^2b^2+4ab^3).(3a^2+8ab-b^2)$;

2) $(a^4+4a^3x+12a^2x^2+16ax^3+16x^4).(a^2-4ax+4x^2)$;

3) $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3).(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)$;

4) $15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6).(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)$;

5) $(3x^{-2}y^{-7}-2x^2y^{-5}+8x^6y^{-3}).(2x^{-3}y^{-5}+6xy^{-3}+12x^5y^{-1})$;

6) $(2a^{3-2m}b^{n+3}+3a^{m+1}b^{n+2}+c^p).(a^{m-1}b^{1-2m}-ca^p)$;

7) $(a^{n-2}b^{1-3m}-6a^{n-3}b^{2-3m}+5a^{n-4}b^{3-3m}).(a^{n-1}b^{-3m}+2a^{n-2}b^{1-3m}-3a^{n-3}b^{2-3m})$;

8) $\left(\frac{2a^2b^3}{3c^3}-\frac{5a^3b^4}{2c^3d}-\frac{3a^3b^5}{4c^4d^2}\right).\left(\frac{2a^2b^3}{3c^3}+\frac{5a^3b^4}{2c^3d}+\frac{3a^3b^5}{4c^4d^2}\right)$;

9) $(9a^5+183a^4b^2+688a^3b^2-2476a^2b^3+631ab^4+741b^5):(3a^2+26ab-57b^2)$;

10) $(5a^5b^3c^5-22a^4b^3c^6+5a^3b^3c^7+12a^2b^3c^8-7a^2b^2c^8+28ab^2c^9):(a^2bc^2-4abc^3)$;

11) $(120a^{-8}b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}):(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)$;

12) $(6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^3y^{-8}+24x^7y^{-6}+96x^{11}y^{-4}):(2x^{-3}y^{-5}+6xy^{-3}+12x^5y^{-1})$;

13) $\left(\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}\right):\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)$;

14) $(2a^{2m}+2a^mb^p-4a^mc^n-3a^mb-3b^{p+1}+6bc^n):(2a^m-3b)$.

II. Reduction.

15) $\frac{a^8b^5-2a^5b^5c}{a^3c^4d^2-2c^5d^2}$;

16) $\frac{a^6b^2c^3-a^4b^4c^3}{a^4b^2c^7-a^4b^6c^3}$;

17) $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}$;

18) $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}$;

19) $\frac{m^2y^v-ny^{v+1}}{dym^2-dny^2}$;

20) $\frac{ca^{m+n}-ba^3+a^n}{ca^{2n}-ba^{3+n-m}+a^{2n-m}}$;

21) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^8\cdot\left(\frac{49}{40}\right)^4\cdot\left(\frac{100}{9}\right)^2$;

22) $\frac{(42:15)^4\ .\ 35}{15\ :\ \frac{5^4}{2.14^4}}$;

23) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5:\left(\frac{9}{14}\right)^2\right]+\frac{6^2+1}{7^3}$;

24) $\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6:\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]-\left[\left(7^5-\frac{1}{5}.10^8\right):2^6\right]}{\left[9^4-7.49^2+20^7.\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]:2^8}$;

25) $14^{23}.77^{13}.30^9.49^{11}.22^{-13}.686^{-19}.15^{-8}$.

Auflösungen.

1) $6a^6+31a^5b+35a^4b^2-a^3b^3+33a^2b^4-4ab^5$; 2) $a^6-16a^3x^3+64x^6$; 3) $21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4-32a^2b^5$; 4) $120a-8b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}$; 5) $6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^3y^{-8}+24x^7y^{-6}+96x^{11}y^{-4}$; 6) $2a^2-mb^{n-2m+4}+3a^{2m}b^{n-2m+3}+a^{m-1}b^{1-2m}c^p-2ca^{p-2m+3}b^{n+3}-3ca^{p+m+1}b^{n+2}-a^pc^{p+1}$; 7) $a^{2n-3b^{1-6m}}-4a^{2n-4b^{2-6m}}-10a^{2n-5b^{3-6m}}+28a^{2n-6b^{4-6m}}-15a^{2n-7b^{5-6m}}$; 8) $\frac{4a^4b^6}{9c^6}-\frac{25a^6b^8}{4c^6d^2}-\frac{15a^6b^9}{4c^7d^4}-\frac{9a^6b^{10}}{16c^8d^4}$; 9) $3a^3+35a^2b-17ab^2-13b^3$; 10) $5a^3b^2c^3-2a^2b^2c^4-3ab^2c^5-7bc^6$; 11) $15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6$; 12) $3x^{-2}y^{-7}-2x^2y^{-5}+8x^6y^{-3}$; 13) $\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}$; 14) $a^{m+bp-2c^n}$; 15) $\frac{a^5b^5}{c^4d^2}$; 16) $\frac{a^2-b^2}{c^4-b^4}$; 17) $\frac{2a^2x^3}{3b^2}$; 18) $\frac{a+b+c}{a-b+c}$; 19) $\frac{y^v-1}{d}$; 20) a^{m-n}; 21) $\frac{1}{24}$; 22) $\frac{7}{6}$; 23) $\frac{1}{7}$; 24) 4; 25) 105.

Zweites Capitel.

Von den Wurzeln.

§. 11. Erklärung.

Ist $a^m = b$, so nennt man a die m^{te} Wurzel aus b, und bezeichnet dieselbe durch die Form $\sqrt[m]{b}$; unter $\sqrt[m]{b}$ versteht man also die Zahl, die b liefert, wenn man sie mit m potenzirt, und es ist daher:

$$1)\quad \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = b;$$

$$2)\quad \sqrt[m]{b^m} = b.$$

Man nennt in $\sqrt[m]{b}$ die Zahl m den Wurzelexponenten, b den Radicanden.

Der Exponent m muß stets eine positive ganze Zahl sein.

Man nennt $\sqrt[m]{b}$ eine ganze Wurzel, wenn b positiv oder gleich Null ist; hingegen eine allgemeine Wurzel, wenn b auch negativ sein kann.

A. Von den ganzen Wurzeln.

§. 12. Erklärung.

Da bei der ganzen Wurzel $\sqrt[m]{b}$ der Radicand b positiv ist, so muß es eine ganze oder gebrochene positive Zahl geben, welche b liefert, wenn man sie mit m potenzirt; läßt sich der Werth der m^{ten} Wurzel aus b nicht durch eine rationale Zahl angeben, so lassen sich wenigstens die Gränzen bestimmen, zwischen welchen die irrationale Zahl liegen muß, die den Werth der Wurzel angiebt. Diese positive (rationale oder irrationale) Zahl nennt man den absoluten Wurzelwerth. Hat man bloß diesen Wurzelwerth im Auge, und nimmt man keine Rücksicht darauf, daß die Wurzel vielleicht noch andere Werthe haben könne, (wie z. B. die zweite Wurzel aus $+a^2$ sowohl $(+a)$, als auch $(-a)$ sein kann), so nennt man die Wurzel eindeutig. Will man alle mög-

lichen Werthe einer Wurzel berücksichtigen, so wird die Wurzel mehrdeutig genannt. Ist also z. B. $\sqrt{36}$ eindeutig, so ist sie gleich $(+6)$; ist sie mehrdeutig, so ist sie gleich (∓ 6). Die in den nächsten §§. entwickelten Sätze gelten nur für die eindeutigen ganzen Wurzeln.

§. 13. Grundsätze.

1) Ist $a = b$, so ist auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

2) Ist $a^m = b^m$, so ist auch $a = b$.

Anm. Wenn also $+a = +b$ ist, so müssen auch die absoluten Werthe der m^{ten} Wurzeln aus $+a$ und $+b$ einander gleich sein.

§. 14. Lehrsätze.

1) $\sqrt[m]{a.b} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b}$;

2) $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$;

3) $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$;

4) $\sqrt[m]{a \mp b} = \sqrt[m]{a \mp b}$.

Beweise zu 1) und 2). Potenzirt man beide Seiten der Gleichungen mit m, so erhält man auf beiden Seiten Gleiches, und nach 2) des §. 13 ist dann die Behauptung erwiesen.

Beweis zu 3). Es ist $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a.a.a....} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} .... = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$.

Anm. zu 4). Aus einer Summe oder Differenz läßt sich im Allgemeinen eine Wurzel nicht ausziehen. Als besondere Fälle sind zu bemerken:

$$\sqrt[2]{a^2 \mp 2ab + b^2} = a \mp b;$$

$$\sqrt[3]{a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3} = a \mp b.$$

§. 15. Zusatz.

Aus den Sätzen des vorigen §. ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

1) $\sqrt[m]{a^m b} = a.\sqrt[m]{b}$;

2) $a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n . b}$;

3) $a:\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m : b}$;

4) $\sqrt[2]{a:b} = \frac{1}{b}\sqrt[2]{ab}$;

5) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{27} = \frac{1}{3}\sqrt[2]{9.3} = \sqrt[2]{3}$;

6) $4.\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{16.3} = \sqrt[2]{48}$;

7) $\frac{1}{2}:\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(\frac{1}{2})^3:3} = \sqrt[3]{\frac{1}{24}}$;

8) $\frac{1}{2}\sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}$.

§. 16. Lehrsätze.

1) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$;

2) $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$;

3) $\sqrt[m:n]{a^{p:n}} = \sqrt[m]{a^p}$;

4) $\sqrt[m\mp n]{a} = \sqrt[m\mp n]{a}$;

5) $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n . b^m}$;

6) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n : b^m}$.

Beweis zu 1). Potenzirt man jeden dieser Ausdrücke mit mn, so erhält man jedesmal a.

Beweis zu 2). Er folgt aus 1).

Beweis zu 3). Er folgt aus 2).

Beweis zu 5). Es ist $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} . \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n . b^m}$ (nach §. 14, 1).

Beweis zu 6). Er wird ebenso geführt.

Anm. Da sich die 2ten und 3ten Wurzeln aus Zahlen berechnen lassen, so kann man, nach 1), alle Wurzeln berechnen, deren Exponent die Form $2^x . 3^y$ hat, also z. B. die 4te, 6te, 8te, 9te, 12te u. s. w., nicht aber, nach 4), die $(2+3)^{te}$ oder 5te und ähnliche Wurzeln.

§. 17. Zusatz.

Die m^{te} Wurzel aus 1 ist wiederum 1.

Die m^{te} Wurzel aus 0 ist wiederum 0.

Die m^{te} Wurzel aus jeder positiven (ganzen oder gebrochenen) Zahl nähert sich desto mehr der Einheit, je größer m ist.

§. 18. Erklärung.

Die für Potenzen und eindeutige ganze Wurzeln entwickelten Formeln zeigen eine solche Uebereinstimmung, daß jede Potenzformel zugleich eine Wurzelformel als besondern Fall enthalten würde, wenn man im Stande wäre, eine Wurzel in Form einer Potenz zu schreiben. Dies ist indeß möglich. Man kann nämlich für $\sqrt[m]{a^n}$ das Symbol $a^{\frac{n}{m}}$ einführen, weil beide Ausdrücke, wenn sie mit m potenzirt werden, a^n geben.

§. 19. Erklärung.

Nach vorigem §. wird unter dem Zeichen $a^{\frac{n}{m}}$, bei welchem m eine positive ganze Zahl, n aber eine Differenz zweier positiven ganzen Zahlen bedeutet, die m^{te} Wurzel aus der Differenzpotenz a^n verstanden; dieser Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$ wird eine reelle Potenz genannt. Zunächst wird unter $a^{\frac{n}{m}}$ nur der eine Werth verstanden, den die eindeutige Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ hat.

Unter dieser Voraussetzung sind die für die Potenzen bisher gegebenen Grundsätze und Lehrsätze auch noch für reelle Potenzen gültig.

Die Beweise sind leicht zu führen. Soll z. B. bewiesen werden, daß $a^{\frac{m}{n}} + \frac{v}{w} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{v}{w}}$ ist, so setzt man:

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{v}{w}} = a^{\frac{mw+vn}{nw}} = \sqrt[nw]{a^{mw+vn}} = \sqrt[nw]{a^{mw} \cdot a^{vn}} = \sqrt[nw]{a^{mw}} \cdot \sqrt[nw]{a^{vn}} =$$

$$= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[w]{a^v} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{v}{w}}.$$

In derselben Art beweist man die übrigen Formeln ohne Schwierigkeit.

Anm. Da $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$ ist, so kann man auch $a^{\frac{y}{x}} = a^{\frac{1}{x:y}}$ durch $\sqrt[x:y]{a}$ bezeichnen, und also Wurzeln mit gebrochenen Wurzelexponenten einführen. Es bedeutet aber nach dem Gesagten $\sqrt[x:y]{a}$ die Zahl $\sqrt[x]{a^y}$.

§. 20. Zusatz.

Aus vorigem §. ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m:n]{a}$;

2) $a^{-\frac{1}{m}} = 1 : a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1:a}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{n}{m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n : a^n}$;

4) $\frac{a^2 . b^2 . \sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^2b}} = a^2 . b^2 . a^{\frac{1}{2}} . b^{\frac{1}{2}} . a^{-\frac{3}{2}} . b^{-\frac{1}{2}} . a^{-\frac{2}{3}} . b^{-\frac{1}{3}} =$

$= a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{ab^5}$;

5) $\frac{(a:b)^3 . \sqrt[4]{a^5 : b^2}}{(b:a)^2 : \sqrt[3]{a^4 : b}} = a^3 . b^{-3} . a^{\frac{5}{4}} . b^{-\frac{1}{2}} . b^{-\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{4}{3}} . b^{-\frac{1}{3}} =$

$= a^{\frac{73}{12}} : b^{\frac{52}{12}} = \sqrt[12]{a^{73} : b^{52}}$.

§. 21. Zusatz.

Sollen algebraische Summen mit Wurzelausdrücken durch die vier ersten Operationen verbunden werden, so verfährt man wie bei einfachen Ausdrücken, indem man jedoch die Wurzelformeln dabei anwendet. Da man übrigens jede Wurzel in Potenzform schreiben kann, so sind die in vorigem Kapitel gegebenen Beispiele auch hier anwendbar.

§. 22. Erklärung.

Die Sätze der vorigen §§. sind entwickelt unter der Voraussetzung, daß die vorkommenden Wurzeln *eindeutig* sind. Nun hat aber z. B. die Quadratwurzel zwei Werthe, und es läßt sich überhaupt nachweisen, daß die m^{te} Wurzel aus einer Zahl m verschiedene Werthe hat. Es frägt sich nun, in wie weit die für *eindeutige* Wurzeln entwickelten Sätze auch für *mehrdeutige* Wurzeln oder für Potenzen mit *gebrochenen* Exponenten gültig sind. Es ergiebt sich nun leicht, daß diese Sätze, wenn sie auf mehrdeutige Wurzeln angewendet

werden, zwar nicht falsche, jedoch auch nicht alle möglichen Resultate liefern. So ist z. B. die Formel $\sqrt[pn]{a^n} = \sqrt[p]{a}$ nicht falsch, aber auch nicht erschöpfend, denn die pn^te Wurzel aus einer Zahl hat pn verschiedene Werthe, die p^te Wurzel blos p. Durch Anwendung dieser Formel würde man also mehrere der möglichen Resultate einbüßen, und man darf sie daher nicht ohne Weiteres anwenden, wenn man alle Werthe der Wurzel berücksichtigen will. In der elementaren Mathematik hat man indessen auf die Mehrdeutigkeit der Wurzeln nur bei Anwendung der zwei Grundsätze zu achten:

1) Ist $a = b$, so folgt $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

2) Ist $a^m = b^m$, so folgt $a = b$.

Der Grundsatz 1) ist noch insoweit richtig, als jedem der m Werthe der m^ten Wurzel aus a einer der m Werthe der m^ten Wurzel aus b entspricht, welche entsprechenden Werthe man indeß erst suchen muß. Der Grundsatz 2) ist jedoch nicht mehr richtig, da es m verschiedene Zahlen giebt, die mit m potenzirt ein und denselben Werth a^m liefern, und führt also in den meisten Fällen zu entschieden falschen Resultaten, wie z. B.: Aus $(-6)^2 = (+6)^2$ folgt $-6 = +6$. Man kann nur, unter Berücksichtigung des bei 1) Gesagten, folgern:

Ist $a^m = b^m$, so folgt $\sqrt[m]{a^m} = \sqrt[m]{b^m}$, also z. B.:

Aus $(-6)^2 = (+6)^2$ folgt $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{(+6)^2}$, oder $\mp 6 = \mp 6$.

B. Von den allgemeinen Wurzeln.

§. 23. Erklärung.

Eine Wurzel heißt allgemein, wenn ihr Radicand negativ sein kann, und hat daher die Form $\sqrt[m]{\mp a}$. Wenn a positiv ist, so ist $\sqrt[m]{+a}$ eine ganze Wurzel; es ist daher blos der Fall zu berücksichtigen, wo a negativ ist. Ist m eine ungerade Zahl, so macht das negative Vorzeichen keine besondern Schwierigkeiten, denn in diesem Falle folgt aus $\sqrt[m]{a} = b$ unmittelbar $\sqrt[m]{-a} = -b = -\sqrt[m]{+a}$. Ist jedoch m eine

gerade Zahl, also gleich 2n, und ist a negativ, so ist $\sqrt[2n]{-a}$ weder einer ganzen, noch gebrochenen, noch irrationalen positiven oder negativen Zahl gleich, da keine derselben der Bedingung genügt, daß ihre $2n^{te}$ Potenz negativ ist (§. 9).

Man nennt daher $\sqrt[2n]{-a}$ einen imaginären Ausdruck, im Gegensatz zu den übrigen, den reellen.

Anm. Die Zahlenausdrücke (positive oder negative) zerfallen demnach in reelle und imaginäre; die reellen in rationale und irrationale; die rationalen in ganze und gebrochene.

§. 24. Zusatz.

Obgleich die imaginären Ausdrücke niemals als Maaßzahlen eines Dinges auftreten können, so sind sie doch für die Rechnung von Wichtigkeit. Sie vervollständigen die Zahlenlehre und deuten, sobald sie als Resultat einer Rechnung auftreten, dadurch an, daß keine wirklich vorhandene Größe den Bedingungen der Aufgabe entsprechen könne, daß also in der Wirklichkeit die Aufgabe unmöglich sei.

§. 25. Erklärung.

Von den imaginären Ausdrücken sind besonders die quadratischen von Wichtigkeit, da sie am häufigsten vorkommen, und da sich alle übrigen auf dieselben zurückführen lassen. Mit denselben kann man nicht nach den früher entwickelten Formeln rechnen, sondern es ist erst nachzuweisen, welche Sätze für dieselben gültig sind.

Als Grundsatz gilt:

$$\text{Ist } a = b, \text{ so folgt } \sqrt{a} = \sqrt{b}.$$

d. h. von den zwei Werthen ersterer Wurzel entspricht jeder einem der zwei Werthe der Wurzel aus b. (Vergl. §. 22, Grundsatz 1.)

§. 26. Lehrsätze.*)

1) $(\sqrt{-a})^2 = -a;$

2) $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1};$

3) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab};$

4) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab};$

*) Die in diesem §. vorkommenden Wurzeln sind mehrdeutig zu nehmen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist.

5) $(\sqrt{-1})^{4n} = 1$, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet;

6) $(\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{-1}$;

7) $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$;

8) $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich aus dem Begriff der Wurzel.

Beweis zu 2). Es ist $(\sqrt{-a})^2 = -a$;

ferner $(\sqrt{a}.\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{a})^2.(\sqrt{-1})^2 = -a$;

also $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ (vergl. §. 25).

Anm. In dem Ausdruck $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$ kann jede der beiden Wurzeln zwei Vorzeichen haben, aber das Produkt selbst kann nur positiv oder negativ sein. Man giebt deshalb dem Faktor $\sqrt{-1}$ das positive Vorzeichen, und setzt das doppelte Vorzeichen nur zu dem Faktor $\sqrt{a}$. Den Ausdruck $\sqrt{-1}$ bezeichnet man kürzer durch i. Jede imaginäre Quadratwurzel läßt sich also darstellen als ein Produkt aus einem reellen Faktor und dem Faktor i, und so ist z. B.: $\sqrt{-25} = \mp 5i$.

Beweis zu 3). Es ist $\sqrt{a}.\sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.\,i = \sqrt{ab}.\,i = \sqrt{-ab}$.

Beweis zu 4). Es ist $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{a}.i.\sqrt{b}.i = \sqrt{ab}.(-1) = \sqrt{ab}$.

Anm. Es ist $\sqrt{ab}.(-1) = \sqrt{ab}$, weil $\sqrt{ab}$ zwei Vorzeichen haben kann, also der Faktor (—1) keine Veränderung in den Werthen hervorbringt.

Die Beweise zu 5), 6), 7), 8) ergeben sich aus 1).

§. 27. Lehrsätze.

1) Ist $a + bi = c + di$, und sind a, b, c und d reell, so ist $a = c$; $b = d$.

2) Werden Ausdrücke von der Form $(p+qi)$, wo p und q beliebige reelle Zahlen sind, durch eine der vier ersten Operationen verbunden, so hat das Resultat wieder die Form $p+qi$, d. h. es besteht aus einem reellen und einem imaginären Theile.

Beweis zu 1). Aus $a+bi=c+di$ folgt:

$$\frac{a-c}{d-b} = i.$$

Diese Gleichung kann nur dann einen Sinn haben, wenn $\frac{a-c}{d-b} = \frac{0}{0}$ also $a = c$ und $d = b$ ist.

Beweis zu 2). Es ist:

a) $(p+qi) \mp (m+ni) = (p \mp m)+(q \mp n)i = p'+q'i.$

b) $(p+qi) \cdot (m+ni) = pm+(qm+pn)i+qn.i^2 =$
$= (pm-qn)+(qm+pn)i = p''+q''i.$

c) $(p+qi) : (m+ni) = [(p+qi).(m-ni)] : [(m+ni)(m-ni)] =$
$= [(pm+qn)+i(qm-pn)] : (m^2+n^2) =$
$= [(pm+qn) : (m^2+n^2)]+i.[(qm-pn) : (m^2+n^2)] =$
$= p'''+q'''.i.$

Anm. Nach b) ist auch $(p+qi)^x = v+wi$, wenn nämlich x eine positive ganze Zahl ist.

Anhang zum zweiten Capitel.

Von einigen bei Wurzeln vorkommenden Reductionen.

Aufgaben.

I. Es soll $\frac{a+b\sqrt{c}}{d+e\sqrt{f}}$ so reducirt werden, daß der Nenner rational wird.

Auflös. Es ist $\frac{a+b\sqrt{c}}{d+e\sqrt{f}} = \frac{(a+b\sqrt{c}).(d-e\sqrt{f})}{(d+e\sqrt{f}).(d-e\sqrt{f})} = \frac{(a+b\sqrt{c})(d-e\sqrt{f})}{d^2-e^2f}.$

Demnach ist z. B. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$

II. Es soll $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ so reducirt werden, daß man nicht genöthigt ist, die Wurzel aus einer Irrationalzahl zu ziehen.

Auflös. Setzt man $\sqrt{a+b\sqrt{c}} = x + y\sqrt{c}$, so ist:

$$a + b\sqrt{c} = x^2+y^2c+2xy\sqrt{c};$$

Da x und y willkürlich zu wählende Größen sind, so kann man setzen:

1) $a = x^2+y^2c;$
2) $b = 2xy.$

Aus 2) folgt $x = (b:2y).$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so ist:

$$\frac{b^2}{4y^2} + y^2c = a,$$

oder $b^2 + 4y^4c = 4ay^2,$

oder $y^2 = \frac{a \mp \sqrt{a^2-b^2c}}{2c},$

oder 3) $y = \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2c}}$.

Ferner war $x^2 = \frac{b^2}{4y^2}$, oder nach 3)

$$x^2 = \frac{b^2}{4\left(a \mp \sqrt{a^2 - b^2 c}\right)} = \frac{b^2 c}{2\left(a \mp \sqrt{a^2 - b^2 c}\right)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2} \text{ (nach Aufgabe I.),}$$

daher 4) $x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2}}$.

Aus 3) und 4) folgt nun:

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2}} + \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2c}} \cdot \sqrt{c} =$$

$$= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2}}.$$

Die Aufgabe ist also gelöst, wenn $\sqrt{a^2 - b^2 c}$ rational ist. So ist z. B

$$\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{22 + \sqrt{196}}{2}} + \sqrt{\frac{22 - \sqrt{196}}{2}} = \sqrt{18} + \sqrt{4} = 3\sqrt{2} + 2$$

III. Es soll $\sqrt{a + bi}$ auf die Form $x + yi$ gebracht, also in einen reellen und einen imaginären Theil zerlegt werden.

Auflös. Setzt man in der Aufgabe II. $c = -1$, so erhält man:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$ *)

Beispiel: $\sqrt{7 + 24i} = 4 + 3i$.

Anm. Die in II. und III. gegebenen Lösungen gelten mit den entsprechenden Abänderungen auch für $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$ und $\sqrt{a - bi}$.

*) Diese Wurzel ist imaginär, weil $\sqrt{a^2 + b^2}$ größer als a ist.

Aufgaben.*)

I. Multiplication und Division.

1) $(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} + 3c^{\frac{1}{3}}).(a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}})$; 2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}).(3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 5a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}})$; 3) $(5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b)(a^{\frac{1}{3}} - 7a^{-\frac{2}{3}}b)$; 4) $(a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}})$; 5) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10}).2\sqrt{5}$; 6) $(7 + 2\sqrt{6}).(9 - 5\sqrt{6})$; 7) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt[4]{27}).(2\sqrt{5} - 2\sqrt[8]{9})$; 8) $(5\sqrt{7} + 3\sqrt{5}).(5\sqrt{7} - 3\sqrt{5})$; 9) $\left[3.\sqrt[5]{6 + 2\sqrt{3}}\right].\left[4\sqrt[10]{48 - 24\sqrt{3}}\right]$;

10) $(a + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b) : (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$; 11) $(4x^2y^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 24xy^{\frac{5}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}}y^2) : (2xy^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}y)$; 12) $\left(-15\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{32} + 44\right) : \left(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{16}\right)$; 13) $\left(3\sqrt[3]{20} - 6\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{180} + 12\right) : \left(\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{6}\right)$; 14) $(4\sqrt{5} + 150\sqrt{2} + 30 - 34\sqrt{6} + 10\sqrt{10} - 40\sqrt{12} - 6\sqrt{60}) : (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6})$.

II. Reductionen.

15) $$\frac{\sqrt[5]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a^8} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[10]{a^7} \cdot \sqrt[5]{a^{11}} \cdot \sqrt[6]{a^5}};$$

16) $$\frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^9b^7} \cdot \sqrt[8]{a^7b^5} : \sqrt[2]{a^5b^5} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}}{\sqrt[5]{a^7b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[6]{a^3b^5} : \sqrt[4]{a^5b^7} \cdot \sqrt[5]{a^2b^7}};$$

17) $$\frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{b^6} \cdot \sqrt[5]{a^9} \cdot \sqrt[7]{b^8} \cdot \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[8]{b^9} \cdot \sqrt[21]{\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a^{15}} \cdot \sqrt[12]{b^{19}} \cdot \sqrt[10]{a^{-7}} \cdot \sqrt[24]{b^5}};$$

*) Die Wurzeln sind eindeutig zu nehmen.

18) $\dfrac{(-2a)^7.(3b)^{-4}.(4c)^3.(-3d)^6.a^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{d^{-8}}.\sqrt[6]{d}}{(3a)^5.(-2b)^{-9}.(-2c)^5.(\frac{1}{4}d)^{-8}.\sqrt{d}.\sqrt[2]{a^5}}$;

19) $\dfrac{\sqrt[3]{18^5}.\sqrt[6]{39^4}.\sqrt[4]{5^7}.\sqrt[3]{(5:13)^5}}{\sqrt[12]{10^5}.(1:3)^{-4}.\sqrt[3]{4}}$; 20) $27^{\frac{7}{12}}.21^{-\frac{3}{4}}.49^{\frac{3}{8}}$;

21) $\dfrac{\sqrt[7]{51^3}.\sqrt[11]{102^5}.34^{-\frac{68}{77}}}{\sqrt[5]{24^{\frac{2}{3}}}.\sqrt[11]{4^{-32}}.3^{\frac{866}{1155}}}$; 22) $2\sqrt{8}+5\sqrt{18}-6\sqrt{50}$;

23) $6\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{24}+8\sqrt[6]{7\ 6}$; 24) $\dfrac{9\sqrt{7}-18}{4\sqrt{14}-8\sqrt{2}}$;

25) $\dfrac{4\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{8\sqrt{7}+6\sqrt{5}}$; 26) $\sqrt{12+8\sqrt{2}}$; 27) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

28) $\sqrt{52-16\sqrt{3}}$; 29) $\sqrt{11+\sqrt{72}}$; 30) $\sqrt{5+\sqrt{-11}}$;

31) $\sqrt{13-8\sqrt{-3}}$; 32) $\dfrac{6}{1+\sqrt{-2}}$;

33) $\dfrac{\sqrt{-12}+\sqrt{-6}+\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$; 34) $\dfrac{2\sqrt{3}.i+6.i+3i}{\sqrt{3}.i}$;

35) $\dfrac{1}{3-2\sqrt{-3}}$; 36) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; 37) $\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{a-bi}{a+bi}$;

38) $\dfrac{a+bi}{a-bi}-\dfrac{a-bi}{a+bi}$.

Auflösungen.

1) $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}+3a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+6b^{\frac{5}{4}}-9b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$; 2) $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+$ $+2a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}-5ac^{\frac{2}{3}}$; 3) $5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^2$; 4) $a^3-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}-$ $-a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{13}{12}}$; 5) $10+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}$; 6) $3-17\sqrt{6}$; 7) $42-4\sqrt[4]{675}-$

$-6\sqrt[4]{75}$; 8) 130; 9) $12\sqrt[5]{24}$; 10) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$; 11) $2xy^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}y$;

12) $-3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$; 13) $3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36}$; 14) $2+5\sqrt{2}-3\sqrt{12}$; 15) $\sqrt[6]{a^{17}}$;

16) $\sqrt[24]{ab^3}$; 17) ab^2; 18) $-\frac{2}{27}b^5c-^2d^{11}$; 19) $1_{13}^{2\,5}\cdot\sqrt[12]{2^7}$; 20) 3; 21) 2;

22) $-11\sqrt{2}=-\sqrt{242}$; 23) $12\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{324}$; 24) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$;

25) $\frac{127-24\sqrt{35}}{134}$; 26) $2+2\sqrt{2}$; 27) $3-\sqrt{5}$; 28) $2-4\sqrt{3}$;

29) $3+\sqrt{2}$; 30) $\frac{1}{2}\sqrt{22}+\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; 31) $4-\sqrt{-3}$; 32) $2-2\sqrt{-2}$;

33) $\mp(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 34) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 35) $\frac{3+2\sqrt{-3}}{21}$;

36) $\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$; 37) $\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}$; 38) $\frac{4abi}{a^2+b^2}$.

Drittes Capitel.

Von den Logarithmen.

§. 28. Erklärung.

Ist $a^m = b$, so nennt man m den Logarithmus von b für die Basis oder Grundzahl a, und bezeichnet denselben durch die Form

$$m = \overset{a}{\log} b.$$

Potenzirt man also die Basis a mit dem Logarithmen von b, so erhält man b, oder es ist:

$$a^{(\overset{a}{\log} b)} = b.$$

Die Zahl b wird der Logarithmand genannt.

Für die Basis 10 erhält man:

$\log 100 = 2$, denn $10^2 = 100$;

$\log 10000 = 4$, denn $10^4 = 10000$;

$\log 3{,}162\ldots = \frac{1}{2}$, denn $10^{\frac{1}{2}} = 3{,}162\ldots$.

§. 29. Erklärung.

Sind in der Gleichung $a^m = b$ die beiden Zahlen a und b positiv, und ist zugleich $a \gtrless 1$, so muß, welchen Werth auch a und b haben mögen, eine reelle Zahl der Bedeutung von m entsprechen.

Ist nämlich a größer oder kleiner als 1, so nähern sich bei folgenden Reihen, die man sich bis ins Unendliche fortgesetzt denken kann,

1) $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots\ldots$

2) $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} \ldots\ldots$

die Glieder der einen immer mehr dem unendlich Großen, die der andern immer mehr der Null. Es muß also b zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern einer dieser Reihen der Größe nach liegen. Liegt es zwischen a^x und a^{x+1}, so muß sein Logarithme m zwischen x und $(x+1)$ liegen, und kann nur diesen reellen Werth haben.

Da z. B. $100 = 10^2$ und $1000 = 10^3$ ist, so muß der Logarithme von 200 für die Basis 10 zwischen 2 und 3 liegen.

Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich Null (§. 7).

§. 30. Zusatz.

Ist die Basis positiv und nicht gleich 1 oder 0, so folgt aus vorigem §.:

1) Jede positive Zahl hat einen reellen Logarithmen.
2) Negative Zahlen können keine reellen Logarithmen haben.
3) Die Logarithmen der meisten Zahlen sind irrational.
4) Ist die Basis größer als 1, so sind die Logarithmen aller ächten Brüche negativ; ist aber die Basis kleiner als 1 (und größer als Null), so sind die Logarithmen der ganzen Zahlen und der unächten Brüche negativ; es ist z. B. log 36 für die Basis $\frac{1}{6}$ gleich -2.

Ist die Basis negativ, so können nicht alle Zahlen einen reellen Logarithmen haben; es ist aber z. B. log 36 für die Basis -6 gleich 2.

§. 31. Erklärung.

In allen folgenden §§. dieses Capitels wird vorausgesetzt, daß die Basis positiv und nicht gleich 1 oder 0 sei; ferner wird unter dem Logarithmen einer Zahl immer nur der reelle Werth desselben verstanden.

Anm. Wenngleich nämlich der Logarithme einer Zahl nur einen reellen Werth haben kann, so ist dadurch nicht ausgeschlossen, daß er nicht auch noch andere Werthe von der Form der imaginären Ausdrücke haben könnte.

§. 32. Grundsätze.

1) Ist $a = b$, so ist auch $\overset{m}{\log} a = \overset{m}{\log} b$.

2) Ist $\overset{m}{\log} a = \overset{m}{\log} b$, so ist auch $a = b$.

3) Ist $a^m = a^n$, so ist auch $m = n$.

§. 33. Lehrsätze.

Es sei m die Basis der nachfolgenden Logarithmen, so ist:

1) $\log(a.b) = \log a + \log b$;

2) $\log(a:b) = \log a - \log b$;

3) $\log(1:b) = -\log b$;

4) $\log a^{b*)} = (\log a).b$;

5) $\log \sqrt[b]{a} = (\log a):b$;

6) $\log(a \mp b) = \log(a \mp b)$.

Beweis zu 1). Es ist $m^{\log(ab)} = ab$, ferner auch
$m^{\log a + \log b} = m^{\log a}.m^{\log b} = ab$,
daher die Behauptung erwiesen nach §. 32, 3.

Beweis zu 2). Er wird ebenso geführt.

Beweis zu 3). Er folgt aus 2).

Beweis zu 4). Es ist $m^{(\log a^b)} = a^b$; ferner auch
$m^{(\log a).b} = (m^{\log a})^b = a^b$,
daher die Behauptung erwiesen nach §. 32, 3.

Beweis zu 5). Es ist $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$; der Satz ergiebt sich also aus 4).

§. 34. Zusatz.

Nach vorigem §. findet man also den Logarithmen:

1) eines Products, wenn man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addirt;
2) eines Quotienten, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividenden subtrahirt;
3) einer Potenz, wenn man den Logarithmen des Dignanden mit dem Exponenten multiplicirt;

*) b bedeutet eine beliebige reelle Zahl. Ist b eine gebrochene Zahl, so ist a^b eindeutig zu nehmen.

4) einer Wurzel, wenn man den Logarithmen des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt.

§. 35. Lehrsatz.

Ist der Logarithme von b für die Basis a gleich m, so ist der Logarithme m' von b für die Basis a' gleich $m : \log_a a'$.

Beweis. Es ist 1) $b = a^m$;

2) $b = a'^{m'}$.

Ferner ist $a' = a^{\log a'}$ (Basis a).

Setzt man diesen Werth von a' ein in 2), so ergiebt sich:

3) $b = (a^{\log a'})^{m'} = a^{m' . \log a'}$ (Basis a).

Aus 1) und 3) folgt aber: $m = m' . \log a'$ (Basis a)

oder $m' = m : \log a'$ (Basis a).

Anm. Sind also die Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis a bekannt, so erhält man aus denselben die Logarithmen für die Basis a', indem man sie durch den bekannten Logarithmus von a' dividirt.

§. 36. Erklärung.

Die für eine bestimmte Basis berechneten Logarithmen aller positiven Zahlen bilden ein Logarithmensystem. Das gebräuchlichste System hat die Grundzahl 10 und wird das Brigg'sche, oder auch das gemeine (vulgäre) genannt. Neben diesem giebt es noch ein System, dessen Basis die Irrationalzahl 2,71828... ist, und welches das natürliche oder hyperbolische genannt wird. Die Berechnung des einen Systems aus dem andern ist nach vorigem §. leicht. Die Berechnung der einzelnen Logarithmen findet ihre Erklärung in einem spätern Capitel.

Anm. Es bedeutet von jetzt an log a den Logarithmen von a für die Basis 10, log. nat. a den Logarithmen von a für die Basis 2,71828.....

§. 37. Erklärung.

Im Brigg'schen System gehören zu den Zahlen

1, 10, 100, 1000, 10000....

die Logarithmen

0, 1, 2, 3, 4....

Der Logarithme einer Zahl, die zwischen z. B. 100 und 1000 liegt, muß also zwischen 2 und 3 liegen, und besteht aus der ganzen Zahl 2 (der Charakteristik oder Kennziffer) und einem (irrationalen) Decimalbruche (der Mantisse). Die Kennziffer einer Zahl mit n Ziffernstellen ist gleich n—1. Denn 10^{n-1} hat n, 10^n hingegen n+1

Zifferstellen; die Zahl liegt also zwischen 10^{n-1} und 10^n, und ihr Logarithme zwischen n—1 und n. Da die Auffindung der Kennziffern leicht ist, so sind dieselben in den Tafeln weggelassen, und man findet blos die Mantissen.

Für das Aufsuchen der Logarithmen ist noch Folgendes zu bemerken:

$$\text{Da } \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + \log x;$$

$$\text{ferner } \log (x:10) = \log x - \log 10 = (\log x) - 1 \text{ ist,}$$

so folgt z. B. aus $\log 2 = 0{,}30103$ unmittelbar:

$$\log 20 = 1{,}30103$$

$$\log 200 = 2{,}30103$$

$$\log 0{,}2 = 0{,}30103 - 1$$

$$\log 0{,}02 = 0{,}30103 - 2.$$

Weil nun in den Tafeln die Kennziffern fehlen, so findet man 0,30103 als Logarithmen von 0,2; 0,02; 0,002 u. s. w.; von 2; 200; 2000 u. s. w., und man hat die Kennziffer also noch hinzuzuschreiben.

Für Decimalbrüche ist die Bestimmung der Kennziffer ebenso einfach, wie für ganze Zahlen. Da nämlich zu den Zahlen:

1; 0,1; 0,01; 0,001 u. s. w.

folgende Logarithmen gehören:

0; —1; —2; —3; u. s. w.

so ergiebt sich, daß ein Decimalbruch die Kennziffer —n hat, wenn die (n—1) ersten Stellen nach dem Komma durch Nullen ausgefüllt sind. Bezeichnet man die in den Tafeln stehende Mantisse einer Zahl a allgemein durch m.a, so ist also:

$$\log 0{,}0034 = (m \,.\, 34) - 3;$$

$$\log 0{,}0203 = (m.203) - 2.$$

Ist umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus die Zahl zu suchen, so schlägt man zunächst die Mantisse auf, und sucht die dabei stehende Zahl. Ist nun die Kennziffer = n, so muß die zu suchende Zahl (n+1) ganze Zifferstellen haben; hat die bei der Mantisse gefundene Zahl weniger als (n+1) Stellen, so hängt man ihr noch Nullen an. Ist die Kennziffer = —n, so ist die zu suchende Zahl ein Decimalbruch, und nach dem Komma sind die (n—1) ersten Stellen durch Nullen auszufüllen.

Da also z. B. zu der Mantisse 0,9370663 in den Tafeln die Zahl 8651 gefunden wird, so gehören zu den Logarithmen:

2,9370663; 4,9370663; 0,9370663; 0,9370663—3;

die Zahlen

865,1 ; 86510 ; 8,651 ; 0,008651.

Anm. Eine ausführliche Anweisung zum Gebrauche der Tafeln findet sich in denselben als Einleitung.

§. 38. Erklärung.

Die Benutzung der Logarithmentafeln erleichtert viele Rechnungen ungemein. Ist man nämlich im Stande, von Ausdrücken, deren Berechnung schwierig oder unmöglich sein würde, die Logarithmen zu finden, so findet man aus diesen wiederum die gesuchten Ausdrücke.

Beispiele.

I. Es soll $x = \frac{3{,}0234 \cdot 0{,}63782}{0{,}136052}$ berechnet werden.

Auflös. Es ist $\log x = \log 3{,}0234 + \log 0{,}63782 - \log 0{,}136052$
$= 0{,}4804956 + (0{,}8046913-1) - (0{,}1337049-1)$
$= 1{,}1514820;$
daher $x = 14{,}173\ldots$

II. Es soll $x = (1{,}038)^{20}$ berechnet werden.

Auflös. Es ist $\log x = 20 . \log 1{,}038 = 20 . 0{,}0161974 =$
$= 0{,}323948;$
daher $x = 2{,}1085\ldots$

III. Es soll $x = \sqrt[20]{0{,}4}$ berechnet werden.

Auflös. Es ist $\log x = (\log 0{,}4) : 20 = (0{,}6020600-1) : 20 =$
$= (19{,}6020600-20) : 20 = 0{,}9801030-1;$
daher $x = 0{,}955219\ldots$

IV. Es soll x gefunden werden aus der Gleichung $14^x = 19$.

Auflös. Es ist $x . \log 14 = \log 19$
oder $x = \log 19 : \log 14 =$
$= 1{,}2787536 : 1{,}1461280 =$
$= 1{,}1157\ldots$

V. Es soll x gefunden werden aus der Gleichung:

$$\frac{15 . (3{,}02)^x}{7{,}803} = (6{,}02)^7.$$

Auflöſ. Es iſt $x.\log 3{,}02 + \log 15 - \log 7{,}803 = 7.\log 6{,}02$

oder $x = (7.\log 6{,}02 + \log 7{,}803 - \log 15) : \log 3{,}02$

$= (7.0{,}7795965 + 0{,}8922616 - 1{,}1760913) : 0{,}4800069$

$= 10{,}777....$

Anm. Mit den Logarithmen ſchließt die Lehre von den ſieben Operationen.

Aufgaben.

I. Es ſoll berechnet werden:

1) $\sqrt[7]{8}$; 2) $\sqrt[12]{567348}$; 3) $\sqrt[13]{\frac{3348}{569}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}26 \cdot \sqrt{2:3}}$;

5) $(\frac{5}{7})^{0{,}0537}$; 6) $\frac{(991{,}767)^5 \cdot 12{,}34}{(20{,}358 \cdot 10{,}1575)^6}$;

7) $\sqrt[35]{136} \cdot \sqrt[5]{3425:0{,}00034}$; 8) $\sqrt[8]{\left(\frac{27{,}51 \cdot 61593}{316.57.4817}\right)^3}$;

II. Es ſollen folgende Gleichungen nach x aufgelöſt werden:

9) $2^x = 65536$; 10) $(\frac{3}{4})^x = 5\frac{1}{3}$; 11) $3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$;

12) $(\frac{21}{20})^x \cdot (\frac{3}{5})^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$.

Auflöſungen.

1) 1,345900....; 2) 3,016389....; 3) 1,146055....; 4) 0,596544....; 5) 0,982093....; 6) 151,4369....; 7) 28,94639....; 8) 0,2285631....; 9) 16; 10) $= 13{,}701172....$; 11) 0,759965....; 12) 0,309928.....

Viertes Capitel.

Von den Progressionen.

§. 39. Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, bei welchen die aufeinanderfolgenden Zahlen oder Glieder denselben Unterschied haben, heißt eine arithmetische Progression; haben die aufeinanderfolgenden Glieder dasselbe Verhältniß, so heißt die Reihe eine geometrische Progression. Die allgemeine Form für diese Reihen ist:

1) $a, (a+d), (a+2d), (a+3d), \ldots\ldots$ (arithmetische Progression);
2) $a, a.d, a.d^2, a.d^3, \ldots\ldots$ (geometrische Progression).

In ersterer Reihe heißt d der Unterschied, in letzterer der Exponent der Reihe. Ist in der arithmetischen Progression d positiv, so heißt dieselbe steigend, ist d negativ, so heißt sie fallend; die geometrische Progression ist steigend, wenn $d > 1$, fallend, wenn $d < 1$ ist.

Bei den Progressionen treten folgende fünf Größen auf:

1) Das erste Glied (mit a bezeichnet),
2) das letzte Glied (u),
3) die Anzahl der Glieder (n),
4) der Unterschied, oder der Exponent (d),
5) die Summe der Glieder (s).

Je zwei dieser Größen lassen sich aus den drei übrigen bestimmen.

A. Die arithmetische Progression.

§. 40. Lehrsätze.

1) $u = a + (n-1)\,d;$

2) $s = \frac{(a+u).n}{2}.$

Beweis zu 1). Es ist a das erste, (a+d) das zweite, (a+2d) das dritte, also $a+(n-1)d$ das n^{te} Glied.

Beweis zu 2). Es ist $s = a + (a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(u-d)+u;$

oder auch $s = u + (u-d)+(u-2d)+\ldots\ldots+(a+d)+a.$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man:

$$2s = (a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots\ldots+(a+u)$$
$$= (a+u).n,$$

und $s = \frac{(a+u).n}{2}.$

§. 41. Beispiele.

I. Es soll die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 gefunden werden.

Auflös. Die ganzen Zahlen von 1 bis 1000 bilden eine arithmetische Progression; bei derselben ist $a = 1$; $n = 1000$; $u = 1000$,

$$\text{daher } s = \frac{(1+1000).1000}{2} = 500500.$$

II. Es soll die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 999 gefunden werden.

Auflös. Es ist $a = 1$; $n = 500$; $u = 999$, daher

$$s = \frac{(1+999).500}{2} = 250000.$$

III. Es soll die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2x+1)$ gefunden werden.

Auflös. Es ist $a = 1$; $n = x+1$; $u = 2x+1$, daher

$$s = \frac{(1+2x+1).(x+1)}{2} = (x+1)^2.$$

IV. Es soll die Summe der zwischen 100 und 200 liegenden Zahlen, die durch 3 theilbar sind, angegeben werden.

Auflös. Es ist $a = 102$;

$$u = 198 = 102+96 = 102+32.3,$$

$$\text{also } n = 33;$$

$$\text{daher } s = \frac{(102+198)}{2}.33 = 4950.$$

§. 42. Zusatz.

Da in den zwei Gleichungen:

$$1)\quad u = a+(n-1)d;$$

$$2)\quad s = \frac{(a+u).n}{2}.$$

fünf Größen enthalten sind, so müssen also drei derselben gegeben sein, wenn die übrigen bestimmt werden sollen.

Mit Hülfe von 1) kann man aus 2) entweder a, oder u, oder n eliminiren. Man erhält, wenn man diese Eliminationen ausführt, noch folgende Gleichungen:

$$3)\quad s = \left[2u-(n-1)d\right].\frac{n}{2};$$

$$4)\quad s = \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d};$$

$$5)\quad s = \left[2a+(n-1)d\right].\frac{n}{2}.$$

§. 43. Zusatz.

Löst man die im vorigen §. gegebenen fünf Gleichungen nach jedem der in ihnen vorkommenden Buchstaben auf, so erhält man folgende Gleichungen:

1) $u = a+(n-1)d$;

2) $u = \frac{2s-na}{n}$;

3) $u = \frac{-d\mp\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$;

4) $u = \frac{2s+n(u-1)d}{2n}$;

5) $a = u-(n-1)d$;

6) $a = \frac{d\mp\sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2}$;

7) $a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n}$;

8) $a = \frac{2s-nu}{n}$;

9) $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$;

10) $d = \frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$;

11) $d = \frac{2(nu-s)}{n(n-1)}$;

12) $d = \frac{u-a}{n-1}$;

13) $n = \frac{u-a+d}{d}$;

14) $n = \frac{2s}{a+u}$;

15) $n = \frac{-(2a-d)\mp\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2d}$;

16) $n = \frac{2u+d\mp\sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2d}$;

für s hat man die Gleichungen 2, 3, 4, 5 des vorigen §.

In diesen Gleichungen sind alle Möglichkeiten enthalten, wie eine der fünf Größen durch drei der übrigen ausgedrückt werden kann.

B. Die geometrische Progression.

§. 44. Lehrsätze.

1) $u = a \cdot d^{n-1}$;

2) $s = a \cdot \frac{d^n-1}{d-1}$.

Beweis zu 1). Das erste Glied ist a, das zweite a.d, das dritte $a.d^2$, also das $n^{te} = a.d^{n-1}$.

Beweis zu 2). Es ist:

$$s = a+ad+ad^2+\ldots\ldots +ad^{n-1}$$
$$ds = ad+ad^2+\ldots\ldots +ad^{n-1}+ad^n$$
folglich $ds-s = ad^n-a$, und
$$s = a.\frac{d^n-1}{d-1}.$$

§. 45. Zusatz.

Ist in einer geometrischen Progression die Anzahl der Glieder unendlich groß, so ist:

1) $s = \infty$,*) wenn $d > 1$;

2) $s = \frac{a}{1-d}$, wenn $d < 1$.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich ohne Schwierigkeit.

Beweis zu 2). Ist $n = \infty$, so ist

$$s = a.\frac{d^\infty-1}{d-1} = \frac{a.d^\infty}{d-1} + \frac{a}{1-d}.$$

Ist nun $d < 1$, so ist $d^\infty = 0$ (vergleiche §. 9), folglich auch $\frac{a.d^\infty}{d-1} = 0$. Es bleibt alsdann nur

$$s = \frac{a}{1-d}.$$

So ist in der Progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, u. s. w. (bis ins Unendliche)
$a = 1$; $d = \frac{1}{2}$; $n = \infty$;

folglich $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +\ldots\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

§. 46. Zusatz.

Aus den zwei Gleichungen des §. 44 erhält man durch Elimination je einer dieser Größen, wie bei der arithmetischen Progression, eine Reihe von Gleichungen, in denen eine der fünf Größen durch drei der andern vier ausgedrückt wird. Durch Elimination von a, oder u, oder d aus

1) $u = a.d^{n-1}$

2) $s = a.\frac{d^n-1}{d-1}$

*) Das Zeichen ∞ bedeutet unendlich groß.

erhält man

$$3)\quad u = (du+s-ds).d^{n-1};$$

$$4)\quad \frac{(d-1).s+a}{d} = a.d^{n-1};$$

$$5)\quad u = a.\left(\frac{s-a}{s-u}\right)^{n-1}.$$

Diese fünf Gleichungen lassen sich nach einer jeden der in ihnen vorkommenden Größen auflösen, doch sind sie in Bezug auf manche Größen theils von höherer Ordnung, theils transcendent.

C. Von der Interpolation.

§. 47. Erklärung.

Soll aus einer gegebenen Progression eine neue gebildet werden, welche zwischen je zwei Gliedern der ersten noch n andere Glieder enthält, so werden diese n Glieder *eingeschaltet* oder *interpolirt*. Das Verfahren ist einfach. Sind a und b zwei aufeinanderfolgende Glieder einer *arithmetischen* Progression, und sollen zwischen denselben n Glieder interpolirt werden, so bilden diese mit a und b zusammen eine Progression von n+2 Gliedern; das erste Glied ist = a, das letzte = b, die Anzahl = n+2. Man hat also die Gleichung u=a+(u—1)d oder nach der gegebenen Bezeichnung:

$$b = a + (n+1)d, \text{ daher}$$

$$d = \frac{b-a}{n+1},$$

durch welche Gleichung die gesuchten Glieder bestimmt sind.

Sollen z. B. in der Progression

$$3,\ 7,\ 11,\ 15.....$$

vier neue Glieder interpolirt werden, so findet man

$$d = \frac{7-3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Die neue Reihe ist also:

$$3,\ 3\tfrac{4}{5},\ 4\tfrac{3}{5},\ 5\tfrac{2}{5},\ 6\tfrac{1}{5},\ 7,\ 7\tfrac{4}{5},.....$$

Sind a und b zwei aufeinanderfolgende Glieder einer *geometrischen* Progression, und sollen zwischen a und b ebenfalls n Glieder interpolirt werden, so dient dazu die Gleichung $u = a.d^{n-1}$, oder nach den gegebenen Bezeichnungen:

$$b = a.d^{n+1},$$

und man erhält $d = \sqrt[n+1]{b:a}$.

Sollen in der Reihe

$$4, 4.3, 4.3^2.....$$

3 neue Glieder interpolirt werden, so ist:

$$d = \sqrt[4]{3};$$

daher ist die neue Reihe:

$$4, 4.\sqrt[4]{3}, 4.\left(\sqrt[4]{3}\right)^2, 4.\left(\sqrt[4]{3}\right)^3, 4.3.....$$

Anm. In diesem §. sind die günstigsten Bedingungen zur Ausführung der Interpolation gewählt. Bedeutend schwieriger wird dieselbe, wenn nicht die vollständige Progression gegeben ist, sondern nur drei der in ihr vorkommenden Größen.

§. 48. Zusatz.

Die Interpolation bietet ein, wenngleich nicht bequemes, Mittel zur Berechnung der Logarithmen.

Die beiden Progressionen:

1) 1, 2, 3, 4, 5 ....

2) 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5....

correspondiren mit einander, da die Glieder der ersteren zugleich Logarithmen der entsprechenden Glieder in der zweiten sind. Interpolirt man nun in beiden Progressionen n neue Glieder, so erhält man dadurch n neue Logarithmen. Man darf jedoch, um die Interpolationsgleichung $d = \sqrt[n+1]{b:a}$ auflösen zu können, n nicht beliebig nehmen, sondern der Art, daß $n+1$ der Form $2^x.3^y$ entspricht, weil nur für diese Form des Wurzelexponenten das Ausziehen der Wurzel (ohne Hülfe von Logarithmen) möglich ist.

Anm. Da die Glieder der Reihe 1) das Abhängigkeitsverhältniß der Glieder der Reihe 2) angeben, so hat man sie Verhältnißzahlen (Logarithmen) genannt.

Aufgaben.

Aus drei gegebenen Größen einer Progression sollen die übrigen zwei berechnet werden.

I. Arithmetische Progression. Es sind gegeben:

1) $a=3$; $d=5$; $n=68$;
2) $a=-5$; $d=2$; $n=7$;
3) $a=5$; $d=2$; $u=41$;
4) $a=-4\frac{1}{2}$; $d=1\frac{1}{2}$; $u=33$;
5) $a=2$; $d=3$; $s=187$;
6) $a=-\frac{3}{4}$; $d=-\frac{7}{8}$; $s=-281\frac{1}{4}$;
7) $d=3$; $n=8$; $u=43$;
8) $d=\frac{1}{2}$; $n=11$; $u=5$;
9) $d=2$; $n=5$; $s=115$;
10) $d=\frac{1}{3}$; $n=100$; $s=1900$;
11) $n=17$; $u=50$; $s=442$;
12) $n=6$; $u=-20$; $s=-90$.

II. Geometrische Progression. Es sind gegeben:

13) $a=1$; $d=2$; $n=7$;
14) $a=6\frac{1}{4}$; $d=\frac{3}{2}$; $n=8$;
15) $d=3$; $n=10$; $u=78732$;
16) $d=4$; $n=9$; $u=327680$;
17) $d=5$; $n=8$; $s=97656$;
18) $a=2$; $d=3$; $u=486$;
19) $a=2$; $d=\frac{1}{2}$; $u=\frac{1}{32}$;
20) $a=\frac{1}{2}$; $u=40\frac{1}{2}$; $s=60\frac{1}{2}$;
21) $a=1\frac{1}{2}$; $u=96$; $s=127\frac{1}{2}$.

Es sollen zwischen folgenden Gliedern einer Progression n neue Glieder interpolirt werden.

I. Arithmetische Progression.

22) 3 Glieder zwischen 20 und 30; 23) 4 Glieder zwischen $12\frac{1}{2}$ und 18;
24) 7 Glieder zwischen —16 und 8.

II. Geometrische Progression.

25) 3 Glieder zwischen 5 und 405; 26) 4 Glieder zwischen 4 und $\frac{1}{8}$;
27) 5 Glieder zwischen $\frac{7}{9}$ und 567;

28) Bei einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist $d=2$; das Produkt der vier Glieder ist 945. Welche Progression ist es?

29) Bei einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist d gegeben und das Produkt p der vier Glieder. Welche Progression ist es?

30) Bei einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder = 780, die Summe der ungeraden = 156. Welche Progression ist es?

31) Bei einer geometrischen Progression von 5 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder $=3\frac{1}{3}$, die Summe der ungeraden $=10\frac{1}{9}$. Welche Progression ist es?

32) Bei einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder = 31, die Summe der Quadrate derselben = 341, die Summe der Cuben = 4681. Welche Progression ist es?

33) Bei einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder = 15, die Summe der Quadrate derselben = 85, die Summe der Biquadrate = 4369. Welche Progression ist es?

Auflösungen.

1) $u=338$; $s=11492$; 2) $u=7$; $s=7$; 3) $n=19$; $s=437$; 4) $n=26$; $s=370\frac{1}{2}$; 5) $n=11$; $u=32$; 6) $n=25$; $u=-21\frac{3}{4}$; 7) $a=22$; $s=260$; 8) $a=0$; $s=27\frac{1}{2}$; 9) $a=19$; $u=27$; 10) $a=2\frac{1}{2}$; $u=35\frac{1}{2}$; 11) $a=2$; $d=3$; 12) $a=-10$; $d=-2$; 13) $u=64$; $s=127$; 14) $u=106\frac{496}{512}$; $s=307\frac{441}{512}$; 15) $a=4$; $s=118096$; 16) $a=5$; $s=436905$; 17) $a=1$; $u=78125$; 18) $n=6$; $s=728$; 19) $n=7$; $s=3\frac{31}{32}$; 20) $d=3$; $n=5$; 21) $d=4$; $n=4$; 22) $d=2\frac{1}{2}$; 23) $d=1\frac{1}{10}$; 24) $d=3$; 25) $d=3$; 26) $d=\frac{1}{2}$; 27) $d=3$; 28) $a=3$; 29) $a=\frac{1}{2}(-3d\mp\sqrt{5d^2\mp\sqrt{p+d^4}}$; 30) $a=9$; $d=\frac{1}{3}$; 31) $a=6$; $d=5$; 32) $a=1$; $d=2$; $n=5$; 33) $a=1$; $d=2$; $n=4$.

Anhang zu den Capiteln III. und IV.

Von der zusammengesetzten Zinsrechnung.

Die Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung unterscheiden sich von denen der einfachen dadurch, daß bei erstern die fälligen Zinsen sogleich wieder als Capital auftreten und Zinsen bringen. Bei einfacher Zinsrechnung geben 100 Thlr. zu $4\,\%$ in zwei Jahren 8 Thlr. Zinsen, bei zusammengesetzter aber $8\frac{4}{25}$ Thlr., weil die 4 Thlr. Zinsen des ersten Jahres im zweiten Jahre schon Zinsen bringen. Die zusammengesetzte Zinsrechnung trennt man in gewöhnliche Zinseszinsrechnung und in Rentenrechnung.

A. Zinseszinsrechnung.

Aufgabe I. Es soll bestimmt werden, zu welcher Größe ein Capital von c Thlr. bei $p\,\%$ nach t Jahren anwächst.

Auflös. Bei $p\,\%$ bringt 1 Thlr. jährlich $\frac{p}{100}$ Thlr. Zinsen, wächst also nach Ablauf dieser Zeit auf $1+\frac{p}{100}=\frac{100+p}{100}$ Thlr. an; c Thlr. wachsen

daher nach einem Jahre an auf c. $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ Thlr.; letzteres Capital erfährt nach Verlauf wiederum eines Jahres dieselbe verhältnißmäßige Vergrößerung und wächst an auf c. $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$; im dritten Jahre findet das Nämliche statt, und man hat zu Ende dieses Jahres ein Capital von c. $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3$; nach t Jahren sind also c Thlr. angewachsen auf c. $\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$.

Bezeichnet C die Summe, zu welcher c Thlr. mit Zins und Zinseszins in t Jahren bei p% anwachsen, so hat man also die Gleichung:

$$C = c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t.$$

Durch Logarithmiren geht dieselbe über in:

$$\log C = \log c + t.\log \frac{100+p}{100}.$$

Sind nun drei dieser Größen gegeben, so findet man die vierte leicht. Die vollständigen Gleichungen sind:

$$1)\ \log C = \log c + t.\log \frac{100+p}{100};$$

$$2)\ \log c = \log C - t.\log \frac{100+p}{100};$$

$$3)\ \log \frac{100+p}{100} = \frac{\log C - \log c}{t};$$

$$4)\ t = (\log C - \log c) : \log \frac{100+p}{100}.$$

Beispiele:

a) Zu welcher Summe wachsen 6200 Thlr. bei 4% nach 8 Jahren an?

Auflös. Es ist $\log C = \log 6200 + 8.\log 1{,}04$;
oder $\log C = 3{,}7923917 + 8.0{,}0170333$
$= 3{,}9286581$;
daher $C = 8485{,}12\ldots$ Thlr.

b) Bei wie viel % wachsen 8450 Thlr. in 9 Jahren auf 12500 Thlr. an?

Auflös. Es ist $\log \frac{100+p}{100} = (\log 12500 - \log 8450) : 9$
$= (4{,}0969100 - 3{,}9268567) : 9$
$= 0{,}0188918$;
daher $100+p = 104{,}44\ldots$
$p = 4{,}44\ldots$

c) Nach welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital durch die hinzutretenden Zinsen, wenn $4\frac{0}{0}$ gerechnet werden?

Auflös. Es ist $t = (\log 2c - \log c) : \log 1{,}04$
$= \log 2 : \log 1{,}04$
$= 0{,}3010300 : 0{,}0170333$
$= 17{,}67.....$

Anm. Nach den gegebenen Gleichungen berechnet man auch die Zunahme der Bevölkerung, die Werthzunahme eines Forstreviers u. dergl.

Aufgabe II. Es werden c Thlr. zu $p\frac{0}{0}$ auf Zinsen gegeben, und jährlich zum Capital die Zinsen, aber außerdem noch d Thlr. hinzugefügt. Wie groß ist das Capital zu Ende des t^{ten} Jahres?

Auflös. Es sind hierbei folgende Aufgaben zu lösen:

Zu welcher Summe wachsen bei $p\frac{0}{0}$ (mit Zinseszinsen) an:

1) c Thlr. in t Jahren? 2) d Thlr. in t—1 Jahren?
3) d Thlr. in t—2 Jahren? 4) d Thlr. in t—3 Jahren?

u. s. w. bis d Thlr. in 1 Jahre?

Die Summe der Auflösungen ist gleich dem gesuchten Capitale. Man erhält nun (vergleiche Aufgabe I.):

$$C = c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + d.\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-1} + d.\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-2} +$$
$$+ d.\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-3} + \ldots + d.\frac{100+p}{100} + d$$

$$\text{oder } C = c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + d\left\{\frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1}{\frac{100+p}{100} - 1}\right\} \text{ (nach §. 44)}$$

$$= c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + \frac{100d}{p}\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\}.$$

Eine allgemeine logarithmische Gleichung ist hier nicht möglich. Wird C gesucht, so berechnet man die beiden Glieder auf der rechten Seite einzeln mit Hülfe der Logarithmen und addirt sie alsdann; ebenso ist die Berechnung leicht auszuführen, wenn c oder d oder t gesucht werden. Die Größe von p kann nur durch Probiren erhalten werden.

Würden jährlich nicht d Thlr. hinzugefügt, sondern weggenommen, so wäre d negativ in Rechnung zu bringen.

Beispiele.

d) Jemand hat 8000 Thlr. zu $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ angelegt, und vermehrt das Capital jährlich um die fälligen Zinsen und um 300 Thlr. Welchen Betrag hat dasselbe zu Ende des zehnten Jahres?

Auflös. Es ist $C = 8000.(1{,}045)^{10} + \frac{100.300}{4{,}5}\left\{(1{,}045)^{10} - 1\right\}$

$$= \left(8000 + \frac{100.300}{4{,}5}\right).\left(1{,}045\right)^{10} - \frac{100.300}{4{,}5}$$

$$= \{44000.(1{,}045)^{10} - 20000\} : 3$$

Nun ist $\log \{44000 . (1{,}045)^{10}\} = 5{,}8346157,$

daher $44000 . (1{,}045)^{10} = 68330{,}69\ldots.;$

also $C = 16110{,}23\ldots$

c) Jemand hat 17500 Thlr. Schulden, die zu 4 % stehen. Jährlich zahlt er 1100 Thlr. zurück. Wann ist die Schuld abgetragen?

Auflös. Es ist $0 = 17500(1{,}04)^t - 27500\{(1{,}04)^t - 1\}$

$$= -10000(1{,}04)^t + 27500;$$

daher $(1{,}04)^t = 2{,}75$

$t = \log 2{,}75 : \log 1{,}04$

$= 0{,}4393327 : 0{,}0170333$

$= 25{,}8\ldots.$

B. Rentenrechnung.

Unter **Rente** versteht man eine bestimmte Summe, die Jemand von Zeit zu Zeit bezahlt, um dadurch eine Schuld nach und nach abzutragen. Kauft Jemand eine Rente, so wird ihm in bestimmten Terminen eine gewisse Summe ausgezahlt. Die Kaufsumme heißt die **Mise**. Eine Rente heißt **beständig**, wenn die Terminzahlungen immer dieselbe Größe haben; im entgegengesetzten Falle ist sie **veränderlich**. Eine **Leib- oder Lebensrente** wird bis zum Tode des Rentiers bezahlt; für die **wahrscheinliche** Lebensdauer hat man in solchen Fällen Tabellen, denen langjährige Beobachtungen zu Grunde liegen.

Aufgabe III. Es soll der Werth der Mise M bestimmt werden, wenn t Jahre lang die Rente r zu Ende eines jeden Jahres gezahlt wird, und p % gerechnet werden.

Auflös. Es muß M einen solchen Werth haben, daß es nach t Jahren bei p % mit Zins und Zinseszins auf dieselbe Summe anwächst, auf welche die einzelnen Zahlungen mit Zins und Zinseszins zusammen in ihren zugehörigen Zeiten bis zu Ende des t^{ten} Jahres angewachsen sein würden.

Nun beträgt M nach t Jahren: $M\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$ (Aufgabe I.)

Die einzelnen Zahlungen r betragen zu Ende des t^{ten} Jahres:

$$\frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\}$$ (Aufgabe II.)

Es ist folglich:

$$M.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t = \frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\}$$

$$\text{und } M = \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Werthe von M, r, t numerisch mit Hülfe der Logarithmen bestimmen; der Werth von p ist nur durch Probiren zu ermitteln.

Beispiele.

f) Gegeben ist $r=800$; $t=20$; $p=4$. Gesucht wird M.

Auflös. Es ist $M = 20000\left\{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^{20}\right\}$

$$= 20000 - \{20000:(1,04)^{20}\}.$$

Nun ist $\log \{20000:(1,04)^{20}\} = 3,9603640$

daher $20000:(1,04)^{20} = 9127,7..$

und $M = 10872,2.....$

g) Gegeben ist $M=12000$; $p=4$; $r=500$. Gesucht wird t.

Auflös. Es ist $12000 = 12500\left\{1-\left(\frac{1}{1,04}\right)^t\right\}$

$$\text{oder } 500 = \left(\frac{1}{1,04}\right)^t \cdot 12500$$

oder $(1,04)^t = 25$;

daher $t = \log 25 : \log 1,04$

$= 1,3979400 : 0,0170333$

$= 82,07...$

Aufgabe IV. Eine Rente von r Thlr. auf t Jahre soll gegen eine andere Rente von R Thlr. umgetauscht werden. Auf wie viele Jahre ist letztere zu zahlen, wenn in beiden Fällen $p\frac{0}{0}$ gerechnet werden?

Auflös. Für die erstere Rente ist:

$$M = \frac{100r}{p}\left\{1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\}$$

für die andere:

$$M = \frac{100R}{p}\left\{1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^T\right\}.$$

Da M in beiden Gleichungen denselben Werth hat, so folgt:

$$\frac{100r}{p}\left\{1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\} = \frac{100R}{p}\left\{1-\left(\frac{100}{100+p}\right)^T\right\}$$

$$\text{oder } r - R = r.\left(\frac{100}{100+p}\right)^t - R\,.\left(\frac{100}{100+p}\right)^T$$

Aus dieser Gleichung sind die Größen R, r, t, T numerisch zu bestimmen mit Hülfe der Logarithmen, p nur durch Probiren.

Beispiele.

h) Gegeben ist r = 800; p = 4; t = 12; R = 1200. Gesucht wird T.

Auflös. Es ist $800 - 1200 = 800.\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12} - 1200\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^T$

$$\text{oder } 1 = 3.\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^T - 2.\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12}.$$

$$\text{Also } \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^T = \left\{1+2\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12}\right\} : 3$$

$$= 0{,}7497....$$

$$\text{Nun ist } T.\log\frac{1}{1{,}04} = \log 0{,}7497$$

$$\text{oder } T = \log 0{,}7497 : -(\log 1{,}04)$$

$$= 7{,}3.....$$

i) Gegeben ist r = 800; p = 4; t = 12; T = 16. Gesucht wird R.

Auflös. Es ist $800 - R = 800.\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12} - R.\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{16}$;

$$\text{daher } R.\left\{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{16} - 1\right\} = 800.\left\{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12} - 1\right\}$$

$$\text{oder } R.\{1 - (1{,}04)^{16}\} = 800.\{(1{,}04)^4 - (1{,}04)^{16}\}$$

$$\text{oder } R = 800.\{(1{,}04)^{16} - (1{,}04)^4\} : \{(1{,}04)^{16} - 1\}$$

$$= 644{,}38...$$

Die Aufgaben mit veränderlichen Renten sind schwieriger; die Behandlungsweise ist jedoch in der Hauptsache dieselbe.

Aufgaben.

A. Zinseszinsrechnung.

Es sei c das ausgeliehene Capital, p die Prozente, t die Zeit, C die Summe, zu welcher c bei $p\frac{0}{0}$ in t Jahren anwächst.

1) $c=5000$; $p=4$; $t=40$; 2) $c=32500$; $p=3$; $t=24$;
3) $C=2000$; $p=3$; $t=10$; 4) $c=8000$; $n=16$; $C=16809{,}5$;
5) $a=5720$; $p=4\frac{1}{2}$; $C=13072\frac{7}{8}$; 6) $c=3865$; $p=2\frac{1}{2}$; $C=5500$;
7) $p=5\frac{0}{0}$; $C=2c$;

8) 300 Thlr. werden zu $5\frac{0}{0}$ ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 300 Thlr. Wie groß ist die Summe zu Ende des 20sten Jahres?

9) 4000 Thlr. werden zu $4\frac{0}{0}$ ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 4000 Thlr. Wie groß ist die Summe zu Ende des 7ten Jahres?

10) 6000 Thlr. werden zu $5\frac{0}{0}$ ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 500 Thlr. Wie groß ist die Summe nach 10 Jahren?

11) 15467 Thlr. stehen zu $5\frac{0}{0}$; zu Ende jedes Jahres werden 600 Thlr. abgetragen. Wie viel beträgt die Schuld nach 10 Jahren?

12) Wie lange müssen 3600 Thlr. zu $5\frac{0}{0}$ auf Zinseszinsen stehen, um so groß zu werden, wie 5000 Thlr. zu $4\frac{0}{0}$ in 12 Jahren geworden sind?

13) Welches Capital beträgt mit Zins und Zinseszins bei $4\frac{0}{0}$ nach 15 Jahren ebensoviel, als 4500 Thlr. zu $6\frac{0}{0}$ nach 9 Jahren?

14) Wie groß ist die Mise für eine Rente von 16000 Thlr. auf 25 Jahre bei $4\frac{0}{0}$?

15) Welche Rente kann neunmal gezahlt werden, wenn die Mise 7500 Thlr. beträgt und $4\frac{0}{0}$ gerechnet werden?

16) Eine Summe von 30000 Thlr. soll abgetragen werden durch eine jährliche Abzahlung von 2124 Thlr. Wann ist die Summe abgetragen, wenn $6\frac{0}{0}$ gerechnet werden?

Auflösungen.

1) $C = 24005{,}103\ldots$; 2) $C = 66065{,}808\ldots$; 3) $c = 1488{,}2\ldots$;
4) $p = 4\frac{1}{4}$; 5) $t = 18{,}7785\ldots$; 6) $n = 14{,}2871\ldots$; 7) $n = 14{,}20\ldots$;
8) 10415,6...; 9) 31593; 10) 16062,29...; 11) 17647;
12) 16,38... Jahre; 13) 4221; 14) 249053; 15) 1008,7...;
16) 25,1... Jahre.

Fünftes Capitel.

Von den combinatorischen Operationen, vom binomischen und polynomischen Lehrsatze.

§. 49. Erklärung.

Sind a, b, c, d u. s. w. gegebene Größen oder Elemente, so lassen sich diese in verschiedener Anzahl und Reihenfolge nebeneinander hinstellen oder gruppiren. Eine jede solche Gruppe, wie z. B. abcd, aacef u. s. w. nennt man eine Form oder Complexion. Dieselbe heißt Union, Binion (Ambe), Trinion (Terne), Quaternion (Quaterne) u. s. w., je nachdem sie aus 1, 2, 3, 4 u. s. w. Elementen besteht. Die Anzahl oder Natur aller möglichen Complexionen bei einer bestimmten Anzahl von Elementen zu bestimmen, ist die Aufgabe der combinatorischen Operationen. Dieselben zerfallen in die Lehre von den Permutationen, Variationen und Combinationen im engern Sinne.

A. Von den Permutationen.

§. 50. Erklärung.

Eine gegebene Complexion, z. B. abcd, wird versetzt oder permutirt, wenn man die Elemente dieser Complexion in veränderter Ordnung (z. B. acbd, bacd u. s. w.) hinschreibt. Alle möglichen Permutationen einer Complexion bilden eine Permutationsklasse, und zwar die 2te, 3te, 4te u. s. w., je nachdem die Complexion aus 2, 3, 4 u. s. w. Elementen besteht.

§. 51. Lehrsatz.

Die Anzahl der Permutationen der m^{ten} Klasse ist gleich dem Produkt $1.2.3.4.....m$ (kürzer bezeichnet durch m!, ausgesprochen: m Fakultät).

Beweis. Die zweite Klasse hat zwei Permutationen ab und ba. Bei der dritten Klasse kann jedes Element das erste sein, während die zwei andern zwei Permutationen zulassen. Die Anzahl der Permutationen ist daher $2.3=3!$. Bei der vierten Klasse kann wiederum jedes Element das erste sein, während die drei andern 3! Versetzungen zulassen. Die Anzahl aller Versetzungen ist daher $3!.4=4!$. Fährt man in derselben Art fort, so ergiebt sich die Richtigkeit des Lehrsatzes auch für die folgenden Klassen.

§. 52. Lehrsatz.

Sind nicht alle m Elemente verschieden, kommt a αmal, b βmal, c γmal u. s. w. vor, so ist die Anzahl der Permutationen gleich

$$\frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\ldots}.$$

Beweis. Denkt man sich zunächst die gleichen Elemente a unterschieden als a′, a″, a‴ u. s. w., ebenso die gleichen Elemente b, c u. s. w., so ist die Anzahl aller Permutationen gleich m!. Unter diesen sind je α! Permutationen dadurch entstanden, daß bei unveränderter Ordnung der Elemente b, c, d u. s. w. blos die Elemente a′, a″, a‴ u. s. w. unter sich versetzt werden. Werden nun diese verschiedenen Elemente a′, a″, a‴ u. s. w. einander gleich gesetzt, so fallen je α! Versetzungen in eine zusammen, und es bleiben dann nur $\frac{m!}{\alpha!}$ Versetzungen. Werden bei diesen die β Elemente b′, b″, b‴ u. s. w. ebenfalls nicht mehr unterschieden, so fallen von den $\frac{m!}{\alpha!}$ Permutationen wiederum je β! in eine zusammen, und es bleiben folglich $\frac{m!}{\alpha!\beta!}$. Kommt nun außerdem c γmal, d δmal vor u. s. w., so erhält man also als Anzahl der Permutationen $\frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots.}$.

§. 53. Zusatz.

Kommen unter den m Elementen nur zwei verschiedene Elemente a und b vor, und zwar a αmal, b $(m-\alpha)$mal, so ist die Anzahl der Versetzungen $= \frac{m!}{(m-\alpha)!\alpha!}$. Dieser Ausdruck läßt eine Abkürzung zu. Es besteht der Zähler aus m Faktoren (1, 2, 3,...m), der Nenner ebenfalls aus m Faktoren (1, 2, 3....α und 1, 2, 3... $(m-\alpha)$). Nun kann man Zähler und Nenner zugleich entweder durch α! oder durch $(m-\alpha)$! dividiren. In ersterem Falle bleiben im Zähler und im Nenner $(m-\alpha)$, im zweiten Falle α Faktoren. Die Faktoren des Zählers beginnen mit m und jeder nachfolgende ist um 1 kleiner; die des Nenners beginnen mit 1 und jeder nachfolgende ist um 1 größer.

Es ist also:

$$\frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} = \frac{m.(m-1)(m-2).....[m-(\alpha-1)]}{1.\quad 2\quad .\quad 3\quad .....\quad \alpha}, \text{ oder auch}$$

$$\frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} = \frac{m.(m-1)(m-2).....[m-(m-\alpha-1)]}{1.\quad 2\quad .\quad 3\quad .....\quad (m-\alpha)}.$$

Ausdrücke, wie sie auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen, nennt man Binomialcoefficienten, und bezeichnet dieselben durch die allgemeine Form $a_{(m)}$, wo a den größten Faktor des Zählers, m den größten des Nenners (also auch die Anzahl der Faktoren) bezeichnet. m nennt man den Zeiger oder Index. Die Form $a_{(m)}$ wird ausgesprochen: a mit dem Zeiger m.

Es ist also:

$$a_{(m)} = \frac{a.(a-1)(a-2)\ldots[a-(m-1)]}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\quad m},$$

und z. B.:

$$5_{(3)} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10.$$

Obige zwei Binomialcoefficienten wären also zu bezeichnen durch:

$$m_{(\alpha)} \text{ und } m_{(m-\alpha)}.$$

Mit Binomialcoefficienten rechnet man nach folgenden Lehrsätzen, bei welchen die vorkommenden Buchstaben positive ganze Zahlen bedeuten.

1) $a_{(m)} = a_{(a-m)}$.

Der Beweis folgt aus der vorhergehenden Entwicklung. Es ist also z. B. $8_{(5)} = 8_{(3)}$; $9_{(4)} = 9_{(5)}$.

2) $m_{(m)} = 1$.

3) $m_{(m+n)} = 0$.

Die Beweise zu 2) und 3) erhält man, wenn man statt der Zeichen die eigentlichen Quotienten schreibt.

4) $a_{(m)} + a_{(m+1)} = (a+1)_{(m+1)}$.

Beweis. Es ist $a_{(m+1)} = a_{(m)} \cdot \frac{a-m}{m+1}$, daher

$$a_{(m)} + a_{(m+1)} = a_{(m)} \left\{1 + \frac{a-m}{m+1}\right\} = a_{(m)} \cdot \frac{a+1}{m+1} =$$

$$= \frac{(a+1).a.(a-1)\ldots\ldots[a-(m-1)]}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\quad (m+1)} = (a+1)_{(m+1)}.$$

§. 54. Zusatz.

Bei der Bildung der einzelnen Permutationsklassen verfährt man folgendermaßen:

1) Bei zwei Elementen hat man ab und ba.

2) Bei drei Elementen abc läßt man zunächst a an seiner Stelle und permutirt bc; dann schreibt man b voran, also bac und permutirt ac; dann schreibt man c voran, also cab und permutirt ab.

Man erhält also: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

3) Bei vier Elementen abcd läßt man a an seiner Stelle und permutirt bcd (nach 2); dann schreibt man b voran, also bacd und permutirt acd; dann schreibt man c, endlich d voran, und permutirt jedesmal die drei letzten Elemente.

4) Bei 5 Elementen abcde permutirt man zuerst bcde; dann schreibt man b voran, also bacde und permutirt acde u. s. w.

5) Das Verfahren bei m Elementen ergiebt sich aus dem Vorhergehenden.

Die Permutationen aus m Elementen, unter welchen mehrere gleiche Buchstaben vorkommen, werden in derselben Art gebildet. Man hat nur zu beachten, daß, wenn von mehreren gleichen Elementen das eine schon die erste Stelle eingenommen hat, nicht auch noch die andern die erste Stelle einnehmen können.

Anm. Bei der Bildung der einzelnen Klassen ist es vortheilhaft, die Elemente zunächst alphabetisch zu ordnen.

B. Von den Variationen.

§. 55. Erklärung.

Setzt man jedes der m verschiedenen Elemente a, b, c, d u. s. w. allen m Elementen voran, so bilden diese Verbindungen von zwei Elementen die zweite Variationsklasse mit Wiederholungen aus m Elementen. Bei vier Elementen würde diese Klasse aus folgenden Gliedern bestehen:

aa, ab, ac, ad
ba, bb, bc, bd
ca, cb, cc, cd
da, db, dc, dd

Setzt man einer jeden dieser Verbindungen von zwei Elementen wiederum jedes Element vor, so erhält man die dritte Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus m Elementen. Man erhält die Glieder:

aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, aca, acb, acc, acd u. s. w.
baa, bab, bac, bad, bba, bbb, bbc, bbd, bca, bcb, bcc, bcd u. s. w.
caa, cab, cac, cad, cba, cbb, cbc, cbd, cca, ccb, ccc, ccd u. s. w.
daa, dab, dac, dad, dba, dbb, dbc, dbd, dca, dcb, dcc, dcd u. s. w.

Durch nochmaliges Vorsetzen aller m Elemente erhält man die vierte Klasse, und auf dieselbe Art die folgenden Klassen.

Läßt man aus einer beliebigen Variationsklasse diejenigen Glieder weg, in welchen irgend ein Element öfter als einmal vorkommt, so erhält man die entsprechende Klasse der Variationen ohne Wiederholungen.

Die zweite Klasse derselben würde sein (bei vier Elementen):

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

Die dritte Klasse würde sein:

abc, abd, acb, acd, adb, adc; bac, bad, bca, bcd, bda, bdc;
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb; dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Anm. Es ist leicht einzusehen, daß man bei Bildung der 2ten, 3ten u. s. w. Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d u. s. w. dasselbe Verfahren beobachtet, als wenn man die 2te, 3te u. s. w. Potenz von (a+b+c+d+....) berechnen wollte.

§. 56. Lehrsatz.

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen aus m Elementen ist in der x^{ten} Klasse $= m^x$.

Beweis. Die erste Klasse hat m Glieder. Bei der Bildung der zweiten Klasse verbindet man jedes dieser m Glieder mit m Elementen, erhält also m^2 Glieder. Bei der Bildung der dritten Klasse verbindet man jedes dieser m^2 Glieder mit m Elementen, und erhält dadurch m^3 Glieder. Ebenso erhält man für die vierte Klasse m^4, für die x^{te} m^x Glieder.

§. 57. Lehrsatz.

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung aus m Elementen ist in der x^{ten} Klasse $= m.(m-1)(m-2).....[m-(x-1)]$.

Beweis. Aus der ersten Klasse mit m Elementen erhält man die zweite, indem man jedem dieser m Elemente die (m—1) von ihm verschiedenen Elemente versetzt. Man erhält dadurch m.(m—1) Glieder für die zweite Klasse. Setzt man jedem dieser m.(m—1) Glieder die (m—2) Elemente vor, die es nicht enthält, so erhält man m.(m—1)(m—2) Glieder für die dritte Klasse. Für die folgenden Klassen wird der Beweis ebenso geführt.

Anm. Die Regel für die Bildung der einzelnen Variationsklassen folgt zu Ende des Abschnittes C.

C. Von den Combinationen im engern Sinne.

§. 58. Erklärung.

Combinationen (im engern Sinne) sind Variationen ohne Versetzungen. Man hat daher, wie bei den Variationen, Combinationen mit und ohne Wiederholungen, und man erhält eine beliebige Combinationsklasse aus der entsprechenden Variationsklasse durch Weglassen der Permutationen, und umgekehrt die Variationen aus den Combinationen durch Hinzufügen der Permutationen.

Die zweite Klasse der Combinationen mit Wiederholungen ist also:

aa, ab, ac, ad.....
bb, bc, bd.....
cc, cd.....
dd.....
.....

Ferner dieselbe Klasse ohne Wiederholungen:

ab, ac, ad.....
bc, bd.....
cd.....
.....

Die dritte Klasse der Combinationen mit Wiederholungen ist:

aaa, aab, aac, aad.....
abb, abc, abd.....
acc, acd.....
add.....
.....
bbb, bbc, bbd.....
bcc, bcd.....
bdd.....
.....
ccc, ccd.....
cdd.....
.....
ddd.....
.....

Ferner dieselbe Klasse ohne Wiederholungen:

abc, abd, acd, bcd.

§. 59. Lehrsatz.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen aus m Elementen ist in der x^{ten} Klasse $= m_{(x)}$.

Beweis. Die Anzahl der Variationen in derselben Klasse ist gleich $m.(m-1)(m-2)....[m-(x-1)]$. Da nun jede Complexion dieser Variationsklasse aus x Elementen besteht, und also $x!$ Permutationen zuläßt, so liefern $x!$ Formen der Variationen nur eine Form der Combinationen. Die Anzahl der letztern ist also $m.(m-1)(m-2)....[m-(x-1)] : x! = m_{(x)}$.

§. 60. Lehrsatz.

Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen aus m Elementen ist in der

$$1^{\text{ten}}\ \text{Klasse} = m;$$
$$2^{\text{ten}}\ \text{„} = (m+1)_{(2)};$$
$$3^{\text{ten}}\ \text{„} = (m+2)_{(3)};$$
$$4^{\text{ten}}\ \text{„} = (m+3)_{(4)};$$
$$x^{\text{ten}}\ \text{„} = (m+x-1)_{(x)}.$$

Beweis zu 2). Setzt man jeder Form der ersten Klasse sämmtliche Elemente nach einander vor, so erhält man Formen der zweiten Klasse und zwar in der Art, daß Formen mit gleichen Elementen, wie aa, bb, einmal erhalten werden, Formen aber mit verschiedenen Elementen wie ab, ac, zweimal, nämlich auch in den Versetzungen ba und ca. Man würde aber sämmtliche Formen der zweiten Klasse doppelt erhalten, wenn man bei Bildung derselben jede Form der ersten Klasse mit dem Element, welches sie enthält, zweimal, mit den übrigen nur einmal verbindet. Alsdann liefert jede Form der ersten Klasse (m+1) Formen der zweiten; die doppelte Anzahl der Formen der zweiten Klasse ist daher gleich m(m+1), die einfache gleich $(m+1)_{(2)}$.

Beweis zu 3). Setzt man jeder Form der zweiten Klasse sämmtliche Elemente nach einander vor, so erhält man Formen der dritten Klasse und zwar in der Art, daß Formen mit drei gleichen Elementen, wie aaa, einmal erhalten werden, Formen mit zwei gleichen Elementen, wie aab, zweimal (nämlich auch in der Versetzung baa), Formen mit drei verschiedenen Elementen, wie abc, dreimal (nämlich auch in den Versetzungen bac, cab). Man würde aber sämmtliche Formen der dritten Klasse dreimal erhalten, wenn man jede Form der zweiten Klasse dreimal mit dem Elemente verbindet, welches sie zweimal enthält, zweimal mit dem, welches sie einmal enthält, einmal mit dem, welches sie gar nicht enthält. Je nachdem eine Form der zweiten Klasse beschaffen ist, liefert sie entweder 3+(m—1) oder 2+2+(m—2), also jedesmal (m+2) Formen der dritten Klasse. Die dreifache Anzahl der letztern zusammen ist also gleich $(m+1)_{(2)}.(m+2)$, die einfache gleich $(m+2)_{(3)}$.

Für die folgenden Klassen ergeben sich die Beweise in derselben Art.

Anm. Soll für eine bestimmte Klasse der Combinationen oder Variationen aus m Elementen die Anzahl der Formen bestimmt werden, welche den Buchstaben a enthalten, so bestimmt man die Anzahl der Formen erst für m, dann für (m—1) Elemente, und subtrahirt letztere Zahl von ersterer.

§. 61. Zusatz.

Soll die x^{te} Klasse der Combinationen mit Wiederholungen aus m Elementen gebildet werden, so schreibe man das niedrigste Element (d. h. das im Alphabet voranstehende) xmal nebeneinander als erste Form; dann vertausche man das zuletzt geschriebene nach und nach mit allen höhern Elementen; dann vertausche man das vorletzte, indem man

zugleich alle möglichen Veränderungen des letzten Gliedes eintreten läßt, aber so, daß das voranstehende Element nie höher ist, als das nachfolgende; dann vertausche man das drittletzte Glied u. s. w.

So erhält man für die vierte Klasse aus den Elementen a, b, c, d, e:

aaaa; aaab; aaac; aaad; aaae;
aabb; aabc; aabd; aabe; aacc; aacd; aace; aadd; aade; aaee;
abbb; abbc; abbd; abbe; abcc; abcd; abce; abdd; abde; abee;
accc; accd; acce; acdd; acde; acee; addd; adde; adee; aeee;
bbbb; bbbc; bbbd; bbbe;
bbcc; bbcd; bbce; bbde; bbee;
bccc; bccd; bcce; bcdd; bcde; bcee; bddd; bdde; bdee; beee;
cccc; cccd; ccce; ccdd; ccde; ccee; cddd; cdde; cdee; ceee;
dddd; ddde; ddee; deee;
eeee.

§. 62. Zusatz.

Die Combinationsklassen ohne Wiederholungen bildet man in derselben Art, nur darf kein Element zweimal vorkommen. Bei obiger Aufgabe würde man also beginnen mit abcd, und würde d, dann c, dann b ändern. Man würde erhalten:

abcd; abce; abde; acde; bcde.

Die Variationen mit und ohne Wiederholungen erhält man, wenn man zu jeder Complexion der entsprechenden Combinationsklasse noch die möglichen Permutationen hinzufügt.

D. Der binomische und polynomische Lehrsatz.

§. 63. Erklärung.

Der binomische Lehrsatz giebt die Entwicklung der m^{ten} Potenz des Binoms $(a+b)$ in Gestalt einer nach Potenzen von a und b geordneten Reihe; a und b bedeuten beliebige Zahlen, m eine positive, ganze Zahl.

Nach §. 55 ist die m^{te} Potenz von $(a+b)$ gleich der Summe aller Formen aus der m^{ten} Klasse der Variationen mit Wiederholungen. Sollen diese Formen addirt werden, so lassen sich alle Permutationen ein und derselben Form zusammenfassen, und als verschiedene Formen bleiben dann nur die Combinationen mit Wiederholungen. Diese sind aber:

$$a^m;\ a^{m-1}b;\ a^{m-2}b^2;\ a^{m-3}b^3 \ldots\ldots$$

Daher ist:

$$(a+b)^m = A.a^m + B.a^{m-1}b + C.a^{m-2}b^2 + D.a^{m-3}b^3 + \ldots$$

wobei A, B, C, D... die Anzahlen der möglichen Versetzungen der jedesmaligen Complexion bedeuten. Nun ist aber (nach §. 52):

$$A = \frac{m!}{m!} = m_{(m)} = 1\,; \qquad B = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} = m_{(1)}\,;$$

$$C = \frac{m!}{(m-2)!\,2!} = m_{(2)}\,; \qquad D = \frac{m!}{(m-3)!\,3!} = m_{(3)}\,;\ \text{u. s. w.}$$

Daher ist:

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}b + m_{(2)}a^{m-2}b^2 + m_{(3)}a^{m-3}b^3 + \ldots.$$

Diese Reihe bricht ab, sobald der Index zu m größer wird als m, weil man alsdann (nach §. 53) den Factor o erhält. So ist z. B.:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 5_{(2)}a^3b^2 + 5_{(3)}a^2b^3 + 5_{(4)}ab^4 + 5_{(5)}b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Anm. Die Zahlencoefficienten müssen sich wiederholen, weil $m_{(a)} = m_{(m-a)}$, also z. B. $5_{(3)} = 5_{(2)}$ ist.

§. 64. Zusatz.

Man kann das eben Gesagte auch benutzen zur Entwicklung des Products $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots.$ in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe. Wären a, b, c, d... einander gleich (= a), so würde man (bei m Faktoren) erhalten:

$$x^m + ma.x^{m-1} + m_{(2)}a^2.x^{m-2} + \ldots.$$

Sind aber nun jene Zahlen verschieden, so geht ma über in die Summe der m Größen a, b, c, d....., ferner $m_{(2)}a^2$ in die Summe der Combinationen (zu zweien) ohne Wiederholungen u. s. w., und es ist daher:

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots = x^m + (a+b+c+d+\ldots)x^{m-1} +$$
$$+ (ab+ac+ad+\ldots.+bc+bd\ldots.+cd+\ldots.)x^{m-2} + \ldots.$$

oder bei vier Elementen:

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+$$
$$+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

§. 65. Zusatz.

Ist in $(a+b)^m$ der Summand b, oder ist in dem Produkte $(a+x)(b+x)(c+x)\ldots$ der Summand x negativ, so erhält man dieselben Reihen wie oben, aber es sind die Glieder, in denen ungerade Potenzen von b oder x vorkommen, negativ.

§. 66. Erklärung.

Der polynomische Lehrsatz giebt die Entwicklung der m^{ten} Potenz des Polynoms $(a+b+c+d+\ldots)$ in Form einer nach den Potenzen von a, b, c, d... geordneten Reihe. Man erhält wiederum für $(a+b+c+d+\ldots)^m$ die Summe aller Formen der m^{ten} Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d... Zunächst hat man also (wie in §. 63) die Combinationen zu bilden. Diese sind:

a^m;

$a^{m-1}b$;	$a^{m-1}c$;	$a^{m-1}d$;	$a^{m-1}e$;	u. s. w.
$a^{m-2}b^2$;	$a^{m-2}bc$;	$a^{m-2}bd$;	$a^{m-2}be$;	u. s. w.
	$a^{m-2}c^2$;	$a^{m-2}cd$;	$a^{m-2}ce$;	u. s. w.
		$a^{m-2}d^2$;	$a^{m-2}de$;	u. s. w.
			u. s. w.	
$a^{m-3}b^3$;	$a^{m-3}b^2c$;	$a^{m-3}b^2d$;	$a^{m-3}b^2e$	u. s. w.
	u. s. w.			

Zu allen diesen Complexionen hat man nun noch als Zahlenfactoren die Anzahl der möglichen Permutationen hinzuzufügen. Diese ist für die Complexion $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$ $= \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots.}$

Für die dritte Potenz von $(a+b+c+d)$ erhält man:
$a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2+$
$+b^3+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$.

Anhang zu Capitel V.

Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erklärung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine Anwendung der Lehre von den Combinationen, soweit sie sich auf folgende Betrachtung gründet.

Wenn man über den günstigen oder ungünstigen Verlauf eines Ereignisses Nichts im Voraus bestimmen kann, jedoch weiß, daß dieses Ereigniß auf m verschiedene Arten verlaufen kann, von denen n als günstig, m-n als ungünstig zu betrachten sind, so hat man desto größere Wahrscheinlichkeit auf einen günstigen Verlauf, je näher n an m liegt. Man nennt nun $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit (W), $\frac{m-n}{m}$ die Unwahrscheinlichkeit (U), und es ist daher:

1) $W+U=1$; 2) $W:U=n:(m-n)$.

Ist $W=1$, so ist der günstige Erfolg gewiß; ist $W>\frac{1}{2}$, so ist er nach gewöhnlichem Sprachgebrauch wahrscheinlich; ist $W<\frac{1}{2}$, so ist er unwahrscheinlich; ist $W=\frac{1}{2}$, so ist ebensoviel Aussicht auf einen günstigen, wie auf einen ungünstigen Verlauf. Da bei Wetten die Einsätze in demselben Verhältnisse stehen müssen, wie die Wahrscheinlichkeiten des günstigen Erfolges für jede der Parteien, so ist das Verhältniß der Einsätze durch die Gleichung 2) zu bestimmen. In der Wirklichkeit erleidet dieser Grundsatz allerdings seine Beschränkung, denn wenn auch die Wahrscheinlichkeiten sich verhalten wie 1 : 100000, so wird doch nicht leicht Jemand 100000 Thlr. gegen 1 Thlr. wetten.

Zur Bestimmung von n und (m—n) benutzt man die Lehre von den Combinationen.

Aufgaben.

I. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit einem Würfel auf das erste Mal Sechs zu werfen?

Auflös. Es sind 6 mögliche Fälle, 1 günstiger, daher $W=\frac{1}{6}$.

II. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Spiele französischer Karten beim ersten Male Coeur zu ziehen?

Auflös. Es sind 52 mögliche Fälle, 13 günstige, daher $W=\frac{1}{4}$.

III. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus demselben Spiele zweimal hintereinander Coeur zu ziehen?

Auflös. Die Anzahl der möglichen Verbindungen erhält man als Anzahl der Combinationen zu zweien ohne Wiederholungen aus 52 Elementen $= 52_{(2)}$. Von diesen liefern die 13 Coeurkarten $13_{(2)}$ günstige Verbindungen. Es ist also $W=13_{(2)}:52_{(2)}=\frac{1}{17}$.

IV. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus demselben Spiele sechsmal hintereinander Coeur zu ziehen?

Auflöſ. Es wird W gefunden wie in III., und iſt gleich $13_{(6)} : 52_{(6)} = \frac{33}{391510}$.

V. Welche Wahrſcheinlichkeit hat man, mit drei Würfeln beim erſten Male wenigſtens zwei gleiche Augen zu werfen?

Auflöſ. Die Anzahl der möglichen Fälle iſt gleich der Anzahl der Variationen zu dreien mit Wiederholungen aus 6 Elementen, alſo $= 6^3$; die Anzahl der ungünſtigen Fälle gleich der Anzahl derſelben Variationen ohne Wiederholungen, alſo $= 6.5.4$. Es iſt alſo $U=(6.5.4):6^3=\frac{5}{9}$, daher $W=\frac{4}{9}$.

Erklärung.

Iſt bei einem Ereigniſſe die Wahrſcheinlichkeit für den einen Verlauf $=\frac{n}{m}$, für einen zweiten $=\frac{n'}{m}$, für einen dritten $=\frac{n''}{m}$ u. ſ. w., ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß das Ereigniß in einer dieſer Arten verlaufe, gleich $\frac{n+n'+n''+\ldots}{m}$, da es immer noch m mögliche, aber $n+n'+n''\ldots$ günſtige Fälle ſind.

Aufgabe.

VI. Welche Wahrſcheinlichkeit hat man, mit zwei Würfeln zwei gleiche Augen oder Sieben als Summe der Augen zu werfen?

Auflöſ. Die einzelnen Wahrſcheinlichkeiten ſind jede $= \frac{1}{6}$, alſo iſt für die Aufgabe: $W = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Erklärung.

Iſt für ein Ereigniß die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{n}{m}$, für ein zweites $= \frac{n'}{m'}$, ſo kann die Frage entſtehen, welche Wahrſcheinlichkeit vorhanden ſei, daß beide Ereigniſſe eintreten. Sind beide Ereigniſſe unabhängig von einander, ſo iſt die Anzahl der günſtigen Fälle offenbar $n.n'$, weil jeder der n Fälle ſich mit jedem der n' Fälle verbinden läßt, und aus demſelben Grunde die Anzahl der möglichen Fälle $= m.m'$; W iſt daher $= \frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}$. Stehen jedoch die Ereigniſſe in einer gewiſſen Abhängigkeit von einander, ſo richtet ſich die Anzahl der günſtigen und möglichen Fälle nach der Natur der Aufgabe.

Aufgaben.

VII. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Spiele französischer Karten hintereinander drei Coeur zu ziehen?

Auflös. Die Wahrscheinlichkeit für das erste Mal ist $\frac{13}{52}$, für das zweite Mal, wo schon ein Coeur fehlt, gleich $\frac{12}{51}$, für das dritte Mal gleich $\frac{11}{50}$, also:

$$W = \frac{13.12.11}{52.51.50} = \frac{13_{(3)}}{52_{(3)}} = \frac{17}{850}.$$

VIII. Wenn A, B, C jeder zwei Würfel auf einen Tisch werfen, welche Wahrscheinlichkeit ist dann, daß A einen Pasch, B keinen Pasch, C aber 6 als Summe der Augen wirft?

Auflös. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{36}$, also:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{1296}.$$

IX. Zwei Urnen stehen nebeneinander. In der ersten sind vier schwarze und eine weiße, in der zweiten zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, beim ersten Griff die zweite Urne zu wählen und zwei weiße Kugeln zu ziehen?

Auflös. Die Wahrscheinlichkeit, in die zweite Urne zu greifen, ist $\frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit, alsdann 2 weiße Kugeln zu ziehen, ist $\frac{3}{10}$; daher:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}.$$

Erklärung.

Ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereigniß $= \frac{n}{m}$, für ein zweites $= \frac{n'}{m'}$, für ein drittes $= \frac{n''}{m''}$ u. s. w., so kann die Frage entstehen, welche Wahrscheinlichkeit man dafür habe, daß beim ersten Male das erste Ereigniß eintrete, oder wenn dies nicht geschieht, beim zweiten Male das andere, oder, wenn auch dies nicht geschieht, beim dritten Male das dritte. Die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß eintrete, ist $\frac{n}{m}$, also die Wahrscheinlichkeit, daß es nicht eintrete und man noch einen Versuch machen müsse, $= 1 - \frac{n}{m}$; daß bei diesem zweiten Versuche alsdann das zweite Ereigniß wirklich eintrete, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $= \left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer dieser Fälle eintrete,

ist also $= \frac{n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 - \frac{n'}{m'}\right)$. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit durch $\frac{a}{b}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß keiner dieser Fälle eintrete und man noch einen dritten Versuch machen müsse, $= \left(1 - \frac{a}{b}\right)$; daß dieser günstig ausfalle, dafür ist dann die Wahrscheinlichkeit $= \left(1 - \frac{a}{b}\right)\frac{n''}{m''}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß einer der drei Fälle eintrete, ist also:

$$\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)\cdot\frac{n''}{m''} = 1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{n''}{m''}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 - \frac{n'}{m'}\right)\left(1 - \frac{n''}{m''}\right).$$

Entsprechend ist die Lösung, wenn noch mehr Fälle angenommen werden.

Aufgaben.

X. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit einem Würfel beim ersten Male Sechs, oder beim zweiten Male Fünf zu werfen?

Auflös. Es ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{6}$; $\frac{n'}{m'} = \frac{1}{6}$; daher $W = 1 - \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}$.

XI. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit einem Würfel in drei Versuchen wenigstens einmal Sechs zu werfen?

Auflös. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{6}$; daher ist

$$W = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{91}{216}.$$

XII. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß beim Niederfallen einer hochgeworfenen Münze unter vier Versuchen wenigstens einmal das Wappen oben liege?

Auflös. Die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Fall ist $= \frac{1}{2}$; daher

$$W = 1 - (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{15}{16}.$$

Erklärung.

Ist für ein Ereigniß die Wahrscheinlichkeit $= \frac{n}{m}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es zmal hintereinander eintreffe $= \left(\frac{n}{m}\right)^z$, und die Wahrscheinlichkeit, daß es in den darauf folgenden x Versuchen nicht eintreffe, gleich $\left(\frac{m-n}{m}\right)^x$. Die Wahrscheinlichkeit also, daß es unter $(z+x)$ Versuchen erst zmal eintreffe und dann xmal nicht, ist gleich $\left(\frac{n}{m}\right)^z \cdot \left(\frac{m-n}{m}\right)^x$. Ist jedoch hierbei die Ordnung gleichgültig, soll es überhaupt nur zmal eintreffen, xmal nicht, so hat man noch alle Permutationen von den z und x Fällen in Rechnung zu bringen, muß also noch mit $\frac{(z+x)!}{z!\,x!} = (z+x)_{(z)}$ multipliciren. Alsdann ist $W =$

$$= (z+x)_{(z)} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^z \cdot \left(\frac{m-n}{m}\right)^x.$$

Aufgabe.

XIII. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, unter acht Würfen mit zwei Würfeln dreimal einen Pasch, fünfmal keinen Pasch zu werfen?

Auflös. Es ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{6}$; $z = 3$; $x = 5$, also:

$$W = 8_{(3)} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{21875}{209952}.$$

Erklärung.

Wird die Aufgabe so gestellt, daß unter $z+x$ Versuchen nicht wie oben der günstige Erfolg zmal, der ungünstige xmal eintrete, sondern daß unter diesen $(x+z)$ Versuchen der günstige wenigstens zmal eintrete, so hat man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, daß er entweder zmal, oder $(z+1)$mal oder $(z+2)$mal u. s. w. (bis $z+x$mal) eintrete, und hat alsdann diese Wahrscheinlichkeiten zu addiren.

Aufgabe.

XIV. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, unter 8 Würfen mit zwei Würfeln wenigstens dreimal einen Pasch zu werfen?

Auflöſ. Die Wahrſcheinlichkeiten, gerade 3mal, oder 4mal, oder 5mal u. ſ. w. (bis 8mal) einen Paſch zu werfen, ſind (nach XIII.):

$$\frac{21875}{209952};\ \frac{21875}{839808};\ \frac{875}{209952};\ \frac{175}{419904};\ \frac{5}{209952};\ \frac{1}{1679616};$$

$$\text{alſo } W = \frac{226491}{1679616},\ \text{ungefähr } \frac{1}{8}.$$

XV. Welche Wahrſcheinlichkeit hat bei zwei gleich ſtarken Spielern ein jeder derſelben, unter 9 Spielen wenigſtens 4 zu gewinnen?

Auflöſ. Die Wahrſcheinlichkeiten, gerade 4, oder 5, oder 6 u. ſ. w. Spiele zu gewinnen, ſind $9_{(4)} \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^5 = 9_{(4)} \cdot (\frac{1}{2})^9$; $9_{(5)} \cdot (\frac{1}{2})^9$; $9_{(6)} \cdot (\frac{1}{2})^9$ u. ſ. w.

$$\text{daher } W = (9_{(4)} + 9_{(5)} + 9_{(6)} + 9_{(7)} + 9_{(8)} + 9_{(9)}) : 2^9 = \frac{382}{512}.$$

Wenn, um einen Einſatz zu gewinnen, entweder A noch 4, oder B noch 6 Spiele gewinnen muß, ſo können noch acht Spiele geſpielt werden, ohne daß eine Entſcheidung erfolgt; es kann nach dem achten Spiele A 3mal, B 5mal gewonnen haben, aber nach dem neunten Spiele iſt das Ganze entſchieden. Die Wahrſcheinlichkeiten, daß unter dieſen neun Spielen A wenigſtens 4mal, B wenigſtens 6mal gewinne, verhalten ſich wie: $\frac{382}{512}$ zu $\frac{130}{512}$. Wird daher das Spiel unterbrochen, und ſoll der Einſatz getheilt werden, ſo muß dies im Verhältniß von 382 : 130 geſchehen.

Anm. Verſchieden von dieſer Wahrſcheinlichkeit, die ſich berechnen läßt, iſt die Wahrſcheinlichkeit, die aus Beobachtungen abgeleitet wird. Hat man z. B. beobachtet, daß beim Niederfallen einer hochgeworfenen Münze jedesmal bei 12 Verſuchen 10mal das Wappen oben liegt, ſo kann man ſchließen, daß irgend eine unbekannte Urſache dies bewirke, und kann erwarten, daß bei den nächſten 12 Verſuchen ſich wieder daſſelbe Reſultat ergeben werde. So hat man daher Wahrſcheinlichkeitstabellen über die durchſchnittliche Lebensdauer, über Verhältniſſe bei Geburten und Todesfällen u. ſ. w. entworfen. Da die Beobachtungen in den aufeinanderfolgenden Jahren meiſtens nicht genau übereinſtimmen, ſo nimmt man als Zahl für die Wahrſcheinlichkeit das arithmetiſche Mittel aus vielen einzelnen Beobachtungen.

Sechstes Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 67. Erklärung.

Ein Kettenbruch oder continuirlicher Bruch entsteht, wenn man den Werth eines ächten Bruches annähernd in kleinern Zahlen anzugeben sucht. So ist z. B. $\frac{5}{47}$ annähernd gleich $\frac{1}{9}$, genau gleich $\frac{1}{9+\frac{2}{5}}$; $\frac{2}{5}$ wiederum ist annähernd gleich $\frac{1}{2}$, genau gleich $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$.

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man $\frac{5}{47}$ ausgedrückt durch den Kettenbruch:

$$\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$ dessen allgemeine Form $$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots}}}$$ ist.

Ein Kettenbruch hat also den Zähler 1 und den Nenner $a+x$; x ist aber wiederum ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner $b+y$ ist; für y gilt wieder dasselbe, wie für x u. s. w.

Die Zahlen a, b, c...., welche positiv und ganz sein müssen, nennt man die Quotienten (den ersten, zweiten, dritten u. s. w.)

Ein Kettenbruch heißt endlich, wenn er mit einem bestimmten Gliede abbricht, unendlich, wenn dies nicht der Fall ist.

§. 68. Aufgabe.

Es soll ein beliebiger ächter Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden.

Auflös. Man dividirt Zähler und Nenner durch den Zähler; der Nenner erhält dadurch die Form eines gemischten Bruches. Mit dem ächten Bruche des Nenners wiederholt man das Verfahren und setzt dies so lange fort, bis man als Nenner nicht einen gemischten Bruch, sondern eine ganze Zahl erhält. So ist z. B.:

$$\frac{17}{39} = \frac{1}{2+\frac{5}{17}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{2}{5}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}.$$

Die Quotienten 2, 3, 2, 2 findet man am schnellsten mit Hülfe des folgenden leicht verständlichen Schema's.

```
17 | 39 | 2
     34
      5 | 17 | 3
          15
           2 | 5 | 2
               4
               1 | 2 | 2
                   2
```

Die Divisoren werden immer kleiner. Jeder ächte Bruch muß also einen endlichen Kettenbruch liefern.

Irrationale Decimalbrüche läßt man mit irgend einer Stelle abbrechen und behandelt sie dann wie ächte Brüche. Je mehr Stellen man nimmt, desto ausgedehnter wird der Kettenbruch; es giebt daher ein Decimalbruch von unendlich vielen Stellen, der nicht einem ächten Bruche gleich ist, einen unendlichen Kettenbruch.

Unächte Brüche verwandelt man in gemischte und läßt die ganze Zahl alsdann unberücksichtigt.

§. 69. Erklärung.

Benutzt man einen Kettenbruch nicht vollständig, sondern läßt denselben mit dem ersten oder zweiten, dritten u. s. w. Quotienten abbrechen, so erhält man den ersten, zweiten, dritten u. s. w. Partialwerth des Kettenbruches. Der letzte Partialwerth ist gleich dem vollständigen Kettenbruche.

§. 70. Aufgabe.

Es sollen die Partialwerthe eines Kettenbruches bestimmt werden, der die Quotienten 3, 4, 2, 3 hat.

Auflöſ. Die Partialwerthe ſind:

$$\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3+\frac{1}{4}};\quad \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}};\quad \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}.$$

Der erſte Partialwerth iſt $\frac{1}{3}$; der zweite $= \frac{4}{13}$; den dritten erhält man, indem man zunächſt $\frac{1}{4+\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$, und dann $\frac{1}{3\frac{2}{9}} = \frac{9}{29}$ ſetzt; den vierten, indem man zunächſt $\frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$ ſetzt, dann $\frac{1}{4\frac{3}{7}} = \frac{7}{31}$, endlich $\frac{1}{3\frac{7}{31}} = \frac{31}{100}$.

§. 71. Zuſatz.

Die eben gegebene Auflöſung bietet zwar keine beſonderen Schwierigkeiten, iſt aber unbequem, weil man jeden Partialwerth einzeln und unabhängig von den übrigen berechnen muß. Eine bequeme Methode ergiebt ſich dagegen durch Beſtimmung der Abhängigkeit der einzelnen Partialwerthe von einander.

Es habe ein Kettenbruch die allgemeine Form:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ldots.}}}}$$

und die einzelnen zu ſuchenden Partialwerthe ſeien $\frac{p_1}{q_1}$; $\frac{p_2}{q_2}$; $\frac{p_3}{q_3}$ u. ſ. w.

Es iſt alsdann $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$; daher $p_1 = 1$; $q_1 = a_1$.

Ferner iſt $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2}{a_1a_2+1} = \frac{a_2}{q_1a_2+1}$; daher $p_2 = a_2$; $q_2 = q_1a_2+1$.

Um den dritten Partialwerth zu erhalten, setzt man $a_2+\frac{1}{a_3}$ statt a_2 in dem zweiten Partialwerthe ein. Dann ist:

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a_2a_3+1}{q_1a_2a_3+q_1+a_3}=\frac{a_2a_3+1}{(q_1a_2+1)a_3+q_1}=\frac{p_2a_3+p_1}{q_2a_3+q_1}.$$

Um den vierten Partialwerth zu erhalten, setzt man $a_3+\frac{1}{a_4}$ statt a_3 in dem dritten Partialwerthe ein und erhält:

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{p_2a_3a_4+p_1a_4+p_2}{q_2a_3a_4+q_1a_4+q_2}=\frac{(p_2a_3+p_1)a_4+p_2}{(q_2a_3+q_1)a_4+q_2}=\frac{p_3a_4+p_2}{q_3a_4+q_2}.$$

Es ergiebt sich also als wahrscheinliche allgemeine Formel:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}\cdot a_n+p_{n-2}}{q_{n-1}\cdot a_n+q_{n-2}}.$$

Hat man gefunden, daß diese richtig ist bis zum $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Partialwerth, und läßt sich beweisen, daß sie alsdann auch für den ν^{ten} Partialwerth richtig sein muß, so ist ihre allgemeine Gültigkeit dadurch bewiesen.

Nun erhält man den ν^{ten} Partialwerth aus dem $(\nu-1)^{\text{ten}}$, also aus

$$\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}=\frac{p_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}+p_{\nu-3}}{q_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}+q_{\nu-3}},$$

wenn man $a_{\nu-1}+\frac{1}{a_\nu}$ statt $a_{\nu-1}$ einsetzt. Alsdann ist:

$$\frac{p_\nu}{q_\nu}=\frac{p_{\nu-2}\cdot\left(a_{\nu-1}+\frac{1}{a_\nu}\right)+p_{\nu-3}}{q_{\nu-2}\cdot\left(a_{\nu-1}+\frac{1}{a_\nu}\right)+q_{\nu-3}}=$$

$$=\frac{p_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}\cdot a_\nu+p_{\nu-3}\cdot a_\nu+p_{\nu-2}}{q_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}\cdot a_\nu+q_{\nu-3}\cdot a_\nu+q_{\nu-2}}=$$

$$=\frac{(p_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}+p_{\nu-3}).a_\nu+p_{\nu-2}}{(q_{\nu-2}\cdot a_{\nu-1}+q_{\nu-3}).a_\nu+q_{\nu-2}}=$$

$$=\frac{p_{\nu-1}\cdot a_\nu+p_{\nu-2}}{q_{\nu-1}\cdot a_\nu+q_{\nu-2}}.$$

Die wahrscheinliche Formel ist daher allgemein gültig.

§. 72. Zusatz.

Sind die Quotienten eines Kettenbruchs die Zahlen 2, 3, 5, 4, 3, so erhält man nach vorigem §. als Partialwerthe:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{2.3+1} = \frac{3}{7}; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{3.5+1}{7.5+2} = \frac{16}{37};$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{16.4+3}{37.4+7} = \frac{67}{155}; \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{67.3+16}{155.3+37} = \frac{217}{502}.$$

Am bequemsten führt sich die Rechnung nach folgendem Schema aus:

	1	0
	0	1
2	1	2
3	3	7
5	16	37
4	67	155
3	217	502.

Die erste Vertikalreihe enthält die Quotienten; der zweiten und dritten Vertikalreihe giebt man zunächst die Ueberschriften 1,0 und 0,1 (vergleiche Schema). Die Zahlen der zweiten Vertikalreihe erhält man in folgender Art: Man multiplicirt den ersten Quotienten 2 mit 0 und addirt die über der 0 stehende 1 hinzu; die erhaltene Summe 1 schreibt man neben 2. Diese 1 multiplicirt man mit dem zweiten Quotienten 3 und addirt die über der 1 stehende 0 hinzu; die Summe 3 schreibt man neben den zweiten Quotienten. Diese 3 multiplicirt man ferner mit dem dritten Quotienten 5 und addirt die über der 3 stehende 1 hinzu; die erhaltene Summe 16 schreibt man neben 5. In dieser Art fährt man fort und erhält $4.16+3=67$; $3.67+16=217$. Die Zahlen der dritten Vertikalreihe werden ebenso berechnet: Man setzt $2.1+0=2$; $3.2+1=7$; $5.7+2=37$ u. s. w. (Vergl. Schema.) Die zweite Vertikalreihe enthält die Zähler, die dritte die Nenner der einzelnen Partialwerthe; letztere sind also: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{16}{37}, \frac{67}{155}, \frac{217}{502}$.

§. 73. Aufgabe.

Es soll die Differenz zweier aufeinander folgenden Partialwerthe berechnet werden.

Auflöſ. Es iſt:

1) $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{q_1 q_2}$. Setzt man $p_1 = 1$; $q_2 = q_1 a_2 + 1$; $p_2 = a_2$ (§. 70), ſo iſt: $p_1 q_2 - q_1 p_2 = q_1 a_2 + 1 - q_1 a_2 = 1$, alſo:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{q_1 \cdot q_2}.$$

2) $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_2 q_3 - q_2 p_3}{q_2 \cdot q_3}$. Setzt man $q_3 = q_2 a_3 + q_1$; $p_3 = p_2 a_3 + p_1$, ſo iſt, wenn man die Multiplication ausführt:

$p_2 q_3 - q_2 p_3 = q_1 p_2 - p_1 q_2 = -1$ (nach 1), alſo:

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = -\frac{1}{q_2 \cdot q_3}.$$

3) $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4}$ findet man in derſelben Art $= \frac{1}{q_3 \cdot q_4}$.

Die wahrſcheinliche allgemeine Formel iſt:

$$\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} - \frac{p_\nu}{q_\nu} = \mp \frac{1}{q_{\nu-1} \cdot q_\nu}.$$

Es ſei nun bewieſen, daß dieſelbe gültig iſt bis zum m^{ten} Partialwerthe; alsdann läßt ſich zeigen, daß ſie auch gültig ſein muß bis zum $(m+1)^{ten}$ Partialwerth, demzufolge allgemein gültig.

Es iſt alſo vorausgeſetzt, daß $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} =$

$$\frac{p_{m-1} q_m - q_{m-1} p_m}{q_{m-1} \cdot q_m} = \mp \frac{1}{q_{m-1} q_m} \text{ iſt.}$$

Nun iſt $\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{p_m \cdot q_{m+1} - q_m \cdot p_{m+1}}{q_m \cdot q_{m+1}}$.

Setzt man nun (nach §. 71) $p_{m+1} = p_m \cdot a_{m+1} + p_{m-1}$; $q_{m+1} = q_m \cdot a_{m+1} + q_{m-1}$, ſo iſt, wenn man die Multiplication ausführt: $p_m \cdot q_{m+1} - q_m \cdot p_{m+1} = q_{m-1} p_m - q_m \cdot p_{m-1} = \mp 1$ (nach der Vorausſetzung) alſo:

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \mp \frac{1}{q_{m-1} q_m}.$$

Da der Satz gültig iſt bis zum vierten Partialwerthe, ſo gilt er alſo auch für die folgenden.

§. 74. Zusatz.

Die Differenzen der einzelnen Partialwerthe sind abwechselnd positiv und negativ. Da die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Partialwerthe positiv war, so ist die Differenz zwischen dem m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Partialwerthe positiv, wenn m ungerade ist, sonst negativ.

Da die Zahlen p und q desto größer werden, je größer ihre Ordnungszahl ist, so muß die Differenz $\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}$ zweier Partialwerthe desto kleiner sein, je größer n ist, je mehr man sich also dem letzten Quotienten nähert. Wenn nun die Differenzen der Partialwerthe desto kleiner werden, je mehr man sich dem letzten Partialwerth (dem wahren Werthe des Bruches) nähert, so müssen sich also die Partialwerthe dem wahren Werthe des Bruches desto mehr nähern, je größer ihre Ordnungszahl ist. Da ferner die Differenzen der aufeinanderfolgenden Partialwerthe abwechselnd positiv und negativ sind, und dabei immer kleiner werden, so folgt, daß die Partialwerthe abwechselnd größer und kleiner als der wirkliche Werth des Bruches sein müssen.

§. 75. Zusatz.

Zwischen zwei Partialwerthen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ kann nicht noch ein Werth $\frac{m}{n}$ liegen, der dem wahren Werthe näher käme, als jene beiden, wenn m zwischen p und p', m zwischen q und q' liegen soll, und alle diese Buchstaben ganze Zahlen bedeuten.

Beweis. Es ist $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{p.q' - p'.q}{q.q'}$.

Da $\frac{p}{q}$ nicht gleich $\frac{m}{n}$ ist, so kann $p.n - m.q$ nie gleich Null, muß daher mindestens $= \mp 1$ sein.

Der Unterschied zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{m}{n}$ ist also mindestens $= \mp \frac{1}{q.n}$.

Dieser Unterschied ist aber, da n kleiner ist als q', größer als der Unterschied $\mp \frac{1}{q.q'}$ zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$, und es ist also $\frac{m}{n}$ vom wahren Werthe des Bruches weiter entfernt, als $\frac{p'}{q'}$, da der wahre Werth zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ liegt.

Ebenso ist zu beweisen, daß auch $\frac{p}{q}$ dem wahren Werthe näher kommt, als $\frac{m}{n}$.

Anm. Die Partialwerthe in ihrer Aufeinanderfolge nähern sich also dem wahren Werthe mehr, als irgend ein anderer Näherungswerth. Außerdem ergiebt sich, daß ein Partialwerth sich nicht kann kürzen lassen, da man sonst einen Bruch mit kleinen Zahlen erhielte, der zwischen zwei Partialwerthe fallen und den Werth des Bruches genauer angeben müßte, als der erste derselben.

§. 76. Aufgaben.

I. Es sollen die Näherungswerthe des ächten Bruches $\frac{349}{1794}$ angegeben werden.

Auflös. Verwandelt man den Bruch in einen Kettenbruch, so erhält man die Quotienten 5, 7, 8, 6. Die Näherungswerthe sind also:

$$\frac{1}{5};\ \frac{7}{36};\ \frac{57}{293};\ \frac{349}{1794}.$$

II. Es sollen die Näherungswerthe der Irrationalzahl $\pi = 3{,}14159\ldots\ldots$ angegeben werden.

Auflös. Bricht man mit der fünften Decimalstelle ab, so erhält man den ächten Bruch $\frac{14159}{100000}$. Verwandelt man diesen in einen Kettenbruch, so erhält man die Quotienten 7, 15, 1 u. s. w. Aus diesen erhält man die Partialwerthe $\frac{1}{7}, \frac{15}{106}, \frac{16}{113}$ u. s. w., also $\pi = \frac{22}{7}; \frac{333}{106}; \frac{355}{113}$ u. s. w.

Anm. Die Zahl $\frac{22}{7}$ ist von Archimedes, die Zahl $\frac{355}{113}$ von Metius gefunden. Letztere ist schon sehr genau, denn sie weicht von dem wahren Werthe um weniger ab als um $\frac{1}{133.33102}$, welches der Unterschied zwischen dem dritten und vierten Partialwerth ist.

III. Die Länge des Jahres beträgt $365\frac{109}{450}$ Tage. Es sollen die Näherungswerthe des Bruches bestimmt werden.

Auflös. Man findet $\frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{31}{128}; \frac{39}{161}; \frac{109}{450}$.

Anm. Die Zahl $\frac{8}{33}$ liegt der Zeitrechnung der alten Perser zu Grunde. Der Gregorianische Kalender hat die Zahl $\frac{97}{400}$, die also weniger richtig ist, als $\frac{39}{161}$ und $\frac{109}{450}$.

IV. Der synodische Monat beträgt 29,530588... Tage, das tropische Jahr hingegen 365,242222... Tage. Es sollen die Näherungswerthe für das Verhältniß gesucht werden.

Auflös. Man findet $\frac{1}{12}; \frac{2}{25}; \frac{3}{37}; \frac{8}{99}; \frac{11}{136}; \frac{19}{235}; \frac{334}{4131}\ldots$.

Anm. Der Bruch $\frac{19}{235}$ giebt den Mondscyclus in der Chronologie, in welchem 235 synodische Monate 19 Jahren gleich gesetzt werden (Meton; güldene Zahl). Er ist jedoch etwas zu klein.

§. 77. Aufgaben.

I. Es sollen die Näherungswerthe berechnet werden von $\sqrt{15}$.

Auflös. Die Wurzel liegt zwischen 3 und 4. Man setzt daher:

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x}.$$ Hieraus folgt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}.$$

Da nun $\sqrt{15}+3$ zwischen 6 und 7 liegt, so muß man bei der Division mit 6 mindestens 1 Ganzes erhalten. Man setzt daher:

$$x = \frac{\sqrt{15}+3}{6} = 1+\frac{\sqrt{15}-3}{6} = 1+\frac{1}{x_1}.$$ Hieraus folgt:

$$x_1 = \frac{6}{\sqrt{15}-3} = \frac{6.(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} = \sqrt{15}+3 = 6 + (\sqrt{15}-3) =$$

$$= 6 + \frac{1}{x}.$$

Für x setzt man nun den schon früher gefundenen Werth wieder ein. Dann ist also:

$$\sqrt{15} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+..}}}}$$

Die Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}; \frac{4}{1}; \frac{27}{7}; \frac{31}{8}; \frac{213}{55}$ u. s. w.

Der erhaltene Kettenbruch ist unendlich, jedoch kehren die Quotienten in regelmäßiger Reihenfolge wieder, und der Bruch ist daher periodisch. Bei der Berechnung einer Quadratwurzel mit Hülfe der Kettenbrüche erhält man stets periodische Kettenbrüche.

II. Es sollen die Näherungswerthe berechnet werden von $\sqrt{19}$.

Auflös. Es ist $\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x}$;

$$x = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4^*)}{3} = 2+\frac{\sqrt{19}-2}{3} = 2+\frac{1}{x_1};$$

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{3.(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = 1+\frac{\sqrt{19}-3}{5} = 1+\frac{1}{x_2};$$

*) Man sieht wiederum nach, wie viel Ganze in diesem Quotienten enthalten sein müssen, und trennt dieselben von dem Quotienten.

$$x_2 = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3+\frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3+\frac{1}{x_3};$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1+\frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1+\frac{1}{x_4};$$

$$x_4 = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2+\frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2+\frac{1}{x_5};$$

$$x_5 = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \sqrt{19}+4 = 8+\sqrt{19}-4 = 8+\frac{1}{x}.$$

Der Kettenbruch hat also als Quotienten die Periode 2, 1, 3, 1, 2, 8. Die Näherungswerthe sind: $4; 4\frac{1}{2}; 4\frac{1}{3}; 4\frac{4}{11}; 4\frac{5}{14}; 4\frac{14}{39}; 4\frac{17}{48}$ u. s. w.

§. 78. Aufgabe.

Es soll der Werth eines periodischen Kettenbruches als Quadratwurzel dargestellt werden.

Auflös. Der Bruch bestehe aus der ganzen Zahl 3 und habe als Quotienten die Periode 1, 6, 1, 6 u. s. w., so ist sein Werth gleich $3+x$.

Es ist nun $x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x}}$ *)

Aus $x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x}}$ folgt aber:

$x = \frac{6+x}{7+x}$, daher $x^2+7x=6+x$ oder

$x = -3+\sqrt{15}$.

Es ist also der gesuchte Werth $3+x = \sqrt{15}$.

Anm. Eine weitere Anwendung der Kettenbrüche findet sich in dem folgenden Kapitel.

---

*) Da die Periode wiederkehrt, so läßt sie sich durch x bezeichnen.

Aufgaben.

I. Es sollen folgende Brüche in Kettenbrüche verwandelt und die Quotienten angegeben werden:

1) $\frac{14}{17}$; 2) $\frac{13}{19}$; 3) $\frac{17}{39}$; 4) $\frac{19}{89}$; 5) $\frac{23}{147}$; 6) $\frac{155}{366}$; 7) $\frac{249}{1705}$;
8) $\frac{657}{2005}$; 9) $\frac{839}{1744}$; 10) $\frac{2056}{7933}$.

II. Es sollen die Näherungswerthe folgender Brüche angegeben werden:

11) $\frac{351}{965}$; 12) $\frac{1947}{3359}$; 13) $\frac{587}{1943}$; 14) $\frac{7147}{13597}$; 15) $\frac{907}{18564}$;

16) 0,591; 17) 0,2237; 18) 0,3295....; 19) 0,232323....;
20) 0,15801580.....

III. Es sollen die Näherungswerthe folgender Wurzeln angegeben werden:

21) $\sqrt{3}$; 22) $\sqrt{2}$; 23) $\sqrt{21}$; 24) $\sqrt{68}$; 25) $\sqrt{130}$.

VI. Es sollen aus folgenden periodischen Quotienten die Werthe der zugehörigen unendlichen Kettenbrüche berechnet werden:

26) 4, 4,....; 27) 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4....; 28) 6, 6,....;
29) 1, 3, 5, 1, 3, 5....; 30) 2, 3, 6, 2, 3, 6....

Auflösungen.

1) 1, 4, 1, 2; 2) 1, 2, 6; 3) 2, 3, 2, 2; 4) 4, 1, 2, 6; 5) 6, 2, 1, 1, 4; 6) 2, 2, 1, 3, 3, 4; 7) 6, 1, 5, 1, 1, 4, 4; 8) 3, 19, 3, 11; 9) 2, 12, 1, 2, 2, 9; 10) 3, 1, 6, 15, 3, 6; 11) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}$; 12) $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{40}{69}, \frac{91}{157}, \frac{131}{226}, \frac{222}{383}, \frac{575}{992}$; 13) $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{13}{43}, \frac{29}{96}, \frac{100}{331}, \frac{129}{427}, \frac{229}{758}$; 14) $\frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{31}{59}, \frac{41}{78}, \frac{646}{1229}$; 15) $\frac{1}{20}, \frac{2}{41}, \frac{15}{307}, \frac{77}{1576}, \frac{169}{3459}, \frac{246}{5035}$; 16) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{13}{22}, \frac{289}{485}$; 17) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{15}{67}, \frac{17}{76}, \frac{185}{827}, \frac{217}{970}$; 18) $\frac{1}{3}, \frac{28}{85}, \frac{29}{88}, \frac{57}{173}, \frac{86}{261}, \frac{659}{2000}$; 19) $\frac{1}{4}, \frac{3}{13}, \frac{10}{43}, \frac{23}{99}$; 20) $\frac{1}{6}, \frac{3}{19}, \frac{67}{424}, \frac{70}{443}, \frac{137}{867}, \frac{481}{3044}, \frac{1580}{9999}$;
21) $1, 2, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{8}{11}, 1\frac{11}{15}, 1\frac{30}{41}$ u. s. w.; 22) $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{5}, 1\frac{5}{12}, 1\frac{12}{29}, 1\frac{29}{70}$ u. s. w; 23) $4, 5, 4\frac{1}{2}, 4\frac{3}{5}, 4\frac{4}{7}, 4\frac{7}{12}, 4\frac{60}{103}, 4\frac{67}{115}$ u. s. w.; 24) $8, 8\frac{1}{4}, 8\frac{16}{65}, 8\frac{65}{264}$ u. s. w.; 25) $11, 11\frac{1}{2}, 11\frac{2}{5}, 11\frac{45}{112}, 11\frac{92}{229}, 11\frac{229}{570}$ u. s. w.;

26) $-2+\sqrt{5}$; 27) $-2+\sqrt{7}$; 28) $-3+\sqrt{10}$;

29) $\frac{1}{4}\left\{-9+\sqrt{145}\right\}$; 30) $\frac{1}{14}\left\{-41+\sqrt{2213}\right\}$.

Siebentes Capitel.

Von den unbestimmten oder diophantischen Aufgaben.

§. 79. Erklärung.

Sind zur Bestimmung von n Unbekannten weniger als n Gleichungen gegeben, so muß die letzte Eliminationsgleichung mindestens noch 2 Unbekannte enthalten und liefert also kein bestimmtes Resultat. Um ein solches zu erhalten, muß man den überzähligen Unbekannten bestimmte Werthe beilegen und dann aus diesen und den gegebenen Gleichungen die Werthe der andern Unbekannten bestimmen. Aufgaben dieser Art nennt man unbestimmte oder diophantische. Die Anzahl der Lösungen ist bei denselben im Allgemeinen unendlich groß, kann aber durch Nebenbedingungen beschränkt werden, z. B. dadurch, daß nur die den Gleichungen genügenden ganzen Zahlen gesucht werden sollen.

A. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. 80. Aufgaben.

I. Es soll die Gleichung $ax+by=c$ nach x und y gelöst werden.

Auflös. Es ist $x=(c-by):a$. Zu jedem Werthe, den man y giebt, findet man aus dieser Gleichung den zugehörigen Werth von x. Setzt man $y=d$, so ist $x=(c-bd):a$. Sollen aber die zu x und y gesuchten Werthe ganze Zahlen sein, so muß der Werth von y so gewählt werden, daß $(c-by)$ durch a theilbar wird. Noch mehr wird die Anzahl der möglichen Lösungen eingeschränkt, wenn auch noch die Bedingung hinzugefügt wird, daß die Werthe von x und y positive Zahlen sein müssen.

Ist z. B. gegeben:

$$5x+17y=18, \text{ so ist:}$$

$$1)\quad x=\frac{18-17y}{5}=3-3y+\frac{3-2y}{5}.$$

Bei dieser Gleichung ist die Division so weit als möglich ausgeführt worden, und es ist nur noch die Bedingung zu erfüllen, daß $3-2y$ durch 5 theilbar sein soll. Man setzt deshalb:

$$(3-2y):5=z \text{ oder}$$

$$2)\quad y=\frac{1}{2}(3-5z)=1-2z+\frac{1}{2}(1-z).$$

Es ist wiederum die Division so weit als möglich ausgeführt worden. Damit $(1-z):2$ einer ganzen Zahl gleich werde, setzt man:

$$(1-z):2=v \text{ oder}$$

$$3)\quad z=1-2v.$$

Jetzt sind alle Nenner verschwunden. Setzt man den für z gefundenen Werth in 2) ein, so ist:

$$y = 5v-1, \text{ und also nach } 1)$$

$$x = 7-17v.$$

Setzt man $v =$	0;	1;	2;	3;	.....
so ist $x =$	7;	−10;	−27;	−43;	.....
$y =$	−1;	4;	9;	14;	.....

Je zwei übereinanderstehende Werthe von x und y genügen der Gleichung.

II. Es sollen die positiven ganzen Zahlen gesucht werden, die durch 7 dividirt den Rest 4, durch 8 dividirt den Rest 5 geben.

Auflös. Bezeichnet man die gesuchte Zahl durch M, so ist:

1) $M = 7x$*)$+4$;

2) $M = 8y+5$;

daher $7x+4 = 8y+5$

$$\text{und } x = \frac{8y+1}{7} = y + \frac{y+1}{7} = y+v.$$

$$\text{Aus } \frac{y+1}{7} = v \text{ folgt}$$

$$y = 7v-1;\ x = 8v-1,$$

$$\text{daher } M = (8y+5) = (7x+4) = 56v-3.$$

Da nur positive Werthe gesucht werden sollen, so muß v mindestens 1 sein. Die Werthe von M sind alsdann: 53; 109; 165 u. s. w.

III. Es soll die Gleichung $4x+6y=15$ nach x und y gelöst werden.

Auflös. Es ist $x = \frac{15-6y}{4}$. Eine Auflösung in ganzen Zahlen ist nicht möglich, weil 15 nicht theilbar ist durch 2, während dies der Fall ist mit 6 und 4. — Eine Auflösung in ganzen Zahlen ist also nur möglich, wenn alle Zahlen der Gleichung entweder Primzahlen sind, oder alle denselben gemeinschaftlichen Faktor haben.

§. 81. Erklärung.

Wenn der Gleichung

$$ax=by+c$$

*) x und y bedeuten jede positive ganze Zahl.

die Werthe genügen:

$$x = m;\ y = n, \text{ so daß also}$$

$$1) \qquad am = bn + c \text{ ist,}$$

so müssen auch die Werthe genügen

$$x = bv + m;\ y = av + n,$$

wo v eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Denn setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$abv + am = abv + bn + c \text{ oder}$$

$$am = bn + c,$$

welches nach 1) eine richtige Gleichung ist.

§. 82. Zusatz.

Eine Lösung erhält man bei Aufgaben wie I. und II. des §. 80 leicht mit Hülfe der Kettenbrüche. Ist die Gleichung gegeben

$$ax = by + 1,$$

die so geordnet ist, daß die links stehende Unbekannte den größern Coefficienten hat, und daß die Vorzeichen zu x und y gesetzt werden, während man a und b positiv nimmt, so verwandele man $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch und suche die Partialwerthe. Der letzte ist $\frac{b}{a}$, der vorletzte sei $\frac{b'}{a'}$. Alsdann ist $\mp (b'a - ba') = +1$ (nach §. 73). Das positive Vorzeichen wird genommen, wenn $\frac{b'}{a'}$ der 1ste, 3te, 5te u. s. w. Partialwerth ist. Setzt man diesen Werth von $+1$ in obige Gleichung, so ist

$$ax = by \mp (b'a - ba') \text{ oder}$$

$$a(x \pm b') = b(y \pm a').$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe

$$x = \mp b';\ y = \mp a'.$$

Der vorletzte Partialwerth $\frac{b'}{a'}$ des Kettenbruches $\frac{b}{a}$ liefert also eine Lösung. Ist derselbe der 1ste, 3te, 5te ... Partialwerth, so ist

$$x = +b';\ y = +a'.$$

Hat x oder y negatives Vorzeichen, so ändert natürlich der gefundene Werth das seinige.

War die Gleichung gegeben:

$$ax = by + c$$

so ist $ax = by \mp c(b'a - ba')$

demnach $x = \mp b'c$; $y = \mp a'c$.

Für die Bestimmung der Vorzeichen gilt das eben Gesagte.

Ist z. B. $17x = 5y + 3$,

so findet man als Näherungswerthe von $\frac{5}{17}$ die Werthe $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{17}$.

Daher ist $x = -2.3 = -6$; $y = -7.3 = -21$.

Die übrigen Lösungen findet man mit Hülfe des §. 81.

In diesem vorliegenden Beispiele erhielte man:

$$x = -6 + 5v; \quad y = -21 + 17v.$$

§. 83. Aufgabe.

IV. Es soll die Zahl 6743 in zwei Theile der Art zerlegt werden, daß der erste den Rest 8 giebt, wenn er durch 14, der zweite den Rest 3, wenn er durch 11 dividirt wird.

Auflös. Es ist $14x + 8 + 11y + 3 = 6743$

oder $14x = -11y + 6732$.

Die Näherungswerthe von $\frac{11}{14}$ sind $\frac{1}{1}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{11}{14}$.

Folglich ist $x = -11v + 4.6732 = -11v + 26928$;

$y = 14v - 5.6732 = 14v - 33660$.

Damit y positiv werde, muß v so groß genommen werden, daß -33660 verschwindet. Man setzt daher sogleich $v = w + 2404$, weil 14.2404 um Weniges kleiner ist als 33660. Dann ist:

$$x = -11w + 484; \quad y = 14w - 4.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe:

$x = 473; 462; 451 \ldots\ldots 11;$

$y = 10; 24; 38 \ldots\ldots 598;$

und als Lösung die Gleichung:

$6743 = (6630 + 113) = (6476 + 267)$ u. s. w.

§. 84. Aufgabe.

V. Es soll die Gleichung

$$ax + bx + cz = m$$

nach x, y, z aufgelöst werden.

Auflös. Soll die Lösung in ganzen Zahlen stattfinden, so dürfen a, b, c nicht einen gemeinschaftlichen Faktor haben, den nicht auch m hätte. Ist

dieser Bedingung genügt, so setzt man für z nach und nach alle ganzen Zahlen ein und bestimmt dann x und y auf die in den vorigen §§. angegebene Art. Haben a und b einen gemeinschaftlichen Faktor, so muß z so gewählt werden, daß auch m—cz diesen Faktor habe. Die Gränzen der Lösungen sind leicht anzugeben, wenn nur positive ganze Zahlen als Werthe der Unbekannten gesucht werden. Ist der eine der drei Coefficienten a, b, c negativ, so hat man unendlich viele Lösungen; sind aber alle drei Coefficienten positiv, so muß, wenn zwei der Unbekannten gleich Null sein können,

$$x \leqq \frac{m}{a}; \quad y \leqq \frac{m}{b}; \quad z \leqq \frac{m}{c},$$

und wenn die Unbekannten mindestens gleich 1 sein sollen, so muß

$$x \leqq \frac{m-b-c}{a}; \quad y \leqq \frac{m-a-c}{b}; \quad z \leqq \frac{m-a-b}{c} \text{ gewählt werden.}$$

Ist z. B. $2x+3y+z=100$,

so setze man $z=1$.

Alsdann ist $2x+3y=99$,

demnach $x=3+3w$; $y=31-2w$.

Als Lösungen erhält man:

z =	1;	1;	1;	..... 1.
x =	3;	6;	9;	.....45.
y =	31;	29;	27;	..... 3.

Nun setze man $z=2$.

Alsdann ist $2x+3y=98$,

demnach $x=1+3w$; $y=32-2w$.

Als Lösungen erhält man:

z =	2;	2;	2;	2;	..... 2.
x =	1;	4;	7;	10;	.....46.
y =	32;	30;	28;	26;	..... 2.

Setzt man für z die weitern Zahlen, so erhält man nach und nach sämmtliche Lösungen.

§. 85. Aufgaben.

VI. Es sollen die Gleichungen:

$$\begin{cases} 1)\ ax+by+cz=m \\ 2)\ a_1x+b_1y+c_1z=m_1 \end{cases}$$

nach x, y, z aufgelöst werden.

Auflös. Man erhält:

$$z = \left(\frac{m-ax-by}{c}\right) \text{ (aus 1)},$$

$$z = \left(\frac{m_1-a_1x-b_1y}{c_1}\right) \text{ (aus 2)}.$$

Folglich ist $mc_1 - ac_1x - bc_1y = m_1c - a_1cx - b_1cy$

oder $(a_1c - ac_1)x = (bc_1 - b_1c)y + (m_1c - mc_1)$,

welche Gleichung nach der früher angegebenen Art (§. 80 u. 82) zu lösen ist.

VII. Es sollen die Gleichungen:

$$\begin{cases} 1)\ 4x - 6y + 3z = 18 \\ 2)\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

nach x, y, z aufgelöst werden.

Auflös. Aus 1) folgt $z = \frac{18 - 4x + 6y}{3}$; aus 2) folgt $z = \frac{6 - 2x + 5y}{2}$.

Daher ist $36 - 8x + 12y = 18 - 6x + 15y$

oder $3y = -2x + 18$.

Aus dieser Gleichung findet man:

$$y = 2v;\quad x = -3v + 9;$$

und nach 1) $z = -6 + 8v$.

VIII. Es sollen die Zahlen gesucht werden, die durch 5 dividirt den Rest 2, durch 6 dividirt den Rest 3, durch 7 dividirt den Rest 5 geben.

Auflös. Es ist 1) $5x + 2 = 6y + 3$;

2) $7z + 5 = 6y + 3$.

Aus 1) erhält man $-6y = -5x + 1$,

und hieraus nach §§. 81 u. 82 3) $\begin{cases} y = 5v - 1 \\ x = 6v - 1. \end{cases}$

Setzt man den für y gefundenen Werth in 2) ein, so ist:

$$30v - 3 = 7z + 5 \text{ oder}$$

$$30v = 7z + 8.$$

Diese Gleichung giebt für v und z die Werthe:

$$v = 7w - 3;\ z = 30w - 14.$$

Setzt man den für v gefundenen Werth in 3) ein, so ist schließlich:

$$x = 42w - 19;$$

$$y = 35w - 16;$$

$$z = 30w - 14.$$

Die gesuchten Zahlen sind also $= 5x + 2 = 210w - 93$;

z. B. 117; $117 + 210$; $117 + 2.210$; u. s. w.

B. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. 86. Aufgaben.

IX. Es soll die Gleichung $xy + x + y = a$ aufgelöst werden.

Auflöſ. Es iſt $xy+y=a-x$

$y(x+1)=a-x$

$$y=\frac{a-x}{x+1}=-1+\frac{a+1}{x+1}.$$

Soll die Löſung in ganzen Zahlen ſtattfinden, ſo iſt x ſo zu wählen, daß (x+1) ein Faktor von (a+1) wird. Iſt z. B. a=12, ſo iſt a+1=13. Die Faktoren von 13 ſind 1 und 13; deshalb kann x=0 oder =12 ſein, woraus ſich ergiebt y=12 oder =0.

X. Es ſoll die Gleichung $xy+ax+by=c$ aufgelöſt werden.

Auflöſ. Es ergiebt ſich $y=\frac{c-ax}{x+b}=-a+\frac{c+ab}{x+b}$.

x iſt ſo zu wählen, daß x+b ein Faktor von c+ab wird.

XI. Es ſoll die Gleichung $x^2+xy+ax+by=c$ aufgelöſt werden.

Auflöſ. Es ergiebt ſich $y=\frac{c-x^2-ax}{b+x}=-x+b-a+\frac{ab-b^2+c}{x+b}$.

x iſt ſo zu wählen, daß x+b ein Faktor von $(ab-b^2+c)$ wird.*)

XII. Es ſoll die Gleichung $x^2+ax+c=y^2$ aufgelöſt werden.

Auflöſ. Setzt man $y=x+b$, ſo iſt

$$x^2+ax+c=x^2+2bx+b^2$$
$$x(a-2b)=b^2-c$$
$$x=\frac{b^2-c}{a-2b};$$
$$\text{daher } y=\frac{ab-b^2-c}{a-2b}.$$

XIII. Es ſoll die Gleichung $ax^2+bx+c^2=y^2$ gelöſt werden.

Auflöſ. Setzt man $y=dx+c$, ſo iſt

$$ax^2+bx+c^2=d^2x^2+2cdx+c^2$$
$$ax^2+bx=d^2x^2+2cdx$$
$$ax+b=d^2x+2cd$$
$$x=\frac{2cd-b}{a-d^2};$$
$$\text{daher } y=\frac{cd^2-bd+ac}{a-d^2}.$$

---

*) In den Aufgaben (9—11) dividirt man bei dem für y gefundenen Quotienten ſo lange mit dem Nenner in den Zähler, bis letzterer kein x mehr enthält.

XIV. Es soll die Gleichung $x^2+a=y^2$ aufgelöst werden.

Auflös. Setzt man $y = x+p$, so ist

$$x^2+a = x^2+2px+p^2,$$

$$\text{also } x = \frac{a-p^2}{2p}$$

$$\text{und } y = \frac{a+p^2}{2p}.$$

Anm. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung, und setzt man $a=q^2$, so ist $(q^2-p^2)^2+(2pq)^2=(q^2+p^2)^2$.

Diese Gleichung ist die Auflösung für die Aufgaben

$$x^2+y^2=z^2 \text{ und}$$

$$x^2-y^2=v^2,$$

welche zur Bestimmung der pythagoräischen Dreiecke gebraucht werden.

XV. Es soll die Gleichung $ax^2+bx+c=y^2$ aufgelöst werden.

Auflös. Setzt man $ax^2+bx+c=(mx+n)(vx+w)$ *) und

$$y^2=(mx+n)^2.r^2, \text{ so ist}$$

$$vx+w=(mx+n).r^2$$

$$x=\frac{nr^2-w}{v-mr^2},$$

$$\text{also } y=\left(\frac{vn-mw}{v-mr^2}\right).r$$

Ist z. B. $6x^2+17x+12=y^2$, so setzt man

$$6x^2+17x+12=(2x+3)(3x+4),$$

$$y=(2x+3)r. \text{ Alsdann ist}$$

$$x=\frac{3r^2-4}{3-2r^2}.$$

Für $r=1$ ist $x=-1$; für $r=2$ ist $x=-\frac{8}{5}$ u. s. w.

Anm. 1. Die Zerlegung von $6x^2+17x+12$ ist einfach. Da nämlich der Ausdruck $x^2+\frac{17}{6}x+2=0$ ist, wenn $x=-\frac{3}{2}$ oder $x=-\frac{4}{3}$ gesetzt wird, so ist $x^2+\frac{17}{6}x+2=(x+\frac{3}{2})(x+\frac{4}{3})$; daher $6x^2+17x+12=(2x+3)(3x+4)$.

Anm. 2. Eine Lösung der vollständigen quadratischen Gleichung

$$ax^2+bx+cy+dy^2+exy+f=0$$

läßt sich nicht geben; die gegebenen Beispiele enthalten aber alle auf elementarem Wege zu lösenden Aufgaben.

---

*) Ist diese Zerlegung nicht möglich, so ist auch die angegebene Auflösung nicht möglich, und nur in wenigen Fällen läßt sich alsdann in anderer sehr schwieriger Art eine Lösung finden.

Aufgaben.

Es sollen folgende Gleichungen gelöst werden:

1) $3x+4y=11$;

2) $2x-3y=-5$;

3) $4y-3x=11$;

4) $3x-2y=-5$;

5) $1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y=1$;

6) $2x-16\frac{3}{4}=-1\frac{3}{4}y$;

7) $5x-12y+8z=17$;

8) $2x+3y+4z=20$;

9) $\begin{cases} x=3y+1; \\ x=5z+2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{5}x=4\frac{4}{5}y+3; \\ \frac{1}{4}x=2\frac{3}{4}z+1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 17x+11y+3z=880; \\ x+y+z=100; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 8x-y-5z=19; \\ 7x+y-4z=23; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x+y+z=20; \\ 10x-y-5z=24; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x-2y+2z=3; \\ 7x-4y+3z=14; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}; \\ 4z=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}; \\ 5v=\frac{1}{3}x-3\frac{1}{3}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3w-2x=36; \\ 2w-3y=24; \\ 7y-4z=20; \end{cases}$

17) $3x^2=8y$;

18) $x^2+5y=64$;

19) $2x^2+7y=72$;

20) $2x^2+5y=500$;

21) Welche Zahlen geben die Reste 1 oder 2, je nachdem man sie durch 3 oder durch 5 dividirt?

22) Welche Zahlen geben die Reste 2, 3, 9, je nachdem man sie durch 3, 7, 10 dividirt?

23) Welche Zahlen geben die Reste 3, 1, 0, 5, je nachdem man sie durch 5, 6, 7, 8 dividirt?

24) Es soll die Zahl 1793 in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine bei der Division durch 11 den Rest 3, der andere bei der Division durch 37 den Rest 19 giebt. Welche Theile sind es?

25) Es soll die Zahl 1840 in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine bei der Division durch 12 den Rest 1, der andere bei der Division durch 54 den Rest 45 giebt. Welche Theile sind es?

26) Es soll die Zahl 124 in drei Theile von solcher Beschaffenheit zerlegt werden, daß, wenn man den ersten mit $4\frac{1}{2}$, den zweiten mit $3\frac{1}{5}$, den dritten mit $1\frac{1}{4}$ multiplicirt und die drei Produkte addirt, 400 herauskommt. Welche Theile sind es?

27) Es soll die Zahl 76 in 4 Theile von solcher Beschaffenheit zerlegt werden, daß, wenn man den ersten mit 20, den zweiten mit $10\frac{1}{2}$, den dritten mit 7, den vierten mit 4 multiplicirt und die Produkte addirt, 707 herauskommt. Welche Theile sind es?

28) 100 Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehrten zusammen 29 Thlr. 10 Sgr., und zwar ein Mann 17, eine Frau 11, ein Kind 3 Sgr. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es?

29) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz und Produkt zusammen genommen 97 betragen. Welche Zahlen sind es?

30) Von welchen zwei Zahlen betragen Quotient und Summe zusammengenommen 37?

31) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{230}{77}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 7 und 11 sind?

32) Es soll die Summe von drei Zahlen, wie auch die Summe von je zweien derselben ein Quadrat geben. Welche Zahlen sind es?

33) Wenn man zu 36 das Siebenfache einer gewissen Zahl hinzu addirt, erhält man eine Quadratzahl. Welche Zahl ist es?

Auflösungen.

1) $x=1+4m$; $y=2-3m$; 2) $x=3m-1$; $y=2m+1$; 3) $x=4m-1$; $y=3m+2$; 4) $x=2m-1$; $y=3m+1$; 5) $x=5m+4$; $y=3m+2$; 6) $x=7m+4$; $y=5-8m$; 7) $x=12m-4z+1$; $y=5m-z-1$; 8) $x=2, 5, 3, 1$; $y=4, 2, 2, 2$; $z=1, 1, 2, 3$; 9) $x=7+15m$; $y=2+5m$; $z=1+3m$; 10) $x=37+88m$; $y=1+11m$; $z=3+8m$; 11) $x=2+4m$; $y=69-7m$; $z=29+3m$; 12) $x=1+3m$; $y=3-m$; $z=2+5m$; 13) $x=5+m$; $y=6-5m$; $z=4+3m$; 14) $x=2m+3$; $y=5m-2$; $z=2m-5$; 15) $x=25+60m$; $y=4+10m$; $z=2+5m$; $v=1+4m$; 16) $x=9+9m$; $y=4+4m$; $z=2+7m$; $w=18+6m$; 17) $x=4, 8, 12$ u. s. w.; $y=6, 24, 54$ u. s. w.;

18) $x=2, 3, 7$ u. s. w.; $y=12, 11, 3$ u. s. w.; 19) $x=1$; $y=10$; 20) $x=5, 10, 15$; $y=90, 60, 10$; 21) 7, 22 u. s. w., überhaupt $7+15n$; 22) 59, 269 u. s. w., überhaupt $59+210n$; 23) 133, 973 u. s. w., überhaupt $133+840n$; 24) 146, 1647; 553, 1240; 960, 833; 1367, 426; 1774, 19; 25) 13 und 1827; 661 und 1179; 1309 und 531; 26) 17, 99, 8; 40, 60, 24; 63, 21, 40; 27) 24, 2, 2, 48; 23, 4, 3, 46; 22, 6, 4, 44 u. s. w.; 28) 38, 6, 56; 34, 13, 53; 30, 20, 50 u. s. w.; 29) 13, 7; 17, 5; 25, 3; 33, 2; 49, 1; 30) 18, 18; 18, 1; 31) $\frac{5}{7}$, $\frac{25}{11}$; $\frac{12}{7}$, $\frac{14}{11}$; $\frac{19}{7}$, $\frac{3}{11}$; 32) 41, 80, 320; 22, 42, $68\frac{1}{4}$ u. s. w.; 33) 15, 23, 48 u. s. w.

Achtes Capitel.

Von den unendlichen Reihen.

A. Von den Funktionen und von der Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 87. Erklärung.

Ein Ausdruck, in dem die Größe x vorkommt, dessen Werth sich also ändert, sobald sich der Werth von x ändert, heißt eine Funktion von x. Dieselbe heißt rational, sobald sie nur ganze Potenzen von x, hingegen irrational, wenn sie auch gebrochene Potenzen von x enthält. Sie heißt ganz, wenn sie entweder keine Nenner hat oder nur solche, die von x unabhängig sind; sie heißt gebrochen, wenn x im Nenner vorkommt. Die allgemeine Form einer ganzen Funktion ist:

$$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots+a_nx^n.$$

In dieser Reihe sind die einzelnen Coefficienten a, a_1, a_2 u. s. w. unabhängig von x; sie sind beliebige Ausdrücke und können auch gleich Null sein. Ordnet man die Reihe so, daß sie mit der niedrigsten Potenz von x beginnt, so heißt sie steigend, im entgegengesetzten Falle ($a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a$) heißt sie fallend. Eine Funktion ist vom n^{ten} Grade, wenn die höchste in ihr vorkommende Potenz von x den Exponenten n hat.

§. 88. Lehrsätze.

1) Die Summe oder die Differenz zweier ganzen, rationalen Funktionen von x ist eine ganze Funktion höchstens vom m^{ten} Grade, wenn m der höchste Exponent von x ist, der in beiden Funktionen vorkommt.
2) Das Produkt zweier ganzen Funktionen, von welchen die eine vom m^{ten}, die andere vom n^{ten} Grade ist, ist eine ganze Funktion vom $(m+n)^{ten}$ Grade.
3) Der Quotient zweier Funktionen, von welchen der Dividend vom m^{ten}, der Divisor vom n^{ten} Grade ist, und wobei $m > n$ ist, kann eine ganze Funktion vom $m-n^{ten}$ Grade sein.

Die Beweise ergeben sich aus den gewöhnlichen Regeln der Addition, Multiplication und Division.

§. 89. Zusatz.

In den meisten Fällen erhält man bei der Division zweier ganzen Funktionen nicht eine ganze Funktion, sondern es bleibt ein Rest übrig. So ist z. B. nach den gewöhnlichen Regeln der Division:

$$\frac{x^5-3x^3+2x-1}{x^2+2x-1} = x^3-2x^2+2x-6+\frac{16x-7}{x^2+2x-1}.$$

Man erhält also eine ganze Funktion vom $(m-n)^{ten}$ Grade und eine gebrochene Funktion. Es entsteht nun die Frage, ob man nicht im Stande ist, diese gebrochene Funktion ebenfalls in eine ganze Funktion zu verwandeln.

Ein Mittel dazu bietet die fortgesetzte Division, durch welche man z. B. erhält: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots.$

Eine andere, bequemere Methode ist jedoch die Methode der unbestimmten Coefficienten. Zu der Erörterung derselben sind indeß noch einige einleitende Sätze nothwendig.

§. 90. Erklärung.

Eine steigende Funktion heißt eine unendliche Reihe, wenn sie nicht mit einem bestimmten Gliede abbricht, sondern aus unendlich vielen Gliedern besteht. Die geordnete Form ist:

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots. \text{ in infinitum.}$$

x heißt der Fortschreitungsbuchstabe oder der Exponent der Reihe.

Sind die Coefficienten a, b, c... der Art, daß die Summe aller Glieder eine bestimmte endliche Größe nicht übersteigen kann, so ist die Reihe convergent, wie z. B. $1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\ldots$, welche Summe nicht größer als 2 sein kann; im entgegengesetzten Falle ist sie divergent, wie z. B. $1+2^2+2^3+2^4+\ldots$

§. 91. Lehrsatz.

Ist der Werth einer unendlichen Reihe gleich Null für jeden nur möglichen Werth von x (Null eingeschlossen), so sind die einzelnen Coefficienten gleich Null.

Bew. Es ist $a+a_1x+a_2x+a_3x^3+\ldots = 0$.

Diese Gleichung muß nach der Voraussetzung richtig bleiben, wenn man $x=0$ setzt. Alsdann ergiebt sich aber $a=0$ und also

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots = 0$$
$$\text{oder} \quad x(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots) = 0$$
$$\text{oder} \quad a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots = 0.$$

Diese Reihe ist wiederum gleich Null für jeden Werth von x, und ebenso wie oben ergiebt sich also auch $a_1=0$. Wenn man nun in derselben Art weiter schließt, so ergiebt sich, daß alle Coefficienten gleich Null sein müssen.

§. 92. Lehrsatz.

Sind zwei unendliche Reihen für jeden Werth des Fortschreitungsbuchstaben gleich groß, so sind die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten einander gleich.

Bew. Die beiden Reihen seien:

$$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$
$$b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots$$

Da dieselben für jeden Werth von x einander gleich sind, so folgt:

$$a+a_1x+a_2x^2+\ldots = b+b_1x+b_2x^2+\ldots$$
$$\text{oder} \quad (a-b)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots = 0.$$

Nach vorigem Satze muß nun aber, da diese Reihe für jeden Werth von x zu Null wird, $a-b=0$; $a_1-b_1=0$ u. s. w. sein, oder es ist $a=b$; $a_1=b_1$; $a_2=b_2$ u. s. w.

§. 93. Aufgaben.

1) Es soll die gebrochene Funktion $\frac{1}{1-x}$ in eine ganze Funktion von x verwandelt werden.

Aufl. Man setze zuerst:

$$\frac{1}{1-x} = a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

wo a, a_1, a_2, a_3, ... noch unbekannt sind und erst bestimmt werden müssen (woher der Name: Methode der unbestimmten Coefficienten).

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$1 = (1-x)(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$$
$$= a+(a_1-a)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+\ldots.$$

oder $(a-1)+(a_1-a)x+(a_2-a_1)x^2+\ldots. = 0.$

Da diese Gleichung für jeden Werth von x richtig bleibt, so sind nach §. 91 alle einzelnen Coefficienten gleich Null,

also 1) $a-1=0$, folglich $a=1$;
2) $a_1-a=0$, folglich $a_1=a=1$;
3) $a_2-a_1=0$, folglich $a_2=a_1=1$;
u. s. w.

Es ist also $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots.$

was sich schon durch einfache Division ergiebt.

Anm. Ist $x > 1$, so divergirt die Reihe und ist alsdann nicht ohne Weiteres in der Rechnung anwendbar.

2) Es soll die gebrochene Funktion $\frac{a+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b+b_1x+b_2x^2+\ldots}$ in eine ganze Funktion von x verwandelt werden.

Aufl. Man setze:

$$\frac{a+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b+b_1x+b_2x^2+\ldots} = c+c_1x+c_2x^2+\ldots.$$

oder $a+a_1x+a_2x^2+\ldots = (c+c_1x+c_2x^2+\ldots).(b+b_1x+b_2x^2+\ldots)$

oder $a+a_1x+a_2x^2+\ldots = bc+(bc_1+b_1c)x+(bc_2+b_1c_1+b_2c)x^2+\ldots$

Da die Reihen für jeden Werth von x einander gleich sind, so folgt nach §. 92:

1) $a = bc$, daher $c = \frac{a}{b}$;

2) $bc_1+b_1c = a_1$, daher $c_1 = \frac{a_1-b_1c}{b}$;

3) $bc_2+b_1c_1+b_2c = a_2$, daher $c_2 = \frac{a_2-b_2c-b_1c_1}{b}$; u. s. w.

Jeder Coefficient wird also mit Hülfe der vorhergehenden Coefficienten bestimmt. Reihen, bei welchen dies der Fall ist, nennt man recurrente Reihen und die Formel, nach welcher die Coefficienten bestimmt werden, heißt die recurrirende Formel. Diese würde bei der Aufgabe 2), wie leicht zu sehen ist, folgende Gestalt haben:

$$c_n = (a_n-b_{n-1}c-b_{n-2}c_2-b_{n-3}c_3-\ldots.) : b.$$

Im Gegensatz zur recurrirenden Formel kann aber auch die Bestimmung der Coefficienten durch eine independente Formel möglich sein, bei welcher jeder Coefficient aus seiner Ordnungszahl (d. h. c_n aus der Zahl n), und aus verschiedenen unabhängigen Größen bestimmt wird. Die Formel kann zuweilen ganz einfach sein, wie z. B. in der Aufgabe 1) die independente Formel für das allgemeine Glied $a_n x^n$ die Gestalt hat:

$$a_n = 1.$$

Besondere Wichtigkeit haben die in den folgenden §§. entwickelten Reihen.

B. Der allgemeine binomische Lehrsatz.

§. 94. Erklärung.

Der allgemeine binomische Lehrsatz entwickelt die Funktion $(a+b)^x$, wo x negativ und gebrochen sein kann, in eine nach x fortlaufende Reihe. Zu dieser Entwickelung sind jedoch einige Lehrsätze über Binomialcoefficienten erforderlich.

Die in §. 53 gegebene Erklärung der Binomialcoefficienten ist aus einem Falle hergeleitet, bei welchem nur positiv ganze Zahlen möglich sind. Man kann jedoch die Form $p_{(m)}$ auch allgemeiner fassen, so daß zwar m positiv ganz sein muß, p aber beliebig sein kann. Die in §. 53 gegebenen Sätze sind alsdann nicht mehr gültig, aber es ist immer noch:

$$p_{(m)} = \frac{p.(p-1)(p-2).....[p-(m-1)]}{1.\ 2\ .\ 3\ .....\ m}, \text{ also z. B.:}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_{(3)} = \frac{\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\ .\ 2\ .\ 3} = \frac{1}{16},$$

$$(-5)_{(3)} = \frac{(-5).(-6).(-7)}{1\ .\ 2\ .\ 3} = -\ 35.$$

Ist also m positiv, p aber negativ oder gebrochen, so kann $p_{(m)}$ niemals gleich Null sein.

§. 95. Erklärung.

Für die allgemeinen Binomialcoefficienten gelten folgende Sätze:

1) $(p+q)_{(2)} = p_{(2)} + pq + q_{(2)}$.

Beweis. Es ist $(p+q)_{(2)} = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} = \frac{p.(p+q-1)}{2} + \frac{q.(p+q-1)}{2} =$

$$= \frac{p.(p-1)}{2} + \frac{pq}{2} + \frac{qp}{2} + \frac{q.(q-1)}{2} = p_{(2)} + pq + q_{(2)}.$$

2) $(p+q)_{(3)}=p_{(3)}+p_{(2)}q+p\cdot q_{(2)}+q_{(3)}$.

Beweis. Es ist $(p+q)_{(3)}=(p+q)_{(2)}\cdot\frac{p+q-2}{3}=(p_{(2)}+pq+q_{(2)})\left(\frac{p+q-2}{3}\right)=$

$=p_{(2)}\cdot\frac{p+q-2}{3}+pq\cdot\frac{p+q-2}{3}+q_{(2)}\cdot\frac{p+q-2}{3}=$

$=p_{(2)}\cdot\frac{p-2}{3}+\frac{p_{(2)}q}{3}+pq\cdot\frac{p-1}{3}+\frac{pq\cdot(q-1)}{3}+q_{(3)}\cdot\frac{q-2}{3}+q_{(2)}\cdot\frac{p}{3}=$

$=p_{(3)}+\frac{p_{(2)}\cdot q}{3}+2\cdot p_{(2)}\cdot\frac{q}{3}+2\cdot q_{(2)}\cdot\frac{p}{3}+q_{(3)}+\frac{p}{3}\cdot q_{(2)}=$

$=p_{(3)}+p_{(2)}\cdot q+p\cdot q_{(2)}+q_{(3)}$.

3) $(p+q)_{(n)}=p_{(n)}+p_{(n-1)}\cdot q+p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}+p_{(n-3)}\cdot q_{(3)}+\ldots$

Beweis. Der Satz ist gültig, wenn m den bestimmten Werth n hat (z. B. 2 oder 3), und muß also allgemein gültig sein, sobald sich beweisen läßt, daß er auch noch gültig bleibt, wenn $m=n+1$ ist.

Es ist also nach der Voraussetzung:

$$(p+q)_{(n)}=p_{(n)}+p_{(n-1)}\cdot q+p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}+p_{(n-3)}\cdot q_{(3)}+\ldots$$

Nun ist $(p+q)_{(n+1)}=(p+q)_{(n)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=$

$=(p_{(n)}+p_{(n-1)}q+p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}+\ldots)\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=$

$=p_{(n)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}+p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p+q-n}{n+1}+p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}+\ldots\ldots$

Hierbei ist $p_{(n)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n)}\cdot\frac{p-n}{n+1}+p_{(n)}\cdot\frac{q}{n+1}=p_{(n+1)}+p_{(n)}\cdot\frac{q}{n+1}$;

ferner $p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{(p-n-1)+(q-1)}{n+1}=$

$=p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p-n-1}{n+1}+p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{q-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot p_{(n)}\cdot q+\frac{2\cdot p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}}{n+1}$;

ferner $p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot\frac{(p-n-2)+(q-2)}{n+1}=$

$=\frac{p_{(n-2)}\cdot(p-n-2)\cdot q_{(2)}}{n+1}+\frac{p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot(q-2)}{n+1}=$

$=\frac{(n-1)}{n+1}\cdot p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}+\frac{3\cdot p_{(n-2)}\cdot q_{(3)}}{n+1}$.

In derselben Art entwickeln sich die übrigen Glieder, und man erhält das allgemeine Glied $p_{(n-\nu)}\cdot q_{(\nu)}$, wenn man in der zuletzt gegebenen Formel $(\nu-1)$ statt 1, ν statt 2 und $(\nu+1)$ statt 3 einsetzt, und bloß den Nenner $(n+1)$ ungeändert läßt. Setzt man alle diese gefundenen Werthe in die erste Gleichung, so ist:

$$(p+q)^{(n+1)} = p^{(n+1)} + \frac{p^{(n)}\cdot q}{n+1} + \frac{n\cdot p^{(n)}\cdot q}{n+1} + \frac{2\cdot p^{(n-1)}\cdot q^{(2)}}{n+1} +$$

$$+ \frac{(n-1)p^{(n-1)}\cdot q_2}{n+1} + \ldots\ldots$$

$$= p^{(n+1)} + p^{(n)}\cdot q + p^{(n-1)}\cdot q^{(2)} + \ldots$$

welches Resultat der allgemeinen Formel entspricht, so daß dieselbe also hiermit bewiesen ist.

§. 96. Lehrsatz.

Ist m eine beliebige reelle Zahl, so ist stets:

$$\ldots\ldots 1 + m.p + m_{(2)}p^2 + m_{(3)}\cdot p^3 + \ldots = (1+p)^m .$$

Beweis. Ist 1) m positiv und ganz, so ist nach §. 63 der Satz richtig.

Ist 2) m eine beliebige reelle Zahl, so mag zunächst die Reihe $1+mp+ +m_{(2)}p^2+m_{(3)}\cdot p^3+\ldots$, deren Werth man noch nicht kennt, durch f_m bezeichnet werden. Alsdann kann ebenso $1+np+n_{(2)}p^2+n_{(3)}p^3+\ldots$ durch f_n bezeichnet werden. Nun ist, wenn man beide Summen multiplicirt,

$$f_m \cdot f_n = (1+mp+m_{(2)}p^2+\ldots)(1+np+n_{(2)}p^2+\ldots) =$$

$$= 1+(m+n)p+(m_{(2)}+m.n+n_{(2)})p^2+(m_{(3)}+m_{(2)}.n+m.n_{(2)}+n_{(3)}).p^3+\ldots =$$

$$= 1+(m+n)p+(m+n)_{(2)}p^2+(m+n)_{(3)}p^3+\ldots \text{ (nach §. 95)}$$

oder $f_m \cdot f_n = f_{(m+n)}$, d. h.:

Es ist gleichgültig, ob man f_m mit f_n multiplicirt, oder in der Reihe f_m den Werth $m+n$ statt m setzt.

Da nun m und n ganz beliebig sind, so kann auch m eine positiv ganze Zahl, n aber gleich $-m$ sein. In diesem Falle, wo zugleich $f_m = (1+p)^m$ ist, erhält man:

$$f_m \cdot f_{-m} = f_0 = 1, \text{ daher}$$

$$f_{-m} = 1 : f_m = 1 : (1+p)^m = (1+p)^{-m}.$$

Die Bezeichnung f_m für die Reihe

$$1+mp+m_{(2)}\cdot p^2+m_{(3)}\cdot p^3+\ldots$$

wird also gleich $(1+p)^m$, sobald m entweder eine positive oder eine negative ganze Zahl ist.

Nun ist ferner nach dem Gesagten:

$$f_{(m+n+v+w+\ldots)} = f_m \cdot f_n \cdot f_v \cdot f_w \ldots .$$

also auch $f_{(m+m+m+m+\ldots)} = f_m \cdot f_m \cdot f_m \cdot f_m \ldots .$

oder $f_{(m.n)} = (f_m)^n$, wenn n die Anzahl der Summanden m bezeichnet.

Setzt man nun $m = \mp\frac{r}{n}$, wo n und r positive ganze Zahlen sind, so erhält man:

$$f_{-r} = \left(f_{\mp\frac{r}{n}}\right)^n .$$

Nun ist nach dem Vorigen:

$$f_{\mp r} = (1+p)^{\mp r}, \text{ also}$$

$$\left(f_{\mp \frac{r}{n}}\right)^n = (1+p)^{\mp r}, \text{ und}$$

$$f_{\mp \frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(1+p)^{\mp r}} = (1+p)^{\mp \frac{r}{n}}.$$

Die Bezeichnung f_m für die Reihe

$$1+mp+m_{(2)}.p^2+m_{(3)}.p^3+\ldots.$$

ist also gleich $(1+p)^m$, auch wenn m eine beliebige gebrochene Zahl bedeutet, und somit ist der binomische Lehrsatz für alle möglichen reellen Exponenten gültig.

§. 97. Zusatz.

Die gewöhnliche Form des Binoms ist $(a+b)$. Da aber

$$(a+b)^m = a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left\{1+m.\frac{b}{a}+m_{(2)}.\frac{b^2}{a^2}+\ldots.\right\} =$$

$$= a^m+m.a^{m-1}b+m_{(2)}.b^{m-2}.b^2+\ldots \text{ ist,}$$

so ist der binomische Lehrsatz auch in seiner gewöhnlichen Form allgemein gültig.

§. 98. Zusatz.

Der allgemeine binomische Lehrsatz hat seine Wichtigkeit für viele späteren Capitel. Außerdem kann man ihn aber anwenden zur Berechnung einer beliebigen Wurzel aus einer gegebenen Zahl, für den Fall, daß die Reihe schnell convergirt. Dies geschieht, wenn in $(a+b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}.\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$ der Nenner a sehr groß im Verhältniß zu b ist.

Soll z. B. die Cubikwurzel aus 2 gezogen werden, so setze man

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{128} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{125+3} = \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{1+0{,}024}.$$

Die Reihe für $(1+0{,}024)^{\frac{1}{3}}$ convergirt alsdann schnell und man erhält $(1+0{,}024)^{\frac{1}{3}} = 1{,}007936839915\ldots$ aus 7 Gliedern.

Demnach ist $\sqrt[3]{128} = 5{,}039684199575\ldots$ und

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992104989\ldots$$

C. Von der Entwicklung der Potenzen in Reihen.

§. 99. Aufgabe.

Es soll die Potenz a^x, worin a positiv, x reell ist, in eine nach x fortlaufende Reihe verwandelt werden.

Auflös. 1) Setzt man $a=1+b$, so ist $(1+b)^x=1+xb+x_{(2)}b^2+\ldots$ (§. 96). Entwickelt man die Binomialcoefficienten und ordnet alsdann nach Potenzen von x, so ist damit die Aufgabe gelöst.

Anm. Es ergiebt sich aus dieser Lösung zwar das Vorhandensein einer nach x geordneten Reihe, nicht aber das Gesetz, nach welchem die einzelnen Coefficienten zu bilden sind. Dieses erhält man aus Auflös. 2), bei welcher die Methode der unbestimmten Coefficienten angewendet ist.

Auflös. 2) Setzt man:

1) $a^x=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\ldots$.

wo b_0, b_1, b_2 u. s. w. näher zu bestimmende, von x unabhängige Coefficienten sind, so ist auch:

2) $a^y=b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4+\ldots$

3) $a^{(x+y)}=b_0+b_1(x+y)+b_2(x+y)^2+b_3(x+y)^3+b_4(x+y)^4+\ldots\ldots$

Nun ist aber $a^{(x+y)}=a^x.a^y$, daher:

4) $b_0+b_1(x+y)+b_2(x+y)^2+b_3(x+y)^3+\ldots\ldots=$
$=(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots).(b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots)$.

Ordnet man beide Seiten der Gleichung 4) nach x, so erhält man:

$$x^0(b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots)+$$
$$+x^1(b_1+2b_2y+3b_3y^2+4b_4y^3+\ldots)+\ldots=$$
$$=x^0(b_0.b_0+b_0b_1y+b_0b_2y^2+b_0b_3y^3+\ldots)+$$
$$+x^1(b_1b_0+b_1b_1y+b_1b_2y^2+b_1b_3y^3+\ldots)+\ldots$$

Beide Reihen, von welchen bloß die zwei ersten Glieder gegeben sind, müssen für jeden Werth von x einander gleich sein, und deshalb sind auch die zu gleichen Potenzen von x gehörenden Coefficienten einander gleich. Es ist daher:

5) $b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots=b_0(b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots)$

6) $b_1+2b_2y+3b_3y^2+4b_4y^3+\ldots=$
$=b_1b_0+b_1b_1y+b_1b_2y^2+b_1b_3y^3+\ldots$

Aus 5) ergiebt sich, daß b_0 gleich 1 oder gleich 0 sein muß. Es ist indeß gleich 1, weil a^0 gleich 1 ist.

Aus 6) ergiebt sich die Gleichheit zweier nach y geordneten Reihen, in denen also die zu gleichen Potenzen von y gehörenden Coefficienten gleich sein müssen. Folglich ist:

α) $b_1 = b_1 . b_0 = b_1$;

β) $2b_2 = b_1 . b_1$, also $b_2 = \frac{(b_1)^2}{2!}$;

γ) $3b_3 = b_1 . b_2 = \frac{(b_1)^3}{2!}$, also $b_3 = \frac{(b_1)^3}{3!}$;

δ) $4b_4 = b_1 . b_3 = \frac{(b_1)^4}{3!}$, also $b_4 = \frac{(b_1)^4}{4!}$;

ε) $nb_n = b_1 . b_{(n-1)}$. Ist nun $b_{n-1} = \frac{(b_1)^{(n-1)}}{(n-1)!}$, was für $n=5$ sich ergeben hatte, so ist auch $b_n = \frac{(b_1)^n}{n!}$, und dies ist daher die independente Formel.

Setzt man die gefundenen Werthe in Gleichung 1) ein, so ist:

7) $a = 1 + b_1 x + \frac{(b_1)^2}{2!} x^2 + \frac{(b_1)^3}{3!} x^3 + \ldots$

Den Werth von b_1 aus dem Werthe von a zu bestimmen, ist nicht möglich, aber man kann für verschiedene Werthe von b_1 die zugehörigen Werthe von a finden. Setzt man z. B. $b_1 = 1$, so ist:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}71828\ldots = e.$$

Ist also $a = 2{,}71828\ldots = e$, so ist jedesmal $b_1 = 1$.

Hieraus folgt:

8) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Die Zahl e ist aber die Basis der natürlichen Logarithmen (§. 36), und es ist daher $e^{\log.\,nat.\,a} = a$, folglich:

$a^x = e^{(\log.\,nat.\,a).x} = e^{mx}$, wo m den natürlichen Logarithmen von a bezeichnet.

Hieraus aber und aus Gleichung 8) folgt:

9) $a^x = e^{mx} = 1 + mx + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^3}{3!} + \ldots$

§. 100. Aufgabe.

Es soll die Convergenz der eben gefundenen Reihe nachgewiesen werden.

Auflös. Die Convergenz ergiebt sich leicht aus der Vergleichung mit der Reihe:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots \text{ (in inf.)},$$

welche convergirt, sobald $a<1$ ist (§. 45).

Nun muß in der Reihe 9), wenn m und x endliche Größen sind, nothwendig einmal ein Glied $\frac{(mx)^\nu}{\nu!}$ auftreten, in welchem $\nu>mx$ ist. Bis zu diesem Gliede ist die Summe der vorhergehenden Glieder eine endliche. Wird dieses Glied mit p bezeichnet, so sind die folgenden Glieder:

$$p\cdot\frac{mx}{\nu+1};\quad p\cdot\frac{(mx)^2}{(\nu+1)(\nu+2)};\quad p\cdot\frac{(mx)^3}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)};\ \text{u. s. w.}$$

Die Summe dieser und der folgenden Glieder ist nun kleiner als die von den Ausdrücken:

$$p\cdot\frac{mx}{\nu+1};\quad p\cdot\frac{(mx)^2}{(\nu+1)^2};\quad p\cdot\frac{(mx)^3}{(\nu+1)^3};\ \text{u. s. w.}$$

Bei letztern Ausdrücken ist aber $(\nu+1)>mx$, und ihre Summe muß also, da sie der Form $1+a+a^2+a^3+\ldots$ entspricht, eine endliche sein.

§. 101. Zusatz.

Die Reihen 8) und 9) des §. 99 sind entwickelt unter der Voraussetzung, daß $a^x.a^y=a^{x+y}$ ist. Dieser Satz ist aber nur gültig für *eindeutige Potenzen*; daher sind auch obige Reihen nur eindeutig und stellen, wenn x gebrochen ist, nur den *absoluten* Wurzelwerth dar. Die Formeln, welche für eindeutige Potenzen gültig sind, sind es also auch für diese Reihen.

§. 102. Zusatz.

Die für eindeutige Potenzen gültigen Formeln sind anwendbar auf die Reihen:

1) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$

2) $1+mx+\frac{(mx)^2}{2!}+\frac{(mx)^3}{3!}+\ldots$

so lange x eine reelle Zahl, m den natürlichen Logarithmen einer positiven Zahl a bedeutet. Es läßt sich indessen leicht nachweisen, daß sie auch noch anwendbar sind, wenn x eine allgemeine (reelle oder imaginäre) Zahl bedeutet. Daher kann man stets, x mag reell oder imaginär sein, die Reihe 1) durch e^x, die Reihe 2) durch a^x bezeichnen, und kann mit diesen Ausdrücken wie mit reellen Potenzen rechnen. Man nennt aber unter dieser Voraussetzung den Ausdruck e^x eine *natürliche*, den Ausdruck a^x eine *künstliche Potenz*. Die Convergenz der Reihen ergiebt sich auch für diesen Fall sehr leicht aus §. 100. Ist nämlich $x=p\mp q$, wo p und q reell sind, so convergirt die Reihe. Ist nun $x=p\mp qi$, so erhält man bei der Entwicklung der einzelnen Potenzen dieselben absoluten Zahlen; ein Theil derselben hat den Faktor i, der andere Theil ist reell, und die geordnete Reihe läßt sich also auf die Form $P+Q.i$ bringen. Da nun der Ausdruck $P+Q$ convergiren würde, so ist sowol P wie auch Q eine endliche Größe.

D. Von der Entwicklung der Logarithmen in Reihen.

§. 103. Aufgabe.

Es soll log. nat. $(1+x)$ oder Log $(1+x)$ in eine nach x fortlaufende Reihe entwickelt werden.

Auflös. Es ist (nach §. 99, 9):

1) $(1+x)^m=1+\left(\text{Log}(1+x)\right)m+\left(\text{Log}(1+x)\right)^2\frac{m^2}{2!}+\ldots\ldots$

Ferner ist nach §. 96:

2) $(1+m)^m=1+mx+m_{(2)}x^2+\ldots\ldots,$

oder, wenn diese Reihe nach Potenzen von m geordnet wird,

3) $(1+x)^m=1+Am+Bm^2+\ldots\ldots,$

wo A, B, u. s. w. näher zu bestimmende Coefficienten sind.

Aus 1) und 3) folgt, daß Log $(1+x)=A$ ist, gleich der Summe der Zahlenfactoren, die zu der Potenz m^1 gehören, und man hat also die Reihe 2) nach m zu ordnen. Das allgemeine Glied ist:

$$m_{(v)}x^v=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots[m-(v-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ v}.x^v\ .$$

Führt man die Multiplication im Zähler aus und ordnet nach Potenzen von m, so gehört zur Potenz m^1 der Faktor $[1.2.3\ldots(v-1)].x^v=$ $=(v-1)!x^v$, und zwar ist dieser positiv, wenn v ungerade, negativ,

wenn v gerade ist. In dem allgemeinen Gliede ist also der gesuchte Summand gleich $\mp\frac{(v-1)!}{v!}.x^v.m=\mp\frac{1}{v}.x^v.m.$

Daher erhält man, wenn man in diesem Ausdrucke $v=1, 2, 3$ u. s. w. setzt:

$$A=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots\ldots=\mathrm{Log}(1+x).$$

§. 104. Aufgabe.

Es soll die Convergenz dieser Reihe nachgewiesen werden.

Auflös. Man kann diese Reihe leicht in eine andere verwandeln, deren Convergenz unzweifelhaft ist. Es ist nämlich:

1) $\mathrm{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$

2) $\mathrm{Log}(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots.$

Subtrahirt man 2) von 1), so erhält man:

3) $\mathrm{Log}(1+x)-\mathrm{Log}(1-x)=\mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots.\right\},$

oder, wenn $(1+x):(1-x)=y$ gesetzt wird,

4) $\mathrm{Log}\,y=2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots.\right\}.$

Diese Reihe convergirt, weil $\frac{y-1}{y+1}<1$ ist, und für diesen Fall selbst die Reihe

$$\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots.$$

convergiren würde. (§. 45).

Die Reihe 4) ist bequemer zur Berechnung der Logarithmen, als Reihe 1), jedoch läßt sich ihr eine noch bequemere Form geben.

Setzt man $y=\frac{n+z}{n}$, also $\frac{y-1}{y+1}=\frac{z}{2n+z}$, so ist:

5) $\mathrm{Log}\frac{n+z}{n}=\mathrm{Log}(n+z)-\mathrm{Log}\,n=$

$$=2\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\ldots.\right\},$$

also 6) $\text{Log}(n+z)=\text{Log}\,n+2.\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$.

In dieser Reihe nimmt die Größe der Glieder desto schneller ab, je größer n im Verhältniß zu z ist, jedoch kann Log (n+z) nur mit Hülfe von Log n berechnet werden. Setzt man n=1, z=1, so ist Log n=0, daher

$$\text{Log}\,2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots\cdots\right\}.$$

§. 105. Zusatz.

Um aus dem natürlichen Logarithmen von a den Brigg'schen (log a) zu erhalten, benutzt man den Lehrsatz des §. 35. Es ist nach demselben:

$$\log a=\frac{\text{Log}\,a}{\text{Log}\,10}=\frac{\text{Log}\,a}{2{,}30259\ldots.}=(0{,}43429\ldots.).\text{Log}\,a.$$

Die Zahl $0{,}43429\ldots=\mu$ nennt man den Modul des Brigg'schen Systems. Es ist also $\log a=\mu\,\text{Log}\,a$.

§. 106. Zusatz.

Ist in 6) des §. 104 n sehr groß, z sehr klein, so kann man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, statt:

$$\text{Log}\,(n+z)-\text{Log}\,n=2\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\ldots\right\}$$

schreiben 1) $\text{Log}\,(n+z)-\text{Log}\,n=\frac{z}{n}$.

Ebenso auch 2) $\text{Log}\,(n+z')-\text{Log}\,n=\frac{z'}{n}$.

Aus 1) und 2) folgt aber durch Division:

$$(\text{Log}\,(n+z)-\text{Log}\,n):(\text{Log}\,(n+z')-\text{Log}\,n)=z:z',$$

d. h. die Differenzen der Logarithmen von zwei großen aber nur um Weniges von einander verschiedenen Zahlen verhalten sich wie die Differenzen der Zahlen selbst.

Kennt man also z. B.:

$$\log 13567=4{,}1324838,$$
$$\log 13568=4{,}1325158,$$

so findet man die Logarithmen von 13567,1, von 13567,2, von 13567,3 u. s. w., indem man die Differenz jener beiden Logarithmen oder die Zahl 0,0000320 in 10 Theile theilt, und dann zu log 13567 nach und nach einen, zwei, drei u. s. w. dieser Theile hinzuaddirt.

Hierauf gründet sich die Berechnung der proportionirten Theile, die man in den Logarithmentafeln findet.

E. Von der Entwicklung der goniometrischen Funktionen in Reihen.

§. 107. Erklärung.

In der Trigonometrie wird gezeigt, daß man die Werthe sämmtlicher Sinus und Cosinus aus den bekannten Werthen einiger Sinus ableiten kann. Eine bequemere Art der Berechnung erhält man aber durch Entwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ in eine nach x fortlaufende Reihe. Für diese Entwicklung mißt man jedoch x nicht nach Graden, sondern nach der Bogenlänge für den Radius 1.

§. 108. Aufgabe.

Es soll $\cos x$ in eine nach x fortlaufende Reihe verwandelt werden.

Auflös. Man setze:

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist zunächst $a_0 = 1$, weil $\cos 0 = 1$ ist.

Da ferner $\frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y) = \cos x . \cos y$ ist, so ist auch:

$$\frac{1}{2}\Big(1 + a_1(x+y) + a_2(x+y)^2 \ldots\Big) + \frac{1}{2}\Big(1 + a_1(x-y) + a_2(x-y)^2 + \ldots\Big) =$$

$$= (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)$$

Ordnet man beide Seiten der Gleichung nach x und y, so müssen die zu gleichen Potenzen von x und y auf beiden Seiten gehörigen Coefficienten einander gleich sein. Im ersten Theile der Gleichung können aber alsdann keine ungeraden Potenzen von y vorkommen, und es müssen dieselben daher auch im zweiten Theile der Gleichung wegfallen, oder alle Coefficienten von ungerader Ordnungszahl (a_1, a_3 u. s. w) müssen gleich Null sein. Entwickelt man nun die Gleichung unter dieser Voraussetzung und ordnet nach y, so erhält man:

$$y^0.\{1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \ldots.\} +$$
$$+ y^2.\{a_2 + 4_{(2)} a_4 x^2 + 6_{(2)} a_6 x^4 + 8_{(2)} a_8 x^6 + \ldots.\} + \ldots. =$$
$$= y^0.\{1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \ldots.\} +$$
$$+ y^2.\{a_2 + a_2 a_2 x^2 + a_2 a_4 x^4 + a_2 a_6 x^6 + \ldots.\} + \ldots.$$

In diesen beiden Reihen müssen die zu gleichen Potenzen von y gehörigen Coefficienten einander gleich sein. Daher ist:

$$a_2 + 4_{(2)} a_4 x^2 + 6_{(2)} a_6 x^4 + \ldots. = a_2 + a_2 a_2 x^2 + a_2 a_4 x^4 + a_2 a_6 x^6 + \ldots.$$

Da diese Reihen nach x geordnet sind, so ist wiederum:

$$a_2 = a_2;\quad 4_{(2)} a_4 = a_2 a_2;\quad 6_{(2)} a_6 = a_2 a_4;\quad (2n)_{(2)} a_{2n} = a_2 a_{2n-2};$$

Hieraus folgt:

1) $a_2 = a_2$;

2) $a_4 = (a_2)^2 : 4_{(2)} = (a_2)^2 : \frac{4!}{2^2} = \frac{(2a_2)^2}{4!}$;

3) $a_6 = (a_2 a_4) : 6_{(2)} = a_2 . \frac{(2a_2)^2}{4!} : 6_{(2)} = \frac{(2a_2)^3}{6!}$;

4) $a_{2n} = \frac{(2a_2)^n}{(2n)!}$.

Schließlich ist also:

$$\cos x = 1 + \frac{(2a_2)}{2!} . x^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!} . x^4 + \frac{(2a_2)^3}{6!} . x^6 + \ldots .$$

Die Bestimmung von a_2 ist erst später möglich.

§. 109. Aufgabe.

Es soll sin x in eine nach x fortlaufende Reihe verwandelt werden.

Auflös. Man setze:

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots .$$

so ist $b_0 = 0$, weil sin 0 = 0 ist.

Da ferner $\frac{1}{2} \cos (x - y) - \frac{1}{2} \cos (x + y) = \sin x . \sin y$ ist, so folgt, wenn man die im vorigen §. gefundene Reihe benutzt:

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(2a_2)}{2!} (x-y)^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!} (x-y)^4 + \ldots \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(2a_2)}{2!} (x+y)^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!} (x+y)^4 + \ldots \right\} =$$

$$= \{ b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots . \} . \{ b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots . \} .$$

Im ersten Theil der Gleichung fallen alle geraden Potenzen von x und y weg. Diese müssen daher auch im zweiten Theile der Gleichung wegfallen, oder es müssen die Coefficienten mit gerader Ordnungszahl gleich Null sein. Entwickelt man unter dieser Voraussetzung die Gleichung und ordnet nach y, so ist:

$$- y^1 . \left\{ \frac{2(2a_2)}{2!} x + \frac{4(2a_2)^2}{4!} x^3 + \frac{6(2a_2)^3}{6!} x^5 + \ldots \right\} + \ldots . =$$

$$= y^1 \{ b_1 b_1 x + b_1 b_3 x^3 + b_1 b_5 x^5 + \ldots \} + \ldots .$$

Es ist also $b_1 b_1 x + b_1 b_3 x^3 + b_1 b_5 x^5 \ldots = -\frac{2(2a_2)}{2!}x - \frac{4(2a_2)^2}{4!}x^3 - \ldots$,

daher:

1) $(b_1)^2 = -2a_2$;

2) $b_1 b_3 = \frac{-(2a_2)^2}{3!} = \frac{-(b_1)^4}{3!}$ und $b_3 = \frac{-(b_1)^3}{3!}$;

3) $b_1 b_5 = \frac{-(2a_2)^3}{5!} = \frac{(b_1)^6}{5!}$ und $b_5 = \frac{(b_1)^5}{5!}$;

4) $b_1 b_7 = \frac{-(2a_2)^4}{7!} = \frac{-(b_1)^8}{7!}$ und $b_7 = \frac{-(b_1)^7}{7!}$

u. s. w.

Setzt man die gefundenen Werthe der Coefficienten in der ursprünglichen Reihe ein, ferner den Werth $(b_1)^2$ statt $-2a_2$ in der für cos x gefundenen Reihe (§. 108), so erhält man schließlich:

$$\sin x = b_1 x - \frac{(b_1)^3}{3!}x^3 + \frac{(b_1)^5}{5!}x^5 - \frac{(b_1)^7}{7!}x^7 + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{(b_1)^2}{2!}x^2 + \frac{(b_1)^4}{4!}x^4 - \frac{(b_1)^6}{6!}x^6 + \ldots\ldots$$

§. 110. Aufgabe.

Es soll der Coefficient b_1 aus vorigem §. bestimmt werden.

Auflös. Aus $\sin x = b_1 x - \frac{(b_1)^3}{3!}x^3 + \ldots$ folgt:

$$\frac{\sin x}{x} = b_1 - \frac{(b_1)^3}{3!}x^2 + \ldots,$$

welche Gleichung auch für den Werth Null von x gültig ist. Setzt man $x=0$, so ist $b_1 = \frac{\sin x}{x}$; man hat also nur den Werth dieses Quotienten zu bestimmen für $x=0$.

Nun ist, so lange x nicht größer als der Viertelkreisbogen wird, stets $x > \sin x$ und $\operatorname{tg} x > x$, daher $\frac{\sin x}{x} < 1$, und $\frac{\sin x}{\cos x} > x$ oder $\frac{\sin x}{x} > \cos x$. Der Werth von $\frac{\sin x}{x}$ muß also stets zwischen 1 und cos x liegen. Ist aber $x=0$, so ist $\cos x = 1$; folglich ist auch $\frac{\sin x}{x} = b_1 = 1$.

Setzt man nun diesen gefundenen Werth ein, so erhält man als Endgleichungen:

$$1)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$2)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Anm. 1. Diese zwei Reihen müssen convergiren, da sie nach §. 100 sogar convergiren würden, wenn alle Glieder positiv wären.

Anm. 2. Aus der Bestimmung des Coefficienten b_1 ergiebt sich der Grund, weshalb x in Bogenmaaß angegeben sein muß.

§. 111. Zusatz.

Die eben gefundenen Reihen kann man auch in geschlossener Form erhalten. Es ist nämlich (nach §. 102):

$$1)\quad e^{xi} = 1 + xi + \frac{x^2 i^2}{2!} + \frac{x^3 i^3}{3!} + \frac{x^4 i^4}{4!} + \frac{x^5 i^5}{5!} + \cdots =$$

$$= 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) =$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

Ebenso ist:

$$2)\quad e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber:

$$3)\quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};\qquad 4)\quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Außerdem ergiebt sich noch die wichtige Gleichung:

$$5)\quad (\cos x \mp i \sin x)^m = e^{\mp mxi} = \cos mx \mp i \sin mx.$$

§. 112. Erklärung.

Die beiden Reihen:

$$1)\quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$2)\quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

sind gleich den trigonometrischen Funktionen sin x und cos x, wenn x das Bogenmaaß für einen spitzen Winkel bedeutet. Ist jedoch in obigen

Reihen x ein ganz allgemeiner Ausdruck, so haben sie zwar noch irgend einen bestimmten Werth, aber dieser steht zunächst in keiner Beziehung zu den erwähnten trigonometrischen Funktionen und ist also erst noch zu finden. Für den Fall, daß x ein allgemeiner Ausdruck ist, sollen obige Reihen kürzer durch Sin x und Cos x bezeichnet werden.

§. 113. Lehrsätze.

Für die Ausdrücke Sin x und Cos x gelten folgende Formeln:

1) $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = 1$.*)

2) $\text{Sin}(x \mp y) = \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y \mp \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y$.

3) $\text{Cos}(x \mp y) = \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y \pm \text{Sin}\,x\,\text{Sin}\,y$.

Beweis zu 1). Es ist $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{e^{2xi} + e^{-2xi} - 2e^{xi}.e^{-xi}}{-4} + \frac{e^{2xi} + e^{-2xi} + 2e^{xi}.e^{-xi}}{4} = 1.$$

Beweis zu 2). Es ist $\text{Sin}\,x.\text{Cos}\,y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} =$

$$= \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i}}{2i.2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Sin}(x+y) + \frac{1}{2}\,\text{Sin}(x-y).$$

Ebenso ist $\text{Cos}\,x.\text{Sin}\,y = \frac{1}{2}\,\text{Sin}(x+y) - \frac{1}{2}\,\text{Sin}(x-y)$.

Addirt oder subtrahirt man die gefundenen zwei Ausdrücke, so erhält man:

$$\text{Sin}\,x.\text{Cos}\,y \mp \text{Cos}\,x.\text{Sin}\,y = \text{Sin}(x \mp y).$$

Beweis zu 3). Er wird geführt, wie der Beweis zu 2).

§. 114. Zusatz.

Aus den eben bewiesenen Formeln werden in der Trigonometrie verschiedene Reihen neuer Formeln abgeleitet. Da nun die Grundformeln der Trigonometrie nach vorigem §. auch dann noch richtig bleiben, wenn die in ihnen vorkommenden Buchstaben nicht Winkel, sondern beliebige Ausdrücke bedeuten, so gilt dasselbe auch von allen übrigen abgeleiteten Formeln, und man kann dieselben anwenden, ohne erst untersuchen zu müssen, welche Bedeutung den einzelnen Buchstaben zukomme.

---

*) Sin^2x ist die kürzere Schreibart für $(\text{Sin}\,x)^2$, Cos^2x für $(\text{Cos}\,x)^2$.

§. 115. Zusatz.

In der Trigonometrie wird nachgewiesen, daß die Werthe der Sinus und Cosinus bei wachsender Größe des Winkels stetig zu- und abnehmen, immer aber zwischen den Gränzen + 1 und —1. Dasselbe gilt auch für die Reihen Sin x und Cos x, so lange x reell ist.

Es ist nämlich $\sin 45^0 = \cos 45^0$ oder $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Hieraus folgt $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4} =$ $= \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1$ (nach §. 113). Ebenso findet man $\cos\frac{\pi}{2} =$ $= 0$. Durch weitere Benutzung dieser gefundenen Werthe und Anwendung der Formeln:

$$\text{Sin}(x\mp y) = \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y \mp \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y,$$
$$\text{Cos}(x\mp y) = \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y \pm \text{Sin}\,x\,\text{Sin}\,y$$

gelangt man dann leicht zu folgenden Formeln der Trigonometrie:

1) $\text{Sin}\,2n\pi = 0$; 2) $\text{Cos}\,2n\pi = +1$;

3) $\text{Sin}\,(2n+1)\pi = 0$; 4) $\text{Cos}\,(2n+1)\pi = -1$;

5) $\text{Sin}\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi = +1$; 6) $\text{Cos}\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0$;

7) $\text{Sin}\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi = -1$; 8) $\text{Cos}\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi = 0$.

Zwischen den angegebenen Gränzwerthen nehmen die Werthe der Reihen Sin x und Cos x ab und zu, und es kann also z. B. der Werth der Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

nie größer werden als 1, eine wie große Zahl auch für x eingesetzt werden möge. Denn wäre z. B. x=32,6269..., so würde man setzen können: 32,6269=(1,2110...+10.3,14159...)=(1,2110...+10π), daher Sin 32,6269=Sin(10π+1,2110...)=sin 1,2110...; sin1,2110.. ist aber der Sinus eines spitzen Winkels und als solcher < 1.

§. 116. Erklärung.

Eine Benutzung der für die Sinus und Cosinus gefundenen Reihen ist nur möglich unter der Voraussetzung, daß die Zahl π, ohne deren Kenntniß die Größe eines Winkels nicht in Bogenmaaß ausgedrückt wer-

den kann, bekannt sei. Es läßt sich zwar die Größe dieser Zahl durch eine geometrische Betrachtung ermitteln (Planimetrie §. 165), aber schneller gelangt man zum Resultate mit Hülfe der unendlichen Reihen.

§. 117. Aufgabe.

Es soll die Größe der Zahl π bestimmt werden.

Auflös. Es läßt sich das Bogenmaaß eines Winkels darstellen durch eine Reihe, die nach Potenzen von tg x geordnet ist. Es ist nämlich:

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x \text{ und } e^{-xi}=\cos x-i\sin x,$$

folglich $\frac{e^{xi}}{e^{-xi}}=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}$ oder $e^{2xi}=\frac{1+i\,tg\,x}{1-i\,tg\,x}$.

Nimmt man von letzterer Gleichung die natürlichen Logarithmen, so ist:

$$2xi=\text{Log}\frac{1+itgx}{1-itgx}=2\left\{i.tgx-i.\frac{tg^3x}{3}+i.\frac{tg^5x}{5}-\ldots\right\} \text{ (nach §. 104, 3),}$$

oder $x=tgx-\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x-\ldots.$

Aus dieser Reihe lassen sich nun leicht verschiedene Gleichungen für π ableiten, z. B.:

1) Setzt man $x=\frac{\pi}{4}$, so ist $tg\,x=1$, folglich

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots.$$

Diese Reihe convergirt indeß zu wenig, als daß sich π bequem daraus berechnen ließe.

2) Setzt man $tg\,x=\frac{1}{5}$, so ist:

a) $$x=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\ldots.$$

Da ferner $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\,x-tg\frac{\pi}{4}}{1+tgx.tg\frac{\pi}{4}}=\frac{tgx-1}{1+tgx}$ (vgl. Trigonometrie),

also im vorliegenden Falle:

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{1}{5}-1}{1+\frac{1}{5}}=-\frac{2}{3} \text{ ist,}$$

so erhält man:

b) $$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5+\ldots.$$

Aus den zwei Gleichungen a) und b) läßt sich nun durch Subtraction der Werth von $\frac{\pi}{4}$ finden.

Die Gleichung b) läßt sich in noch bequemerer Form darstellen.

Leitet man $\left(\text{nach dem Satze } \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)$ aus $\operatorname{tg} x=\frac{1}{5}$ folgende Werthe ab: $\operatorname{tg} 2x=\frac{5}{12}$; $\operatorname{tg} 4x=\frac{120}{119}$, so ist:

$$\operatorname{tg}\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} 4x-1}{1+\operatorname{tg} 4x}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}, \text{ folglich}$$

c) $$4x-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\ldots.$$

Aus a) und c) ergiebt sich aber:

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\ldots\right\}-$$

$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\ldots\right\},$$

und hieraus $\pi = 3{,}14159265358979323 8\ldots.$

Neuntes Capitel.

Von den endlichen Summen- und Differenzenreihen.

A. Von den Summenreihen.

§. 118. Erklärung.

Aus der Reihe der natürlichen Zahlen kann man eine neue Reihe bilden, wenn man, vom ersten Gliede anfangend, die Summe der ersten 2, 3, 4 u. s. w. Zahlen bestimmt; aus dieser zweiten Reihe kann man auf dieselbe Art eine dritte bilden, aus dieser eine vierte u. s. w. Die so entstandenen Reihen nennt man Summenreihen oder figurirte Zahlen der 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Ordnung. Dieselben sind:

1te Ordnung $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

2te „ $= 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

3te „ $= 1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$

4te „ $= 1, 5, 15, 35, 70, 126, \ldots$

u. s. w.

Aus der Bildung der einzelnen Glieder geht hervor, daß das n^{te} Glied einer beliebigen Reihe gleich den n ersten Gliedern der vorhergehenden Reihe, daher z. B. $20 = 1+3+6+10$ ist. Das n^{te} Glied der m^{ten} Ordnung wird bezeichnet durch T^n_m, (terminus), die Summe der n ersten Glieder der m^{ten} Ordnung durch S^n_m.

§. 119. Lehrsätze.

1) $T^n_m = S^n_{m-1}$;

2) $T^n_m = (n+m-1)_{(m)}$;

3) $S^n_m = (n+m)_{(m+1)}$.

Bew. zu 1). Er ergiebt sich aus der Erklärung des §. 118.

Bew. zu 2). Es ist für die erste Ordnung:

$$T^n_1 = n_{(1)}; \quad S^n_1 = \frac{n.(n+1)}{2} = (n+1)_{(2)} \text{ (nach §. 40).}$$

Ferner ist für die zweite Ordnung:

$$T_2^n = S_1^n = (n+1)_{(2)}.$$

Für die zwei ersten Ordnungen ist also der Lehrsatz richtig. Um die Richtigkeit auch für die dritte Ordnung zu beweisen, stellt man den Satz hin, daß wenn $T_3^h = (h+2)_{(3)}$ ist, auch $T_3^{h+1} = (h+3)_{(3)}$ sein muß. Nun ist $T_3^{h+1} = T_3^h + T_2^{h+1} = (h+2)_{(3)} + (h+2)_{(2)} = (h+3)_{(3)}$ (§. 53, 4); wenn also für irgend einen Werth von h die Gleichung $T_3^h = (h+2)_{(3)}$ richtig ist, so gilt der Lehrsatz 2) auch für die dritte Ordnung. Es ist aber, wenn man $h=2$ setzt, $4_{(3)} = 4$, und dies ist nach §. 118 das 2te Glied der dritten Ordnung.

In derselben Art beweist man die Richtigkeit des Lehrsatzes auch für die folgenden Ordnungen.

Bew. zu 3). Er folgt aus 1) und 2).

Anm. Es ergiebt sich aus 2), daß sämmtliche figurirten Zahlen Binomialcoefficienten sind. Liest man dieselben (in §. 118) von links nach rechts in der Diagonale, also 1, (1, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 6, 4), u. s. w., so erhält man die Binomialcoefficienten in derselben Ordnung, wie man sie bei der Bildung der einzelnen Potenzen von a+b erhält.

§. 120. Zusatz.

In der n^{ten} Ordnung sind die ersten $(x+1)$ Glieder nach vorigem §.:

$$n_{(n)};\ (n+1)_{(n)};\ (n+2)_{(n)};\ \ldots (n+x)_{(n)}.$$

Die Summe derselben ist aber gleich dem $(x+1)^{ten}$ Gliede der $(n+1)^{ten}$ Reihe, welches (nach 3) gleich $(n+x+1)_{(n+1)}$ ist, und hieraus ergiebt sich also folgender Lehrsatz:

$$n_{(n)} + (n+1)_{(n)} + (n+2)_{(n)} + \ldots + (n+x)_{(n)} = (n+x+1)_{(n+1)}.$$

Nach diesem Satze ist z. B.:

$$3_{(3)} + 4_{(3)} + 5_{(3)} + \ldots + 20_{(3)} = 21_{(4)},$$

oder $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 18.19.20 = (18.19.20.21) : 4$;

ebenso $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)n = (n+1)_{(5)}.4!$.

§. 121. Zusatz.

Wie aus der Reihe der natürlichen Zahlen, so lassen sich auch aus jeder andern arithmetischen Progression durch dasselbe Verfahren neue Reihen ableiten, z. B.:

	Erste Ordnung:	Zweite Ordnung:
a)	1, 3, 5, 7, 9,....	1, 4, 9, 16, 25,....
b)	1, 4, 7, 10, 13,....	1, 5, 12, 22, 35,....
c)	1, 5, 9, 13, 17,....	1, 6, 15, 28, 45,....
d)	1, 6, 11, 16, 21....	1, 7, 18, 34, 55,....

u. s. w.

Von diesen lassen sich ebenfalls die einzelnen Glieder der höhern Ordnungen und die Summen der n ersten Glieder einer Ordnung durch eine Formel bestimmen, doch gelingt dies am einfachsten erst mit Hülfe der in den folgenden §§. entwickelten Differenzenreihen.

Anm. Die in den §§. 118 und 121 angeführten Zahlen der zweiten Ordnungen führen besondere Namen. Man nennt:

e)	1, 3, 6, 10, 15....	Triagonalzahlen,
f)	1, 4, 9, 16, 25....	Quadratzahlen,
g)	1, 5, 12, 22, 35....	Pentagonalzahlen,
h)	1, 6, 15, 28, 45....	Hexagonalzahlen,
i)	1, 7, 18, 34, 55....	Heptagonalzahlen,

u. s. w.

Die Zahlen der Reihen von f an heißen auch Polygonalzahlen.

Der Grund dieser Benennungen ist, daß man mit Hülfe regulärer Vielecke diese Zahlen darstellen kann, durch bestimmte Gruppirung der natürlichen Zahlen auf Ecken und Seiten jener Vielecke. Die Gruppirung ist z. B. folgende für

Triagonalzahlen:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21

Quadratzahlen:

1
2 4
5 3 9
10 6 8 16
11 7 15
12 14
13

Von dieser Eigenschaft rührt auch der Name „figurirte Zahlen" her, der indeß gewöhnlich nur den in §. 118 angeführten Zahlen gegeben wird.

B. Von den Differenzenreihen.

§. 122. Erklärung.

Aus einer Reihe gegebener Zahlen kann man eine neue Reihe dadurch bilden, daß man die Unterschiede von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern berechnet. Diese neue Reihe nennt man die erste Differenzenreihe der gegebenen. Bezeichnet man die Glieder der ursprünglichen Reihe mit a_1, a_2, a_3, a_4 u. s. w., so sind die Glieder der ersten Differenzenreihe: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ u. s. w.

Aus dieser bildet man in derselben Weise die zweite Differenzenreihe, aus dieser die dritte u. s. w. Bezeichnet man die Glieder der ersten Differenzenreihe kürzer durch b_1, b_2, b_3, b_4 u. s. w., so erhält man für die zweite die Glieder b_2-b_1, b_3-b_2, b_4-b_3 u. s. w., oder kürzer c_1, c_2, c_3 u. s. w., für die dritte die Glieder c_2-c_1, c_3-c_2, c_4-c_3 u. s. w. oder kürzer d_1, d_2, d_3 u. s. w. Alle diese Reihen bilden das Schema:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5....
I. Diff.	b_1	b_2	b_3	b_4	
II. Diff.	c_1	c_2	c_3		
III. Diff.	d_1	d_2			

u. s. w.

Es lassen sich nun zwar von jeder beliebigen Reihe Differenzenreihen ableiten, doch haben dieselben nur dann eine besondere Wichtigkeit, wenn in irgend einer Differenzenreihe sämmtliche Glieder einander gleich sind. Alsdann nennt man die ursprüngliche Reihe eine arithmetische Progression höherer Ordnung, und zwar der m^{ten} Ordnung, wenn die Glieder der m^{ten} Differenzenreihe einander gleich sind. Die Polygonalzahlen bilden also eine Progression der zweiten Ordnung.

§. 123. Aufgabe.

Es sollen die Glieder der verschiedenen Differenzenreihen durch die Glieder der ursprünglichen Reihe ausgedrückt werden.

Auflös. Wendet man nicht die Abkürzungen b_1, c_1, d_1 u. s. w. an, sondern schreibt die wirklichen Differenzen hin, so erhält man statt des obigen folgendes Schema:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
I. D.	a_2-a_1	a_3-a_2	a_4-a_3	a_5-a_4	
II. D.	$a_3-2a_2+a_1$	$a_4-2a_3+a_2$	$a_5-2a_4+a_3$		
III. D.	$a_4-3a_3+3a_2-a_1$	$a_5-3a_4+3a_3-a_2$			

u. s. w.

Es ist nach demselben:

$$b_1=a_2-a_1;$$

$$c_1=a_3-2a_2+a_1;$$

$$d_1=a_4-3a_3+3a_2-a_1.$$

Um e_1 zu erhalten, hätte man in dem für d_1 gefundenen Ausdrucke alle Zeiger um 1 zu erhöhen, und dann d_1 abzuziehen (vergl. Schema). Man

würde alsdann dasselbe Verfahren anwenden, als wenn man aus $(a-1)^3 = a^3-3a^2+3a-1$ die folgende Potenz $(a-1)^4$ berechnen wollte, muß also auch dieselben Zahlencoefficienten erhalten. Für die m^{te} Differenzenreihe sind es daher die Coefficienten der Reihe $(a-1)^m$. Man erhält z. B.:

$$f_1 = a_6 + 5a_5 + 10a_4 + 10a_3 + 5a_2 + a_1;$$

$$f_{n+1} = a_{n+6} + 5a_{n+5} + 10a_{n+4} + 10a_{n+3} + 5a_{n+2} + a_{n+1}.$$

§. 124. Aufgabe.

Es sollen die Glieder der ursprünglichen Reihe durch das erste Glied derselben und das erste Glied einer jeden Differenzenreihe ausgedrückt werden.

Auflös. Es sind gegeben a_1; b_1; c_1; d_1; u. s. w.
Aus diesen Größen erhält man (vergl. Schema):

$$a_2 = a_1 + b_1;\ b_2 = b_1 + c_1;\ c_2 = c_1 + d_1;\ \text{u. s. w.}$$

Aus den Größen a_2; b_2; c_2 u. s. w. erhält man aber:

$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + 2b_1 + c_1;$$

$$b_3 = b_2 + c_2 = b_1 + 2c_1 + d_1;$$

$$c_3 = c_2 + d_2 = c_1 + 2d_1 + c_1 \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen erhält man ferner:

$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + 3b_1 + 3c_1 + d_1 \text{ u. s. w.}$$

Es ergiebt sich wiederum, wie in §. 123, daß man dieselben Coefficienten erhalten muß, die man bei der Bildung der verschiedenen Potenzen von $(a+1)$ erhalten würde, und die allgemeine Formel ist alsdann:

$$a_m = a_1 + (m-1)b_1 + (m-1)_{(2)}c_1 + (m-1)_{(3)}d_1 + \ldots$$

Die Reihe bricht ab mit dem ersten Gliede derjenigen Differenzenreihe, deren Glieder sämmtlich einander gleich sind.

Anm. Will man ein beliebiges Glied der ersten Differenzenreihe in derselben Art ausdrücken, so braucht man nur diese Reihe als die ursprüngliche anzusehen; in der angegebenen Formel hat man alsdann b_m statt a_m, b_1 statt a_1, c_1 statt b_1 u. s. w. zu schreiben.

§. 125. Aufgabe.

Es soll die Summe der ersten n Glieder aus der ursprünglichen Reihe angegeben werden.

Auflös. Bezeichnet man diese Summe durch Sa_n, so ist also:

$$Sa_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Schreibt man nun statt der Glieder $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_3, a_2, a_1$ die im vorigen §. gefundene Reihe, so ist:

$$Sa_n = \begin{cases} a_n \\ +a_{n-1} \\ +a_{n-2} \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} = \begin{cases} a_1+(n-1)b_1+(n-1)_{(2)}c_1+(n-1)_{(3)}d_1+\ldots. \\ +a_1+(n-2)b_1+(n-2)_{(2)}c_1+(n-2)_{(3)}d_1+\ldots. \\ +a_1+(n-3)b_1+(n-3)_{(2)}c_1+(n-3)_{(3)}d_1+\ldots. \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

Die zusammengehörenden Ausdrücke lassen sich leicht addiren nach folgender Formel des §. 120:

$$n_{(n)}+(n+1)_{(n)}+(n+2)_{(n)}+\ldots+(n+x)_{(n)}=(n+x+1)_{(n+1)},$$

und man erhält alsdann schließlich:

$$Sa_n=na_1+n_{(2)}b_1+n_{(3)}c_1+n_{(4)}d_1+\ldots\ldots.$$

§. 126. Zusatz.

Mit Hülfe der eben gefundenen Gleichung kann man also die Summe der ersten n Glieder einer jeden Reihe angeben, bei welcher irgend eine Differenzenreihe gleiche Glieder hat. Vorzugsweise sind unter den Reihen dieser Art zu bemerken sämmtliche Summenreihen in weitester Bedeutung (§. 121) und die Reihe $1^x+2^x+3^x+4^x\ldots+n^x$. Aus der für Sa_n gefundenen Formel geht hervor, daß die Summe der n ersten Glieder aus einer Progression der x^{ten} Ordnung dargestellt wird durch einen Ausdruck, der die verschiedenen Potenzen von n bis n^x enthalten muß.

§. 127. Aufgaben.

I. Es soll die Summe der n ersten Pentagonalzahlen angegeben werden.

Auflös. Man bilde zuerst die Differenzenreihen:

1 5 12 22 35
4 7 10 13
3 3 3

Hieraus folgt $S=n+4.n_{(2)}+3.n_{(3)}=\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$.

II. Es soll die Summe der n ersten Quadratzahlen angegeben werden.

Auflös. Die Differenzenreihen sind:

1 4 9 16 25
3 5 7 9
2 2 2

Hieraus folgt $S=n+3.n_{(2)}+2.n_{(3)}=\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$.

III. Es soll die Summe der n ersten Kubikzahlen angegeben werden.

Auflös. Die Differenzenreihen sind:

1 8 27 64 125
7 19 37 61
12 18 24
6 6

Hieraus folgt $S=n+7.n_{(2)}+12.n_{(3)}+6.n_{(4)}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$.

IV. Es soll die Anzahl der Kugeln berechnet werden, welche zu einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet sind und in n Reihen übereinander liegen.

Auflös. In den aufeinanderfolgenden Schichten ist die Anzahl der Kugeln, wenn man von der Spitze beginnt:

1; 1+2; 1+2+3; 1+2+3+4; u. s. w.
oder 1; 3; 6; 10; u. s. w. (Triagonalzahlen).

Hieraus folgt $S=(n+2)_{(3)}$ (nach §. 119).

V. Es soll die Anzahl der Kugeln berechnet werden, welche zu einer vierseitigen Pyramide mit quadratischem Querschnitt aufgeschichtet sind und in n Schichten übereinander liegen.

Auflös. Die Anzahl der Kugeln in den einzelnen Schichten ist:

1; 4; 9; 16; 25.....

daher $S=\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$ (nach II).

VI. Es soll die Anzahl der Kugeln berechnet werden, welche in n Schichten übereinander liegen, von denen jede die Form eines Rechtecks hat, wenn zugleich in der obersten Schicht a+1 Kugeln in einer Reihe nebeneinander liegen.

Auflös. Die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten ist:

a+1; 2(a+2); 3(a+3); 4(a+4); u. s. w., daher

$S=(a+2a+3a+...+na)+(1+2^2+3^2+...+n^2)=$

$=\frac{(a+na)n}{2}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n^3}{3}+(a+1)\frac{n^2}{2}+(3a+1)\frac{n}{6}$.

VII. Es soll die Summe der n ersten Glieder folgender Reihe:

$a, bx, cx^2, dx^3, ex^4, ...$

wobei a, b, c, d, e,..... die aufeinanderfolgenden Glieder ein und derselben höhern Progression sind, angegeben werden.

Auflös. 1) Sind alle Coefficienten = 1, so ist $S=(x^n-1):(x-1)$ (§. 44).

2) Sind a, b, c, d,....=1, 2, 3, 4,...., so ist

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+....+nx^{n-1}$$

$$x.S=\quad x+2x^2+3x^3+....+(n-1)x^{n-1}+nx^n,$$

also $x.S-S=nx^n-\{1+x+x^2+x^3+....+x^{n-1}\}=nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}$,

$$S=\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)(x-1)}.$$

3) Sind a, b, c, d,....=1, 3, 6, 10...., so ist

$$S=1+3x+6x^2+....+(n+1)_{(2)}x^{n-1}$$

$$x.S=\quad x+3x^2+....+n_{(2)}x^{n-1}+(n+1)_{(2)}x^n,$$

also $xS-S=(n+1)_{(2)}x^n-\{1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}\}=$

$$=(n+1)_{(2)}x^n-\left\{\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)(x-1)}\right\}$$

und $$S=\frac{1}{x-1}\left\{(n+1)_{(2)}x^n-\frac{nx^n}{x-1}+\frac{x^n-1}{(x-1)(x-1)}\right\}.$$

In ähnlicher Weise wird die Aufgabe gelöst, wenn a, b, c, d.... einer anderen Summenreihe angehören.

Zehntes Capitel.

Von den höheren Gleichungen.

§. 128. Erklärung.

Eine höhere Gleichung enthält, wenn sie geordnet ist, die unbekannte Größe mindestens in der 3ten Potenz. Ihre allgemeine Form ist:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a_n=0.$$

Sie ist in diesem Falle vom nten Grade und wird kürzer durch $X_n=0$ bezeichnet. Sämmtliche Ausdrücke, welche, an Stelle von x gesetzt, der Gleichung genügen, heißen Wurzeln derselben. Jede Gleichung hat mindestens eine Wurzel. Die Coefficienten der Gleichung können reell und imaginär sein, doch wird in den folgenden §§. stets vorausgesetzt, daß sie reell sind.

A. Allgemeine Eigenschaften der höheren Gleichungen.

§. 129. Lehrsätze.

1) Ist α eine Wurzel der Gleichung $X_n=0$, so ist X_n durch α theilbar.

Bew. Dividirt man mit $x-\alpha$ in X_n, bis der Rest P kein x mehr enthält, so ist:

$$X_n-(x-\alpha)X_{n-1}=P.$$

In dieser Gleichung werden sowohl X_n wie auch $(x-\alpha)X_{n-1}$ zu Null, wenn $x=\alpha$ gesetzt wird; daher ist auch $P=0$, folglich

$$X_n=(x-\alpha)X_{n-1}.$$

2) Eine Gleichung vom n^{ten} Grade hat n Wurzeln.

Bew. Die gegebene Gleichung $X_n=0$ hat eine Wurzel. Wird diese mit α_1 bezeichnet, so ist nach 1)

$$X_n=(x-\alpha_1)X_{n-1}=0.$$

Nun kann sowohl $x-\alpha_1$, wie auch X_{n-1} gleich Null sein. Ist Letzteres der Fall, so folgt aus $X_{n-1}=0$, daß diese Gleichung ebenfalls mindestens eine Wurzel α_2 haben müsse. Deßhalb ist:

$$X_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)X_{n-2}.$$

Entwickelt man in dieser Art weiter, so erhält man schließlich:

$$X_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n),$$

und es sind daher α_1, α_2, α_3, ... α_n die n Wurzeln obiger Gleichung, weil jedesmal $X_n=0$ ist, sobald x einer jener Wurzeln gleichgesetzt wird.

Anm. Diese Wurzeln brauchen nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein. — Es kann X_n außer diesen nicht noch eine Wurzel haben, denn wäre β eine solche, so müßte X_n durch $x-\beta$ theilbar sein; dies aber ist nur möglich, wenn $x-\beta$ gleich einem der Faktoren $(x-\alpha_\nu)$, also $\beta=\alpha_\nu$ ist.

3) Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n,$$

so ist a_1 gleich der Summe der Wurzeln, a_2 gleich der Summe der aus ihnen gebildeten Amben (ohne Wiederholungen und Versetzungen), a_3 gleich der Summe der Ternen u. s. w., a_n gleich dem Produkte der Wurzeln, jedoch unter der Voraussetzung, daß auf die Vorzeichen von a_1, a_2 u. s. w. keine Rücksicht genommen wird.

Bew. Er folgt aus 2) und aus §. 61.

4) Sind alle Coefficienten einer Gleichung ganze Zahlen, so sind alle Wurzeln unter den Faktoren enthalten, in welche sich das letzte Glied zerlegen läßt, oder die Gleichung hat auch irrationale Wurzeln.

Bew. Er folgt aus 3).

5) Wenn der Ausdruck X_n einen positiven Werth annimmt, sobald man $x=\alpha$ setzt, hingegen einen negativen, sobald man $x=\beta$ setzt, so liegt eine Wurzel der Gleichung zwischen α und β.

Bew. Er ergiebt sich unmittelbar.

6) Jede Gleichung vom $(2n+1)^{ten}$ Grade muß mindestens eine reelle Wurzel haben, deren Vorzeichen dem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist.

Bew. Es läßt sich leicht für x ein solcher Werth α einsetzen, daß dadurch das erste Glied größer wird als alle übrigen zusammen. Setzt man also $x=\alpha$, so wird dadurch X_{2n+1} positiv, setzt man $x=-a$, so wird X_{2n+1} negativ. Setzt man ferner $x=0$, so wird X_{2n+1} positiv oder negativ, je nachdem das letzte Glied es ist. Ist dieses positiv, so muß eine Wurzel zwischen 0 und $-\alpha$, ist es negativ, zwischen 0 und $+\alpha$ liegen.

7) Jede Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens eine positive und eine negative Wurzel.

Bew. Für $x=0$ wird $X_{2n}=-c$ (dem letzten Gliede). Ferner bekommt X_{2n} einen positiven Werth, wenn man $x=\mp d$ setzt, wobei d eine sehr große Zahl bedeutet. Es liegt daher eine Wurzel zwischen 0 und $+d$, eine andere zwischen 0 und $-d$.

8) Jede Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade hat eine gerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Bew. Hat man eine ungerade Anzahl von Wurzeln gefunden, z. B. α, β, γ, so läßt sich X_{2n} dividiren durch $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ und man erhält alsdann $X_{2n-3}=0$. Diese Gleichung hat aber nach 2) mindestens eine reelle Wurzel.

9) Jede Gleichung vom $(2n+1)^{ten}$ Grade hat eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Bew. Er folgt aus 8).

10) Die imaginären Wurzeln kommen stets paarweise vor. Ist die eine $p+qi$, so ist die andere $p-qi$.

Bew. Ist $p+qi$ eine Wurzel der Gleichung, und setzt man diesen Werth statt x ein, so läßt sich die Gleichung so ordnen, daß sie aus einem reellen und einem imaginären Theile besteht. Man erhält also

$$M+Ni=0.$$

In diesem Falle ist aber $M=0$ und $N=0$, folglich auch

$$M-Ni=0.$$

Da man nun letztere Form $M-Ni$ erhalten haben würde, wenn man $x=p-qi$ gesetzt hätte, so muß $p-qi$ eine Wurzel der Gleichung sein.

B. Transformation der Gleichungen.

§. 130. Erklärung.

Die Auflösung einer Gleichung kann oft dadurch erleichtert werden, daß man dieselbe in eine andere verwandelt, deren Wurzeln in bestimmter Art von den Wurzeln des erstern abhängig sind, und dann diese letztere Gleichung löst. Dergleichen Transformationen lassen sich auf wenige Fälle zurückführen.

§. 131. Aufgaben.

I. Die Gleichung $X_n=0$ soll so transformirt werden, daß die Potenz x^{n-1} in ihr nicht mehr vorkommt.

Auflös. Ist $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$, so setze man $x=z+r$ und ordne nach z. Man erhält:

$$\begin{aligned}0&=(z+r)^n+a_1(z+r)^{n-1}+\cdots\\&=z^n+nrz^{n-1}+n_{(2)}r^2z^{n-2}+\cdots\\&\quad+a_1z^{n-1}+(n-1)a_1rz^{n-2}+\cdots\end{aligned}$$

Nur die beiden angeführten Glieder können die Potenz z^{n-1} enthalten, und diese muß daher verschwinden, wenn $nr+a_1=0$, oder

$$r=-\frac{a_1}{n},\ \text{also}\ x=\left(z-\frac{a_1}{n}\right)\ \text{ist.}$$

Anm. In der so reducirten Gleichung ist die Summe der Wurzeln gleich 0.

II. Die Gleichung $X_n=0$ soll in eine andere Gleichung verwandelt werden, deren Wurzeln um p größer oder kleiner sind, als die der erstern.

Auflös. Man setzt $x=y\mp p$ und ordnet nach y. Das erste Glied ist y^n, das letzte ist $(\mp p)^n+a_1(\mp p)^{n-1}+a_2(\mp p)^{n-2}+\cdots+a^n$.

III. Die Gleichung $X_n=0$ soll in eine andere Gleichung verwandelt werden, deren Wurzeln pmal kleiner sind.

Auflöſ. Man ſetzt $x=py$. Dadurch erhält man die Gleichung:

$$p^n y^n + a_1 p^{n-1} y^{n-1} + a_2 p^{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \text{ oder}$$

$$y^n + \frac{a_1}{p} y^{n-1} + \frac{a_2}{p^2} y^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} = 0.$$

IV. Die Gleichung $X_n=0$ ſoll in eine andere Gleichung verwandelt werden, deren Wurzeln pmal größer ſind.

Auflöſ. Man ſetzt $x=(y:p)$. Dadurch erhält man die Gleichung:

$$\frac{y^n}{p^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{p^{n-1}} + \cdots + a_n = 0_1, \text{ oder}$$

$$y^n + a_1 p y^{n-1} + a_2 p^2 y^{n-2} + \cdots + a_n p^n = 0.$$

Anm. Mit Hülfe dieſer Transformation ſchafft man aus einer Gleichung die Nenner weg; p muß alsdann gleich dem Generalnenner ſein. Hat man z. B. die Gleichung $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3 = 0$, ſo ſetzt man $x=(y:30)$ und erhält:

$$y^5 + 40y^4 + 360y^3 + 13500y^2 + 4050000y + 72900000 = 0.$$

§. 132. Erklärung.

Eine beſondere Art der Transformation erlauben die reciproken Gleichungen. Bei dieſen haben die Coefficienten der gleichweit vom erſten und letzten Gliede abſtehenden Glieder gleiche Größe und gleiches Vorzeichen, und ſie ſelbſt ſind vom $2n^{ten}$ Grade. Reciprok ſind z. B. die Gleichungen:

1) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$;

2) $x^6 - 4x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 1 = 0$;

3) $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0$.

Ferner rechnet man zu den reciproken Gleichungen noch diejenigen, die durch Multiplication der Gleichung 3) mit $x \mp 1$ entſtehen. Sie haben alsdann die Form:

1) $x^{2n+1} + b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + 1 = 0$, oder

2) $x^{2n+1} + b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-2} + \cdots - b_2 x^2 - b_1 x - 1 = 0$.

Da aber erſtere Gleichung die Wurzel -1, letztere die Wurzel $+1$ hat, und man daher durch Diviſion mit $x \mp 1$ die frühere Form leicht herſtellen kann, ſo iſt nur dieſe als eigenthümlich hervorzuheben.

Bei jeder reciproken Gleichung des $2n^{ten}$ Grades muß neben einer Wurzel α auch die Wurzel $\frac{1}{\alpha}$ vorkommen, da nur in dieſem Falle das Produkt aller Wurzeln gleich 1 (dem letzten Gliede) ſein kann bei gleichzeitiger Uebereinſtimmung von je 2 Coefficienten.

Anm. Diese Eigenschaft läßt sich dadurch nachweisen, daß man einmal $x=\alpha$ setzt und dann durch α^{2n} dividirt, ferner aber $x=\frac{1}{\alpha}$; in beiden Fällen erhält man denselben Ausdruck, und $\frac{1}{\alpha}$ ist daher eine Wurzel.

§. 133. Lehrsatz.

Jede reciproke Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade läßt sich auf eine Gleichung des n^{ten} Grades reduciren.

Bew. Es ist $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+1=0$.

Dividirt man mit x^n, so ist ferner:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_2\frac{1}{x^{n-2}}+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=0.$$

Addirt man in dieser Gleichung das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. Glied, so ist:

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+a_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\cdots+a_n=0.$$

Setzt man nun $x+\frac{1}{x}=y$, so ist:

1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$; daher $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$;

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=y^3$; „ $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}=y^4$; „ $x^4+\frac{1}{x^4}=$

$=y^4-4y^2+2$.

Fährt man in dieser Entwicklung fort und setzt die gefundenen Werthe in obiger Gleichung ein, so erhält man:

$$y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}+\cdots+c_n=0.$$

Ist α eine Wurzel dieser Gleichung, so ist ferner:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)=\alpha \text{ oder } x^2-\alpha x=1, \text{ daher}$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\alpha\mp\sqrt{4+\alpha^2}\right).$$

Durch die angeführte Transformation geht z. B. die Gleichung

$x^8-5x^7+4x^6-2x^5+3x^4-2x^3+4x^2-5x+1=0$ über in:

$$y^4-5y^3+13y-3=0.$$

§. 134. Erklärung.

Hat man zwei höhere Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y, so eliminirt man x auf folgende Art.

Die beiden Gleichungen seien:

$$1)\quad x^m+a_1x^{m-1}+\ldots\ldots+a_m=0,$$

$$2)\quad x^n+b_1x^{n-1}+\ldots\ldots+b_n=0.$$

Es sei hierbei $m>n$, und y sei in den verschiedenen Coefficienten a und b enthalten.

Multiplicirt man 2) mit x^{m-n} und subtrahirt 2) von 1), so erhält man eine neue Gleichung vom $m-1^{ten}$ Grade. Aus dieser und aus 2) bildet man in derselben Art eine neue Gleichung vom $m-2^{ten}$ Grade und fährt damit so lange fort, bis man eine Gleichung vom n^{ten} Grade erhält. Man hat alsdann:

$$3)\quad x^n+c_1x^{n-1}+\ldots\ldots+c_n=0,$$

$$4)\quad x^n+b_1x^{n-1}+\ldots\ldots+b_n=0.$$

Subtrahirt man 4) von 3), so erhält man eine Gleichung vom $n-1^{ten}$ Grade. Multiplicirt man ferner 3) mit b_n, 4) mit c_n und subtrahirt 4) von 3), so ist die neue Gleichung, nachdem man sie mit x gekürzt hat, ebenfalls vom $n-1^{ten}$ Grade. Die zwei Gleichungen vom $n-1^{ten}$ Grade behandelt man nun ebenso wie 3) und 4), und gelangt so endlich zu einer Gleichung, die nur noch Potenzen von y enthält. So erhält man aus:

$$1)\quad x^3+3y^4x+2=0 \quad \text{und} \quad 2)\quad x^2+3yx+1=0,$$

wenn man 2) mit x multiplicirt und dann von 1) subtrahirt,

$$3)\quad -3yx^2+(3y^4-1)x+2=0.$$

Multiplicirt man nun 2) mit $-3y$ und subtrahirt alsdann 3), so ist

$$4)\quad x(3y^4+9y^2-1)+3y+2=0.$$

Multiplicirt man 2) mit 2 und subtrahirt 3), so ist, wenn man noch mit x dividirt,

$$5)\quad x(2+3y)+6y+1-3y^4=0.$$

Aus 4) und 5) erhält man aber schließlich:

$$9y^8+27y^6-18y^5-6y^4-54y^3+18y+5=0.$$

C. Auflösung der höhern Gleichungen.

§. 135. Aufgabe.

Es soll die reine cubische Gleichung $x^3-a^3=0$ gelöst werden.

Aufl. Es ergiebt sich augenblicklich, daß a eine Wurzel dieser Gleichung sein muß. Um die beiden andern Wurzeln zu finden, setzt man:

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)=0 \text{ (§. 129, 1).}$$

Der Faktor x^2+ax+a^2 hat den Werth 0, wenn $x=$

$$=\frac{1}{2}\left(-a\mp\sqrt{-3a^2}\right)=a.\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2} \text{ ist.}$$

Die drei Werthe von x sind also: $a;\ a.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};$

$$a.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Anm. Setzt man hierin a=1, so stellen die drei entstehenden Ausdrücke die drei Werthe von $\sqrt[3]{1}$ vor. Man kann daher die Auflösung voriger Gleichung auch darstellen durch die Gleichung $x=a.\sqrt[3]{1}$, wobei a eindeutig, $\sqrt[3]{1}$ dreideutig genommen wird.

§. 136. Aufgabe.

Es soll die reducirte cubische Gleichung $x^3+px+q=0$ gelöst werden.

Auflös. Setzt man $x=v+w$, so erhält man

$$(v+w)^3+p(v+w)+q=0, \text{ oder}$$

$$v^3+3v^2w+3vw^2+w^3+p(v+w)+q=0, \text{ oder}$$

$$1)\quad v^3+w^3+(3vw+p)(v+w)=0.$$

Da nun v und w nur in soweit bestimmt sind, als $v+w=x$ sein muß, so kann man sie in der Art wählen, daß $3vw+p=0$, also $v=(-p):3w$ ist. Alsdann geht die Gleichung 1) über in:

$$\frac{-p^3}{27w^3}+w^3+q=0 \text{ oder}$$

$$w^6+q.w^3=\frac{1}{27}p^3.$$

Hieraus folgt $w^3=-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$,

$$2)\quad w=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Es ist nun noch v zu bestimmen. Nun war

$$v^3=\frac{-p^3}{27w^3}=\frac{-\frac{1}{27}p^3}{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{27}p^3\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)}{\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{27}p^3\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)}{-\frac{1}{27}p^3}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},$$

daher 3) $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, und

$$4)\quad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Diese Formel heißt die Cardanische. Sie liefert für die Gleichung nur eine Wurzel, nämlich $v+w$, wo v und w die absoluten Wurzelwerthe obiger dritten Wurzeln vorstellen. Die übrigen zwei findet man wie in §. 135, indem man mit $x-(v+w)$ die Gleichung $x^3+px+q=0$ dividirt und aus der dadurch entstehenden quadratischen Gleichung die zwei andern Werthe von x bestimmt.

Anm. 1. Man kann diese Werthe auch in folgender Art finden: Es sind v und w die absoluten Werthe der bezüglichen Wurzeln. Die vollständigen Werthe sind:

$$v.(+1);\ v.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad v.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

$$w.(+1);\ w.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad w.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Da nun die Werthe von v und w so beschaffen sein müssen, daß $3vw=-p$, also gleich einer reellen Zahl ist, so sind die angeführten Werthe nur in folgenden drei Arten zu der Summe $v+w=x$ zu verbinden:

$$1)\ (v+w);\quad 2)\ v.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+w.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

$$3)\ v.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+w.\frac{-1+\sqrt{+3}}{2}.$$

Anm. 2. In derselben Art löst man die vollständige cubische Gleichung $ax^3+bx^2+cx+d=0$, da das Glied bx^2 nach §. 131, 1, leicht weggeschafft werden kann.

§. 137. Zusatz.

Die Cardanische Formel erscheint unbrauchbar, wenn p negativ und $\frac{1}{27}p^3>\frac{1}{4}q^2$ ist, da man alsdann die allgemeine Form:

$$\sqrt[3]{m+ni}+\sqrt[3]{m-ni},$$

den sogenannten irreductiblen Fall jener Formel erhält. Setzt man indeß $m=r\cos v$ und $n=r\sin v$, so ist:

$$\sqrt[3]{m+ni}+\sqrt[3]{m-ni}=\sqrt[3]{r}\left\{(\cos v+i\sin v)^{\frac{1}{3}}+(\cos v-i\sin v)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$

$$=\sqrt[3]{r}\left\{\cos\frac{v}{3}+i\sin\frac{v}{3}+\cos\frac{v}{3}-i\sin\frac{v}{3}\right\}\ (\text{§. 111})=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{v}{3}.$$

Dieser Werth ist reell, enthält aber die zwei noch näher zu bestimmenden Größen r und v. Aus $m=r\cos v$ und $n=r\sin v$ folgt nun $m^2+n^2=r^2$ oder $r=\sqrt{m^2+n^2}$. Ferner ist $\cos v=\frac{m}{r}$, $\sin v=\frac{n}{r}$, folglich $\operatorname{tg} v=\frac{n}{m}$. Man nimmt r hierbei positiv und setzt das negative Vorzeichen, welches bei m stehen könnte zu $\cos v$. Von dem Vorzeichen ist alsdann der Quadrant abhängig, in welchem v liegen muß.

§. 138. Erklärung.

Die biquadratischen Gleichungen lassen ebenfalls eine allgemeine Auflösung zu, in Folge dessen auch die reciproken Gleichungen bis zum 9ten Grade (§§. 132 und 133), während die übrigen Gleichungen vom 5ten Grade an nicht mehr allgemein zu lösen sind. Da indeß die Formel, welche als Lösung der biquadratischen Gleichungen erhalten wird, sehr wenig bequem ist, so wendet man auch bei diesen Gleichungen dasselbe Verfahren an, wie bei denen höhern Grades. Diese sind nämlich zwar nicht mehr zu lösen, wenn die Coefficienten allgemeine Ausdrücke sind, wohl aber, wenn dieselben als reelle Zahlen gegeben werden, was in der Praxis stets der Fall zu sein pflegt.

§. 139. Erklärung.

Ist eine Gleichung höheren Grades mit reellen Zahlencoefficienten gegeben, so schafft man zunächst die Nenner weg (nach §. 131, IV). Hat nun die so transformirte Gleichung rationale Wurzeln, so müssen dieselben zugleich Faktoren des letzten Gliedes sein. Man sucht deshalb sämmtliche Faktoren desselben und findet durch Probiren diejenigen, welche der Gleichung genügen. In der Gleichung $x^4+18x^3-274x+255=0$ sind die Faktoren des letzten Gliedes: 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, und durch Probiren findet man, daß die Werthe 1 und 3 der Gleichung genügen. Dividirt man nun die Gleichung durch $(x-1)(x-3)$, so erhält man die neue Gleichung $x^2+22x+85=0$, und aus dieser ergeben sich noch die zwei übrigen Wurzeln -5 und -17.

Anm. Ist das letzte Glied sehr groß und hat dasselbe viele Faktoren, so daß man also viele Versuche machen müßte, um die Wurzeln zu finden, so kürzt man die Rechnung in folgender Art ab. Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^4-40x^3+595x^2-3900x+9504=0.$$

Setzt man $x=y+a$ und ordnet nach y, so erhält man als letztes Glied: $(a^4-40a^3+595a^2-3900a+9504)$. Die Faktoren dieses Gliedes können Wurzeln der transformirten Gleichung sein und sind dann um a kleiner als die Wurzeln der ersten Gleichung. Man giebt nun a einen solchen Werth, daß dieses letzte Glied klein wird; in dem angegebenen Beispiele setzt man $a=10$, wodurch das letzte Glied den Werth 4 erhält. Die Faktoren dieses Gliedes sind ∓1, ∓2, ∓4, und die einzigen Werthe von x, welche der ursprünglichen Gleichung genügen könnten, sind daher 10 ∓ 1, 10 ∓ 2, 10 ∓ 4, oder 11, 9, 12, 8, 14, 6. Durch Versuche findet man, daß 12, 11, 8, 9 der Gleichung genügen.

§. 140. Erklärung.

Größere Schwierigkeit macht das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.

Um diese zu finden, setzt man für x die Werthe $+1, +2, +3, \ldots$ und $-1, -2, -3, \ldots$ ein. Sobald die Werthe von X_n beim Einsetzen von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen verschiedene Vorzeichen haben, so hat man die Gränzen gefunden, zwischen welchen eine der Wurzeln liegen muß. Sind nun z. B. 5 und 6 diese Gränzen, so setzt man für x nach und nach die Werthe 5,1; 5,2; ... 5,9 und findet wiederum durch den Zeichenwechsel die engeren Gränzen, und sind dies z. B. 5, 3 und 5, 4, so kann man durch Einsetzen von 5,31; 5,32; ... 5,39 dieselben noch genauer erhalten. Schneller aber findet man die spätern Decimalstellen durch folgendes Verfahren.

Liegt x zwischen 5,3 und 5,4, so ist $x = 5{,}3 + y$, wo y eine kleine Zahl bedeutet. Setzt man nun in der Gleichung $X_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ statt x den Werth $5{,}3 + y$ oder $b + y$ und ordnet nach y, so erhält man:

$$X_n = y^0(b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \ldots + a_n) +$$
$$+ y^1[nb^{n-1} + (n-1)a_1 b^{n-2} + (n-2)a_2 b^{n-3} + \ldots] +$$
$$+ y^2 . A + y^3 . B + \ldots,$$

oder $X_n = C + C_1 y + C_2 y^2 + \ldots\ldots$

Ist nun y sehr klein, so können für vorliegenden Fall die Glieder $C_2 y^2$, $C_3 y^3$ u. s. w. vernachlässigt werden und es bleibt also:

$$X_n = C + C_1 y = 0.$$

Die Größe von C erhält man, wenn man in der ursprünglichen Gleichung $x = b$ setzt, die Größe von C_1, wenn man von jedem der Binome $(b+y)^n$, $a_1(b+y)^{n-1}$, $a_2(b+y)^{n-2}$ u. s. w. das zweite Glied bestimmt. Dies zweite Glied ist z. B. von dem Binom $a_6(b+y)^6$ gleich $6a_6 b^5 y$, und man findet also obigen Ausdruck C_1, wenn man jedes Glied von C mit seinem Exponenten multiplicirt und dann den Exponenten um 1 verkleinert.

Sind auf diese Art C und C_1 bestimmt worden, so erhält man aus der Gleichung $C + C_1 y = 0$ die Größe von y durch die Gleichung

$$y = \frac{-C}{C_1}.$$

Ist z. B. $x^3 - 3x + 1{,}6 = 0$, so findet man durch Probiren:

$$x = 0{,}6 + y.$$

Nun ist $C = b^3 - 3b + 1{,}6 = (0{,}6)^3 - 3(0{,}6) + 1{,}6 = 0{,}016$;

$C_1 = 3b^2 - 3 = 3(0{,}6)^2 - 3 = -1{,}92$;

daher $y = (-C) : C_1 = (-0{,}016) : (-1{,}92) = 0{,}0083 \ldots$

und $x = 0{,}6083 \ldots$

Will man den Werth von x noch genauer haben, so setzt man wiederum $x=0{,}6083+y$ und verfährt wie oben.

Hat man auf diese Art eine Wurzel gefunden, so sucht man die Gränzen für eine zweite Wurzel, indem man fortfährt, in der ursprünglichen Gleichung für x die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen einzusetzen.

Anm. 1. Um nicht beim Einsetzen der Werthe 1, 2, 3... für x dieses Verfahren unnütze Weise zu lange fortzusetzen, ist es vortheilhaft, gewisse Gränzen aufzusuchen, über welche hinaus überhaupt keine Wurzel der Gleichung mehr möglich ist. Um diese Gränzen zu finden, transformirt man die Gleichung $x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ folgendermaßen. Man setzt:

1) $x^n=1+(x^n-1)=1+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)$,

2) $x^{n-1}=1+(x^{n-1}-1)=1+(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)$,

und entwickelt in derselben Art alle übrigen Glieder mit positiven Coefficienten, läßt aber die andern ungeändert. Alsdann ordnet man nach x. Die weitere Ausführung mag an einem bestimmten Beispiele gezeigt werden.

Ist $a_0x^6+a_1x^5-a_2x^4+a_3x^3-a_4x^2-a_5x-a_6=0$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
a_0x^6&=a_0(x-1)x^5+a_0(x-1)x^4+a_0(x-1)x^3+a_0(x-1)x^2+a_0(x-1)x+a_0(x-1)+a_0\\
a_1x^5&=\quad +a_1(x-1)x^4+a_1(x-1)x^3+a_1(x-1)x^2+a_1(x-1)x+a_1(x-1)+a_1\\
-a_2x^4&=\quad -\quad a_2x^4\\
a_3x^3&=\qquad\qquad\qquad\qquad +a_3(x-1)x^2+a_3(x-1)x+a_3(x-1)+a_3\\
-a_4x^2-\ldots&=\qquad\qquad\qquad\qquad -\quad a_4x^2-\quad a_5x\quad -a_6
\end{aligned}$$

Setzt man nun in der so transformirten Gleichung für x die aufeinanderfolgenden positiven Zahlen ein, so kann X_n nur so lange einen negativen Werth haben, als

1) $(a_0+a_1)(x-1)<a_2$ oder $x<\frac{a_2}{a_0+a_1}+1$, ferner

2) $(a_0+a_1+a_3)(x-1)<a_4$ „ $x<\frac{a_4}{a_0+a_1+a_3}+1$, ferner

3) $(a_0+a_1+a_3)(x-1)<a_5$ „ $x<\frac{a_5}{a_0+a_1+a_3}+1$, ferner

4) $(a_0+a_1+a_3)(x-1)<a_6$ „ $x<\frac{a_6}{a_0+a_1+a_3}+1$

ist. Dividirt man also jeden negativen Coefficienten durch die Summe der voranstehenden positiven und addirt 1 zu diesem Quotienten, so ist der größte dieser Ausdrücke die Gränze, über welche hinaus X_n nur positiv sein kann, so daß also hierdurch auch die Gränze für die positiven Wurzeln gegeben ist. Diese erhält man daher, wenn man den größten negativen Coefficienten durch die Summe der voranstehenden positiven Coefficienten dividirt und zu diesem Quotienten 1 addirt.

Um die Gränze für die negativen Wurzeln zu finden, verwandelt man die gegebene Gleichung durch Umänderung der Vorzeichen aller Glieder mit ungeraden Exponenten in eine andere, deren Wurzeln dieselben sind, wie die der ersten Gleichung, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die Gränze der positiven Wurzeln für die zweite Gleichung ist dann zugleich die Gränze der negativen Wurzeln für die erste Gleichung.

Anm. 2. Die Bestimmung der imaginären Wurzeln einer Gleichung ist ebenfalls möglich, wird aber der Schwierigkeit wegen hier übergangen.

Aufgaben.

Es sollen folgende höhere Gleichungen nach x gelöst werden.

1) $x^3 - 12x - 16 = 0$; 2) $x^3 - 3x - 2 = 0$;

3) $x^3 + 12x + 63 = 0$; 4) $x^3 + 4\frac{1}{4}x^2 - 9\frac{7}{8}x + 3\frac{3}{4} = 0$;

5) $x^3 - 3\frac{5}{6}x^2 + 2\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$; 6) $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{12} = 0$;

7) $x^4 - x^3 - 49x^2 - 71x + 120 = 0$;

8) $x^4 - 19x^3 + 105x^2 - 197x + 110 = 0$;

9) $x^4 - 4\frac{3}{4}x^3 + 6\frac{1}{8}x^2 - 2\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} = 0$;

10) $x^4 - 15x^4 + 75x^2 - 143x + 90 = 0$;

11) $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0$;

12) $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$.

Auflösungen.

1) $x = 4; -2; -2$; 2) $x = +2; -1 \mp \sqrt{2}$;

3) $x = -3; \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{-75})$; 4) $x = \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -6$;

5) $x = 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$; 6) $x = \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\sqrt{5}; -\frac{1}{2}\sqrt{5}$;

7) $x = 1; -3; -5; 8$; 8) $x = 1; 2; 5; 11$;

9) $x = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1; 3$; 10) $x = 2; 5; 4 \mp \sqrt{7}$;

11) $x = 1; -1; 2; 3; 4$; 12) $x = 3; 3; -3; \mp\sqrt{-1}$.

Elemente

der

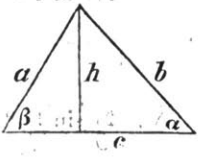
ebenen Trigonometrie.

Einleitung.

In der Planimetrie wird gezeigt, wie man aus mehreren gegebenen Stücken eines Dreiecks die noch fehlenden durch eine Construction finden und auch die Maaßzahlen derſelben mit Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßſtabes beſtimmen könne. Eine weitere Aufgabe iſt nun, die Maaßzahlen der unbekannten Stücke aus denen der bekannten durch bloße Rechnung zu finden. Zur Löſung dieſer Aufgabe iſt es jedoch zunächſt nöthig nachzuweiſen, in welcher Art die Seiten und Winkel eines Dreiecks von einander abhängig ſind, und dazu gelangt man durch folgende Betrachtung.

Es ſeien a, b, c die Seiten eines Dreiecks, α und β zwei Winkel deſſelben, h die zu c gehörige Höhe. Dann iſt:

Fig. 1.

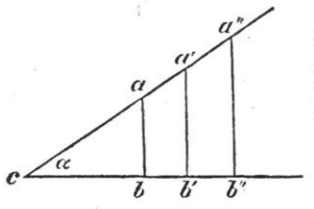


$$a : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{h}{b} : \frac{h}{a}.$$

Dieſe Gleichung, die zunächſt identiſch iſt, bekommt eine beſondere Bedeutung dadurch, daß die Größe der Quotienten (h : b) und (h : a) nur von der Größe der Winkel β und α abhängig iſt.

Stehen nämlich (Fig. 2) die Linien ab, a'b', a''b'' ſenkrecht auf cb'', ſo iſt:

Fig. 2.



$$ab : ac = a'b' : a'c = a''b'' : a''c,$$

und dieſe Quotienten haben alſo ein und denſelben Werth, der nur von dem Winkel α, nicht von der Lage der Punkte a, a', a'' abhängig iſt.

In obigem Dreieck (Fig. 1) können alſo die Quotienten (h : b) und (h : a) gefunden werden, ohne daß man das ganze Dreieck kennt, wenn nur die Winkel α und β gegeben ſind, und in allen einander ähnlichen Dreiecken müſſen daher dieſelben Quotienten erhalten werden.

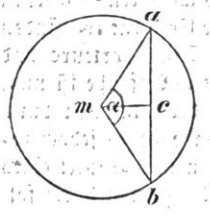
Bezeichnet man den Quotienten h : b, der nur von α abhängig iſt, durch $\sin \alpha$ (Sinus α), ebenſo den Quotienten h : a durch $\sin \beta$, ſo iſt die Abhängigkeit der Seiten und Winkel von einander ausgedrückt durch die Gleichung

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

deren Brauchbarkeit allerdings davon abhängt, ob es möglich iſt, die Sinus aller Winkel zu berechnen.

Einige derſelben ſind ſchon in der Planimetrie beſtimmt worden.

Fig. 3.



Iſt nämlich für den beſtimmten Centriwinkel α die Größe der zugehörigen Sehne ab bekannt, und zwar in Form des Ausdrucks pr, wo r den Radius, p einen Zahlenfaktor bedeutet, ſo iſt:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = ac : am = \frac{1}{2} pr : r = \frac{1}{2} p.$$

Auf dieſe Art findet man (vergl. Planimetrie Cap. XIII.)

1) $\sin 18^0 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$, weil zum Centriwinkel 36^0 die Sehne $\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) r$ gehört;

2) $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$;

3) $\sin 36^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$;

4) $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

5) $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aus dieſen Zahlen laſſen ſich mit Hülfe geometriſcher Sätze noch viele andere berechnen, aber beſſer und vollſtändiger findet man die Sinus, wenn man vorher unterſucht, welche Eigenſchaften ihnen zukommen.

Dieſe Unterſuchungen bilden den Inhalt der analytiſchen Trigonometrie oder der Goniometrie, die Berechnung der unbekannten Stücke eines Dreiecks aus den bekannten den Inhalt der angewandten Trigonometrie.

A. Analytiſche Trigonometrie.

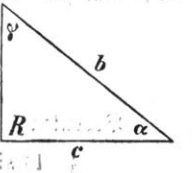
Erſtes Capitel.

Von den Sinus und Coſinus der ſpitzen Winkel.

§. 1. Erklärung.

Iſt a, b, c ein rechtwinkliges Dreieck, ſo verſteht man unter sin α (Sinus α) das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberliegenden Cathete a zur Hypothenuſe b, unter cos α (Coſinus α) das Verhältniß der dem Winkel a anliegenden Cathete zur Hypothenuſe. Daher iſt:

Fig. 4.



$$\sin\alpha = \frac{a}{b};\quad \cos\alpha = \frac{c}{b};$$

ferner $\sin\gamma = \frac{c}{b};\quad \cos\gamma = \frac{a}{b}.$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\sin\alpha = \cos\gamma,$$

oder, da $\gamma = R - \alpha$ iſt,

$$\sin\alpha = \cos(R - \alpha),$$
$$\sin(45 + x) = \cos(45 - x),$$

d. h. der Sinus eines beliebigen ſpitzen Winkels iſt gleich dem Coſinus ſeines Complements.

Außerdem folgen die Sätze:

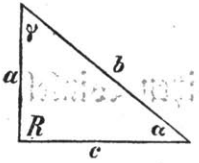
$$a = b\sin\alpha; \quad c = b\sin\gamma.$$

Anm. Aus der gegebenen Erklärung folgt, daß die Sinus und Coſinus der ſpitzen Winkel ächte Brüche ſind und nur einen Werth haben, ferner daß bei wachſendem Winkel die Sinus ebenfalls wachſen, die Coſinus abnehmen.

§. 2. Lehrſätze.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;*)
2) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$;
3) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

Fig. 5.



Bew. zu 1). Es iſt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = 1.$$

Bew. zu 2) und 3). Dieſelben folgen aus 1).

Anm. Sind die Sinus der Winkel bis zu 45° bekannt, alſo nach 3. dieſes §. auch die Coſinus derſelben, ſo ſind letztere zugleich die Werthe der Sinus für die ſpitzen Winkel, welche größer als 45° ſind (nach §. 1), und dieſe brauchen daher nicht weiter berechnet zu werden.

§. 3. Lehrſätze.

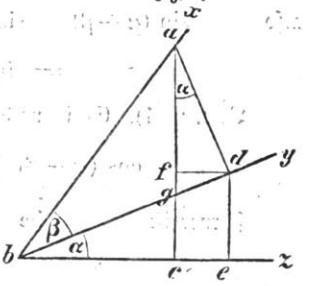
Bedeuten α, β, $(\alpha+\beta)$ und $(\alpha-\beta)$ ſpitze Winkel, ſo iſt:

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
3) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

*) $\sin^2\alpha$ iſt die kürzere Schreibart für $(\sin\alpha)^2$, $\cos^2\alpha$ für $(\cos\alpha)^2$.

Bew. zu 1). Iſt Winkel xby $= \beta$, ybz $= \alpha$, alſo xbz $= (\alpha + \beta)$, ſo nehme man in der Linie bx den beliebigen Punkt a, ziehe ad ſenkrecht auf by, ac und de ſenkrecht auf bz; ferner ziehe man df ſenkrecht auf ac und bezeichne den Winkel gad wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke bgc und agd durch α. Dann iſt

Fig. 6.



$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{ac}{ab} = \frac{de}{ab} + \frac{af}{ab}.$$

Ferner iſt $de = \sin\alpha \cdot bd$,

$af = \cos\alpha \cdot ad$,

alſo $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \frac{bd}{ab} + \cos\alpha \cdot \frac{ad}{ab}$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

Bew. zu 2). Es iſt nach Fig. 6.

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{bc}{ab} = \frac{be}{ab} - \frac{fd}{ab}.$$

Ferner iſt $be = \cos\alpha \cdot bd$

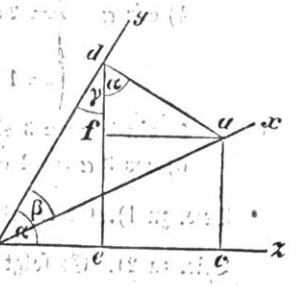
$fd = \sin\alpha \cdot ad$,

daher $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \frac{bd}{ab} - \sin\alpha \cdot \frac{ad}{ab}$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$

Bew. zu 3). Iſt Winkel xby $= \beta$, ybz $= \alpha$, alſo xbz $= \alpha - \beta$, ſo nehme man wiederum den beliebigen Punkt a in der Linie bx, ziehe ad ſenkrecht auf by, ac und de ſenkrecht auf bz, af ſenkrecht auf de. Alsdann iſt Winkel fda $= \alpha$, weil fda und dbe Complemente von γ ſind. Nun iſt:

Fig. 7.



$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{ac}{ab} = \frac{de}{ab} - \frac{df}{ab}.$$

Ferner iſt $de = \sin\alpha \cdot bd$

$df = \cos\alpha \cdot ad$,

also $$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \frac{bd}{ab} - \cos\alpha \cdot \frac{ad}{ab}$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Bew. zu 4). Es ist nach Fig. 7.

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{bc}{ab} = \frac{be}{ab} + \frac{fa}{ab}.$$

Ferner ist $$be = \cos\alpha \cdot bd,$$
$$fa = \sin\alpha \cdot ad,$$

also $$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \frac{bd}{ab} + \sin\alpha \cdot \frac{ad}{ab}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Anm. Die Sätze 2) und 4) lassen sich auch aus 1) und 3) ableiten nach §. 2, ferner die Sätze 2) und 3 nach dem ptolemäischen Lehrsatze.

§. 4. Lehrsätze.

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

2) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$

3) $\cos 2\alpha \begin{cases} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \\ = 2\cos^2\alpha - 1; \\ = 1 - 2\sin^2\alpha; \end{cases}$

4) $\cos\alpha \begin{cases} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}; \\ = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1; \\ = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \end{cases}$

5) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

6) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

Bew. zu 1). Es ergiebt sich, wenn man in 1) des §. 3. $\beta=\alpha$ setzt.

Bew. zu 2). Es folgt aus 1), wenn man $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ setzt.

Bew. zu 3). Es ist $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (nach 2 des §. 3, wenn man $\beta = \alpha$ setzt).

Ferner ist $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, aber auch $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Bew. zu 4). Es folgt aus 3).

Bew. zu 5). Es ist

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Bew. zu 6). Er wird in ähnlicher Art geführt, wie der Beweis zu 5).

§. 5. Lehrsätze.

1) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$;

3) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}$;

4) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$;

5) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$;

6) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$.

Bew. zu 1) und 2). Folgen aus 3) des §. 4.

Bew. zu 3). Es ist

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = 1 + \sin 2\alpha;$$ daher ist

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}.$$

Bew. zu 4). Er wird geführt, wie der Beweis zu 3).

Bew. zu 5) und 6). Sie folgen aus 3) und 4).

§. 6. Zusatz.

Die bisher entwickelten Formeln, besonders 5) und 6) des §. 5. und 1—4) des §. 3. geben ein Mittel, um aus wenigen bekannten Sinus die Sinus und Cosinus aller spitzen Winkel zu finden. Aus $\sin 30^0$ erhält man nach 5) des §. 5. die Sinus von 15^0, $7\frac{1}{2}{}^0$, $3\frac{3}{4}{}^0$ u. s. w.; aus $\sin 36^0$ die Sinus von 18^0, 9^0, $4\frac{1}{2}{}^0$, $2\frac{1}{4}{}^0$ u. s. w.; aus den Sinus und Cosinus der Winkel 18^0 und 15^0 erhält man $\sin 3^0$; aus $\sin 3^0$ erhält man $\sin 1^0$ durch Auflösung der Gleichung $\sin 3^0 = 3 \cdot \sin 1^0 - 4 (\sin 1^0)^3$ (nach §. 4., 5.) u. s. w.

Ein bequemeres Mittel zur Berechnung der Sinus und Cosinus bieten jedoch die unendlichen Reihen. Ist nämlich die Größe eines Winkels nicht in Graden gegeben, sondern durch das Bogenmaaß x ausgedrückt, so ist (Arithm. II. §. 110.):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Anm. Mit Hülfe dieser Reihen sind die Sinus und Cosinus der spitzen Winkel berechnet. In den Tafeln findet man jedoch nicht die Sinus und Cosinus selbst, sondern ihre Logarithmen, und da letztere für ächte Brüche negativ sein müssen, so ist zur Bequemlichkeit der Rechnung zu jedem die Zahl 10 hinzuaddirt, welche bei weiterer Rechnung wieder zu subtrahiren ist. Wenn z. B. $\log \sin x = -0{,}3567822$ ist, so findet man in der Tafel die Zahl $9{,}6432177 = -0{,}3567822 + 10$, und man hat daher bei Benutzung derselben zu schreiben: $\log x = 9{,}6432177 - 10$.

§. 7. Lehrsätze.

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = +2 \sin\alpha \cos\beta$;
2) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = +2 \cos\alpha \sin\beta$;
3) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = +2 \cos\alpha \cos\beta$;
4) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$.

Die Beweise ergeben sich aus §. 3.

Bezeichnet man in diesen vier Formeln $(\alpha+\beta)$ durch x, $(\alpha-\beta)$ durch y, also α durch $\frac{1}{2}(x+y)$, β durch $\frac{1}{2}(x-y)$, so nehmen sie folgende Gestalt an, die besonders für das Rechnen mit Logarithmen von Wichtigkeit ist:

5) $\sin x + \sin y = +2 \sin\frac{1}{2}(x+y) \cos\frac{1}{2}(x-y)$;
6) $\sin x - \sin y = +2 \cos\frac{1}{2}(x+y) \sin\frac{1}{2}(x-y)$;

7) $\cos x + \cos y = + 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$;

8) $\cos x - \cos y = - 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y)$.

Anm. zu 8). Die Differenz $\cos x - \cos y$ muß einen negativen Werth liefern, weil x den größern der beiden Winkel bezeichnet.

Zweites Capitel.

Von den Sinus und Cosinus beliebiger Summen und Differenzen von Winkeln.

§. 8. Erklärung.

Unter der Voraussetzung, daß α und β spitze Winkel sind, sollen von jetzt an

$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ durch $\sin (\alpha + \beta)$,

$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ durch $\cos (\alpha + \beta)$

bezeichnet werden. Ist $(\alpha+\beta)$ kleiner als R, so ergiebt sich die Richtigkeit dieser Abkürzung aus §. 3, und es bedeuten $\sin (\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ den Sinus oder Cosinus des Winkels $(\alpha+\beta)$; ist aber $(\alpha+\beta)$ kein spitzer Winkel, so haben $\sin (\alpha+\beta)$ und $\cos (\alpha+\beta)$ zunächst nur die Bedeutung von Abkürzungen für obige Ausdrücke, und es ist die in §. 1 gegebene Erklärung von Sinus und Cosinus auf sie nicht weiter anwendbar.

Nach der gegebenen Erklärung ist nun z. B.:

1) $\sin 50^0 \cos 60^0 + \cos 50^0 \sin 60^0 = \sin 110^0$; aber auch

2) $\sin 80^0 \cos 30^0 + \cos 80^0 \sin 30^0 = \sin 110^0$.

Hieraus ergiebt sich, daß zwei verschiedene Ausdrücke dieselbe Abkürzung haben können, und es ist daher nachzuweisen, daß diese äußerlich verschiedenen Ausdrücke doch einander gleich sind, daß also z. B. $\sin 110^0$ immer denselben Werth bezeichne, in welche Summanden man auch die Zahl 110 zerlegen möge.

§. 9. Lehrsätze.

Die Ausdrücke $\sin x$ und $\cos x$, in welchen x einen rechten oder einen stumpfen Winkel bezeichnet, haben jeder nur einen Werth, in welche spitzen Winkel man auch x zerlegen möge, und zwar ist:

1) $\sin R = 1$; 2) $\cos R = 0$;

3) $\sin x = \sin(2R-x)$; 4) $\cos x = -\cos(2R-x)$.

Beweis zu 1) und 2). Setzt man $R = (\alpha+\beta)$, wo α und β beliebige spitze Winkel bedeuten, so ist, da man $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$ setzen kann:

a) $\sin R = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha = 1$;

b) $\cos R = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$.

Beweis zu 3) und 4). Setzt man $x = (\alpha+\beta)$, wo α und β spitze Winkel bedeuten, so ist, da man $\sin\alpha = \cos(R-\alpha)$, $\cos\alpha = \sin(R-\alpha)$, $\sin\beta = \cos(R-\beta)$, $\cos\beta = \sin(R-\beta)$ setzen kann:

c) $\sin x = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \cos(R-\alpha)\sin(R-\beta) + \sin(R-\alpha)\cos(R-\beta) = \sin[(R-\alpha)+(R-\beta)] = \sin[2R-(\alpha+\beta)] = \sin(2R-x)$;

d) $\cos x = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sin(R-\alpha)\sin(R-\beta) - \cos(R-\alpha)\cos(R-\beta) = -\cos[(R-\alpha)+(R-\beta)] = -\cos[2R-(\alpha+\beta)] = -\cos(2R-x)$.

§. 10. Zusatz.

Die Lehrsätze 3) und 4) des §. 9 bleiben auch noch dann richtig, wenn man den stumpfen Winkel x nicht in zwei spitze Winkel zerlegt, sondern in einen rechten und einen spitzen, oder in einen stumpfen und einen spitzen; auch dann ist:

1) $\sin x = \sin(2R-x)$; 2) $\cos x = -\cos(2R-x)$.

Beweis zu 1). Setzt man $x = (R+\beta)$, wo β einen spitzen Winkel bedeutet, so ist:

$\sin x = \sin(R+\beta) = \sin R\cos\beta + \cos R\sin\beta = \cos\beta = \sin(R-\beta) = \sin(2R-x)$.

Setzt man ferner $x = (\alpha+\gamma)$, wo α einen stumpfen Winkel bedeutet, so ist:

$\sin x = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \sin(2R-\alpha)\cos\gamma - \cos(2R-\alpha)\sin\gamma = \sin[(2R-\alpha)-\gamma] = \sin[2R-(\alpha+\gamma)] = \sin(2R-x)$.

Beweis zu 2). Er wird ebenso geführt.

Es ergiebt sich also aus §§. 9 und 10, daß die Sinus und Cosinus der stumpfen Winkel, d. h. die in §. 8 erklärten Abkürzungen, dieselben Werthe haben, wie die Sinus und Cosinus ihrer (spitzen) Supplemente, nur daß bei den Cosinus das Vorzeichen verschieden ist. Aus $\sin 30^0 = 0{,}5$ folgt $\sin 150^0 = 0{,}5$, und aus $\cos 60^0 = 0{,}5$ folgt $\cos 120^0 = -0{,}5$.

§. 11. Erklärung.

Ist $(x+y)$ mindestens gleich 2R, aber kleiner als 4R, und bezeichnet man wiederum

$\sin x \cos y + \cos x \sin y$ durch $\sin(x+y)$,

$\cos x \cos y - \sin x \sin y$ durch $\cos(x+y)$,

so läßt sich in derselben Art nachweisen, daß auch diese Abkürzungen nur einen Werth haben. Es ergeben sich alsdann folgende Sätze:

1) $\sin 2R = 0$; 2) $\cos 2R = -1$;

ferner, wenn z einen erhabenen Winkel bedeutet,

3) $\sin z = -\sin(4R-z)$; 4) $\cos z = \cos(4R-z)$.

Die Sinus und Cosinus von erhabenen Winkeln sind also gleich den Sinus und Cosinus derjenigen Winkel, welche jene zu 4R ergänzen, nur daß bei den Sinus das Vorzeichen verschieden ist.

§. 12. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt sich Folgendes:

1) Die Formeln

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

und $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

sind gültig für jeden Werth von $(x+y)$, der zwischen 0 und 4R liegt.

2) Die Werthe der Sinus und Cosinus wiederholen sich, jedoch mit wechselnden Vorzeichen, in den vier Quadranten, d. h. in den Zwischenräumen von 0 bis R, R bis 2R, 2R bis 3R, 3R bis 4R. Ist nämlich x ein spitzer Winkel, so ist (nach §. 10)

$$\sin x = \sin(2R-x);$$

ferner ist aber (nach §. 11)

$\sin x = -\sin(4R-x)$; $\sin(2R-x) = -\sin(2R+x)$,

also $\sin x = \sin(2R-x) = -\sin(2R+x) = -\sin(4R-x)$.

Die Sinus sind daher in den beiden ersten Quadranten positiv, in den beiden letzten hingegen negativ.

Für die Cosinus ergiebt sich (nach §. 10)

$$\cos x = -\cos(2R-x);$$

ferner aber (nach §. 11)

$\cos x = \cos(4R-x)$; $-\cos(2R-x) = -\cos(2R+x)$,

also $\cos x = -\cos(2R-x) = -\cos(2R+x) = \cos(4R-x)$.

Die Cosinus sind demnach im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

3) Die Werthe der Sinus und Cosinus nehmen stetig ab und zu zwischen den Gränzwerthen +1 und −1. Bestimmte Gränzen sind:

$$\sin R = +1; \quad \sin 2R = 0; \quad \sin 3R = -1;$$
$$\cos R = 0; \quad \cos 2R = -1; \quad \cos 3R = 0;$$

4) Für jeden Werth von x, der zwischen 0 und 4 R liegt, ist

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Für den ersten Quadranten ist die Gleichung richtig, und da in den folgenden Quadranten dieselben Werthe für die Sinus und Cosinus wiederkehren, die negativen Vorzeichen aber beim Quadriren verschwinden, so ist sie auch für die folgenden Quadranten richtig.

§. 13. Zusatz.

Aus den Sinus und Cosinus der erhabenen Winkel lassen sich durch dieselbe Art der Entwicklung, wie sie in den vorigen §§. angewendet worden ist, die Sinus und Cosinus von Winkeln ableiten, welche größer als 4 R sind. Man gelangt dabei zu folgenden zwei Gleichungen, in welchen x einen Winkel bedeutet, der kleiner als 4 R ist:

1) $\sin x = \sin(4R + x) = \sin(8R + x) = \sin(4nR + x)$;

2) $\cos x = \cos(4R + x) = \cos(8R + x) = \cos(4nR + x)$;

ferner zu den Gränzwerthen:

3) $\sin 4R = 0$; $\sin 5R = 1$; $\sin 6R = 0$; $\sin 7R = -1$; $\sin 8R = 0$ ꝛc.

4) $\cos 4R = 1$; $\cos 5R = 0$; $\cos 6R = -1$; $\cos 7R = 0$; $\cos 8R = 1$ ꝛc.

Es wiederholen sich also die in den vier ersten Quadranten für die Sinus und Cosinus gefundenen Werthe in je vier der folgenden Quadranten, und das in §. 12 Gesagte gilt daher für Winkel der beliebigsten Größe.

§. 14. Zusatz.

Die für spitze Winkel entwickelten Sätze

1) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$, und

2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

gelten auch dann noch, wenn α und β beliebige Größe haben, jedoch $\alpha > \beta$ ist.

Bew. zu 1). Ist $\alpha < 4R$, so setzt man $\sin\alpha = -\sin(4R - \alpha)$, $\cos\alpha = \cos(4R - \alpha)$. Dann ist:

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = -\sin(4R - \alpha)\cos\beta - \cos(4R - \alpha)\sin\beta =$$
$$= -\sin[(4R - \alpha) + \beta] = -\sin[4R - (\alpha - \beta)] = \sin(\alpha - \beta).$$

Ist $\alpha > 4R$, so setzt man $\sin\alpha = -\sin(8R - \alpha)$, oder $\sin\alpha = -(12R - \alpha)$ u. s. w. und verfährt dann ebenso.

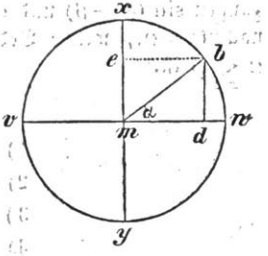
Bew. zu 2). Er wird in derselben Art geführt, wie der Bew. zu 1).

§. 15. Zuſatz.

Die in dieſem Capitel entwickelten Sätze laſſen ſich auch geometriſch veranſchaulichen, ſo daß die Sinus und Coſinus der beliebigſten Winkel eine geometriſche Bedeutung erhalten.

Es ſeien xmy und vmw zwei ſenkrecht auf einander ſtehende Durchmeſſer, und mb ſei ein beweglich gedachter Radius, der Art, daß b zunächſt auf w liege und dann zu öfteren Malen in der Richtung wbx die Peripherie durchlaufe. Alsdann giebt der Winkel α, den bm mit wm bildet, an, wie weit b in der Bewegung vorgeſchritten ſei, und kann alſo, wenn die Drehung eine unaufhörliche iſt, jede beliebige Größe erreichen. Iſt z. B. $\alpha = 370^0$, ſo hat b ſchon einmal die Peripherie durchlaufen und bildet bei der zweiten Umdrehung den Winkel 10^0 mit der Linie mw. Hat nun b die in der Figur angegebene Lage, ſo iſt $\sin\alpha = (\text{bd} : \text{bm})$ und $\cos\alpha = (\text{dm} : \text{bm}) = (\text{be} : \text{bm})$. Setzt man ferner den Radius gleich 1, ſo iſt $\sin\alpha = \text{bd}$, $\cos\alpha = \text{be}$, d. h. es ſind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gleich den Maaßzahlen der Linien bd und be, wenn die Maaßzahl des Radius gleich 1 iſt. Es bezeichnet alsdann $\sin\alpha$ die Entfernung des Punktes b von vmw, $\cos\alpha$ die Entfernung deſſelben von xmy. Denkt man ſich nun bm in ſtetiger Bewegung, ſo erhält man folgende Reſultate:

Fig. 8.



Iſt $\alpha = 0$, ſo liegt b auf w, und es iſt $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Mit wachſendem α wachſen die Sinus, während die Coſinus abnehmen, bis endlich, ſobald b auf x liegt, $\sin\text{R} = \text{xm} = 1$, $\cos\text{R} = 0$ wird. Nennt man nun xmw den erſten, xmv den zweiten, vmy den dritten, ymw den vierten Quadranten, ſo ergiebt ſich aus der Figur, daß die Werthe, welche die Sinus und Coſinus im erſten Quadranten haben, in den übrigen Quadranten ſich wiederholen müſſen, daß aber in Bezug auf die Lage ein Unterſchied ſtattfindet. Es liegen nämlich die Sinus im erſten und zweiten Quadranten oberhalb vmw, im dritten und vierten unterhalb deſſelben; die Coſinus liegen im erſten und vierten Quadranten rechts von xmy, im zweiten und dritten links davon. Bezeichnet man nun die entgegengeſetzte Lage durch entgegengeſetztes Vorzeichen, ſo ſind die Sinus poſitiv im erſten und zweiten Quadranten, die Coſinus im erſten und vierten.

Bei einer zweiten und fernern Umdrehung von bm, wo alſo α größer wird als 4R, müſſen ſich die in den vier erſten Quadranten gefundenen Werthe in derſelben Reihenfolge wiederholen.

§. 16. Erklärung.

Es sollen von jetzt an die Ausdrücke

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \text{ und}$$
$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

in welchen α und β Winkel **beliebiger** Größe sind, durch die Abkürzungen $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ bezeichnet werden. Es ist alsdann nachzuweisen, welche Bedeutung diesen Abkürzungen zukomme, wenn $\alpha \leqq \beta$ ist.

§. 17. Lehrsätze.

1) $\sin 0 = 0$;
2) $\cos 0 = 1$;
3) $\sin(-x) = -\sin x$;
4) $\cos(-x) = \cos x$.

Bew. zu 1). Es ist $\sin 0 = \sin(\alpha-\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0$.

Bew. zu 2). Es ist $\cos 0 = \cos(\alpha-\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = 1$.

Bew. zu 3). Ist $(-x) = (\alpha-\beta)$, daher $x = (\beta-\alpha)$, so erhält man:

$$\sin(-x) = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta =$$
$$= -(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = -\sin(\beta-\alpha) = -\sin x.$$

Bew. zu 4). Es ist $\cos(-x) = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$
$$= \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos(\beta-\alpha) = \cos x.$$

Anm. Auch diese Sätze lassen sich geometrisch veranschaulichen. Aus Fig. 8. folgt unmittelbar, daß $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ist. Versteht man ferner unter Winkel $(-x)$ denjenigen, der durch Drehung von bm nicht in der früher angenommenen Richtung wbx, sondern in der entgegengesetzten Richtung wy entsteht, so liegen $\sin(-x)$ und $\sin x$ auf entgegengesetzten Seiten von vmw, haben also entgegengesetztes Vorzeichen, während $\cos(-x)$ und $\cos x$ auf derselben Seite von xmy liegen und daher auch dasselbe Vorzeichen haben.

§. 18. Lehrsätze.

Sind x und y Differenzen **beliebiger** Winkel, so gelten immer noch folgende Sätze:

1) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$;
2) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$;
3) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$;
4) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$;
5) $\sin x = \cos(R-x)$ oder $\sin(45^0+y) = \cos(45^0-y)$;
6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bew. zu 1). Ist x positiv, y negativ und gleich $(-\beta)$, wo β positiv ist, so erhält man:

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x\cos(-\beta)+\cos x\sin(-\beta)=$$
$$=\sin x\cos\beta-\cos x\sin\beta=\sin(x-\beta)=\sin(x+y).$$

Ist $x=(-\alpha)$, $y=(-\beta)$, so erhält man:

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(-\alpha)\cos(-\beta)+\cos(-\alpha)\sin(-\beta)=$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=\sin(-\alpha-\beta)=\sin(x+y).$$

Ist einer der beiden Summanden gleich 0, z. B. y, so erhält man:

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x.1+\cos x.0=\sin x=\sin(x+y).$$

Bew. zu 2—4). Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

Bew. zu 5). Es ist $\cos(R-x)=\cos R\cos x+\sin R.\sin x=\sin x$.

Bew. zu 6). Setzt man $x=(\alpha-\beta)$, wo α und β positiv sind, so ist:

$$\sin^2 x=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2=$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta;$$
$$\cos^2 x=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta;$$

daher ist $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$
$$=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1.$$

§. 19. Zusatz.

Da aus den sechs Formeln des vorigen §. alle Formeln des ersten Capitels abgeleitet werden, so sind diese also **allgemein** gültig, d. h. gültig für Differenzen **beliebiger** Winkel.

§. 20. Lehrsätze.

Ist $x+y+z=2R$, so gelten folgende Formeln:

1) $\begin{cases}\sin x=\sin(y+z);\\ \sin y=\sin(x+z);\\ \sin z=\sin(x+y);\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x=-\cos(y+z);\\ \cos y=-\cos(x+z);\\ \cos z=-\cos(x+y);\end{cases}$

3) $\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}z;$

4) $\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y\sin\frac{1}{2}z.$

Bew. zu 1) u. 2). Sie folgen aus §. 9. und §. 19.

Bew. zu 3). Es ist $\sin z=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ daher

$\sin x + \sin y + \sin z = \sin x(1+\cos y) + \sin y(1+\cos x) =$
$= 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x \cdot 2\cos^2\frac{1}{2}y + 2\sin\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}y \cdot 2\cos^2\frac{1}{2}x =$
$= 4\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y(\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y + \cos\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y) =$
$= 4\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y\sin\frac{1}{2}(x+y) = 4\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}z.$

Bew. zu 4). Es ist $\cos z = -\cos(x+y) = -\cos x\cos y + \sin x\sin y$, daher $\cos x + \cos y + \cos z = \cos x(1-\cos y) + \cos y + \sin x\sin y =$
$= [1-2\sin^2\frac{1}{2}x] \cdot 2\sin^2\frac{1}{2}y + [1-2\sin^2\frac{1}{2}y] + 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x \cdot 2\sin\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}y =$
$= 1 + 4\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y(\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y] =$
$= 1 + 4\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}(x+y) = 1 + 4\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}y\sin\frac{1}{2}z.$

Drittes Capitel.

Von den Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten.

§. 21. Erklärung.

Ist α ein allgemeiner Ausdruck, d. h. eine Differenz beliebiger Winkel, so bezeichnet man:

1) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ durch $\operatorname{tg}\alpha$ (Tangente von α);

2) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ „ $\operatorname{ctg}\alpha$ (Cotangente von α);

3) $\frac{1}{\cos\alpha}$ „ $\sec\alpha$ (Secante von α);

4) $\frac{1}{\sin\alpha}$ „ $\operatorname{cosec}\alpha$ (Cosecante von α).

Die Werthe, welche diese Ausdrücke (Funktionen) bei wachsendem α erhalten, ergeben sich leicht, wenn man die früher für die Sinus und Cosinus gefundenen Werthe einsetzt. Man findet:

1) Die Tangenten und Cotangenten sind positiv im ersten und dritten Quadranten, weil in diesen die Sinus und Cosinus gleiche Vorzeichen haben. Sie nehmen stetig ab und zu. Die Gränzwerthe, zwischen welchen sie ab und zunehmen, sind:

$\operatorname{tg} 0 = 0$; $\operatorname{tg} R = \frac{1}{0}$; $\operatorname{tg} 2R = 0$; $\operatorname{tg} 3R = -\frac{1}{0}$; $\operatorname{tg} 4R = 0$;

$\operatorname{ctg} 0 = \frac{1}{0}$; $\operatorname{ctg} R = 0$; $\operatorname{ctg} 2R = -\frac{1}{0}$; $\operatorname{ctg} 3R = 0$; $\operatorname{ctg} 4R = \frac{1}{0}$.

Zwischen den Gränzwerthen 0 und $\frac{1}{0}$ durchlaufen die Tangenten und Cotangenten alle möglichen endlichen Werthe. Der Ausdruck $\frac{1}{0}$ ist keinem endlichen Ausdrucke gleich, und wenn also z. B. $\operatorname{tg} R = \frac{1}{0}$ ist, so bedeutet dies, daß es für den rechten Winkel keine Tangente von endlicher Größe gebe.

2) Die Cosecanten haben dieselben Vorzeichen wie die Sinus, die Secanten wie die Cosinus. Die Gränzwerthe, zwischen welchen sie ab- und zunehmen, sind:

$\sec 0 = 1$; $\sec R = \frac{1}{0}$; $\sec 2R = -1$; $\sec 3R = \frac{1}{0}$; $\sec 4R = 1$;

$\operatorname{cosec} 0 = \frac{1}{0}$; $\operatorname{cosec} R = 1$; $\operatorname{cosec} 2R = \frac{1}{0}$; $\operatorname{cosec} 3R = -1$; $\operatorname{cosec} 4R = \frac{1}{0}$.

Sie durchlaufen ebenfalls alle möglichen endlichen Werthe.

3) Die Werthe und Vorzeichen, welche für die vier ersten Quadranten gefunden werden, wiederholen sich in je vier der folgenden.

4) Für negative Ausdrücke gelten die Formeln:

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$; $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$; $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$.

§. 22. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(R - \alpha)$;

2) $\sec\alpha = \operatorname{cosec}(R - \alpha)$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 1 : \operatorname{ctg}\alpha$;

4) $\begin{cases} \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \\ \sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha; \\ \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}. \end{cases}$

Bew. zu 1—3). Sie ergeben sich aus der Erklärung des §. 21. und aus §. 19.

Bew. zu 4). Es ist $\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$.

Bew. zu 5). Er wird ebenso geführt.

§. 23. Zusatz.

Aus jeder der sechs trigonometrischen Funktionen ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$) lassen sich die übrigen fünf berechnen.

1) Ist $\sin\alpha$ gegeben, so ist $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ erhält man aber die übrigen Funktionen unmittelbar.

2) Ist $\cos\alpha$ gegeben, so ist $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$; das Uebrige wie bei 1).

3) Ist $\operatorname{tg}\alpha$ gegeben, so ist $\sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (nach §. 22, 4).

Ferner ist $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

4) Ist $\operatorname{ctg}\alpha$ gegeben, so ist $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ (nach §. 22.).

Ferner ist $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$; $\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

5) Ist $\sec\alpha$ gegeben, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$;

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha-1}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$.

Ist $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$;

$\sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$.

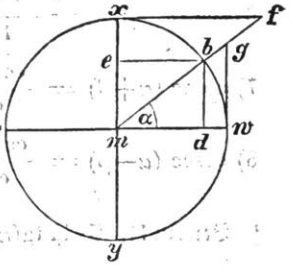
Anm. Die hier vorkommenden Wurzeln können beide Vorzeichen haben, weil die jedesmalige gegebene Funktion zweien Quadranten angehören kann. Ist z. B. $\sin\alpha = 0{,}8$ gegeben, so kann α im ersten oder zweiten Quadranten liegen; es müssen daher die übrigen Funktionen, mit Ausnahme der Cosecanten, positiv oder negativ sein können, je nachdem sie dem ersten oder zweiten Quadranten angehören sollen.

§. 24. Zuſatz.

Das bisher Geſagte läßt ſich auch geometriſch veranſchaulichen und es läßt ſich dabei auch der Grund für die gewählten Bezeichnungen ableiten.

Es gelte in Fig. 9. für die Linien xmy, vmw, bd, dm und bm das in §. 15. Geſagte. Errichtet man nun auf w, dem Endpunkte des einen Schenkels von α, eine Senkrechte und verlängert dieſelbe, bis ſie in g von der Verlängerung des andern Schenkels mb geſchnitten wird, ſo iſt gw die Tangente von α, gm die Secante von α (in geometriſchem Sinne). Ebenſo iſt fx die Tangente, fm die Secante des Winkels $(R-\alpha)$, oder jenes die Cotangente, dieſes die Coſecante von α.

Fig. 9.



Die Maaßzahlen dieſer Linien entſprechen, wenn der Radius gleich 1 iſt, den in §. 21. gegebenen Erklärungen. Es iſt nämlich:

1) $gw : mw = bd : md$ oder $gw : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha$ oder $gw = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $gm : wm = bm : dm$ „ $gm : 1 = 1 : \cos\alpha$ „ $gm = \sec\alpha$.

Ebenſo iſt $fx = \operatorname{tg}(R-\alpha)$; $fm = \sec(R-\alpha)$ oder

$fx = \operatorname{ctg}\alpha$; $fm = \operatorname{cosec}\alpha$.

Bewegt ſich nun bm von wm aus ſtetig durch die aufeinander folgenden Quadranten, ſo erhält man die in §. 21. abgeleiteten Reſultate.

Anm. Nennt man gw die geometriſche, $\operatorname{tg}\alpha$ die trigonometriſche Tangente von α, ſo iſt alſo die trigonometriſche Tangente gleich der Maaßzahl der geometriſchen, ſobald der Radius gleich 1 iſt; wenn dies nicht der Fall iſt, ſo erhält man die Maaßzahl der geometriſchen durch Multipliciren der trigonometriſchen Tangente mit der Maaßzahl des Radius. Daſſelbe gilt von den übrigen Funktionen.

§. 25. Lehrſätze.

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta-1}$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta+1}$;

3) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$;

4) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;

5) $\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta-1}$;

6) $\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta+1}$;

7) $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$;

8) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$.

Bew. zu 1). Es ist $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$.

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Dividirt man hingegen Zähler und Nenner durch $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, so erhält man $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta-1}$.

Der Beweis zu 2) wird ebenso geführt.

Die Beweise zu 3) und 4) folgen daraus, daß $\operatorname{ctg}(\alpha \mp \beta) = 1 : \operatorname{tg}(\alpha \mp \beta)$ ist.

Bew. zu 5). Es ist $\sec(\alpha+\beta) = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$.

Je nachdem man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, oder durch $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ dividirt, erhält man als Resultat entweder

$$\frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}, \text{ oder } \frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta-1}.$$

Der Beweis zu 6) wird ebenso geführt.

Bew. zu 7). Es ist $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.

Je nachdem man Zähler und Nenner durch $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, oder durch $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ dividirt, erhält man als Resultat entweder

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ oder } \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Der Beweis zu 8) wird ebenso geführt.

§. 26. Lehrsätze.

$$1)\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1};$$

$$2)\ \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$3)\ \sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1};$$

$$4)\ \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sec^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Die Beweise folgen unmittelbar aus den Formeln des vorigen §., wenn man in denselben $\beta = \alpha$ setzt.

§. 27. Lehrsätze.

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$2)\ \operatorname{ctg}\alpha \mp \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \mp \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta};$$

$$3)\ \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta};$$

$$4)\ \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Bew. zu 1). Es ist $\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \mp \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

Die Beweise zu 2), 3), 4) werden in derselben Art geführt.

§. 28. Lehrsätze.

$$1)\ \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)};$$

$$2)\ \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

3) $\frac{\sin\alpha \mp \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$;

4) $\frac{\sin\alpha \mp \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$.

Bew. zu 1). Es ist $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ (nach §. 7.) $=$

$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Die übrigen Beweise werden in derselben Art mit Hülfe der Formeln 5, 6, 7, 8 des §. 7. geführt.

§. 29. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \operatorname{ctg}(45^0 \pm \alpha)$;

2) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{1 \mp \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \sin 2\alpha}$.

Der Beweis zu 1) folgt aus §. 22, 1.

Bew. zu 2). Es ist $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\sin 45^0.\cos\alpha \mp \cos 45^0.\sin\alpha}{\cos 45^0.\cos\alpha \pm \sin 45^0.\sin\alpha} =$

$= \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$, weil $\sin 45^0 = \cos 45^0$ ist.

Bew. zu 3). Er folgt aus 2), wenn man Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$ durch $\cos\alpha$ dividirt.

Bew. zu 4). Es ist $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha} =$

$= \frac{(\cos\alpha \mp \sin\alpha)(\cos\alpha \mp \sin\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \mp 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$

$= \frac{1 \mp \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Bew. zu 5). Er wird geführt, wie der Beweis zu 4); nur multiplicirt man Zähler und Nenner nicht mit $(\cos\alpha \mp \sin\alpha)$, sondern mit $(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$.

§. 30. Lehrsätze.

Ist $\alpha+\beta+\gamma=2R$, so ergeben sich folgende Sätze:

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma$.

Bew. zu 1). Es ist $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma[-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma.$$

Bew. zu 2). Es ist $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\alpha)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\beta)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\gamma)$.

Da nun $(R-\frac{1}{2}\alpha)+(R-\frac{1}{2}\beta)+(R-\frac{1}{2}\gamma) = 3R-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=2R$ ist, so ist der Lehrsatz 1) anwendbar, und es ergiebt sich also:

$\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\alpha)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\beta)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\gamma) = \operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\alpha).\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\beta).\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}\gamma)$,

oder $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma$.

B. Angewandte Trigonometrie.

Viertes Capitel.

Von den einfachen trigonometriſchen Aufgaben.

§. 31. Lehrſatz.

Sind a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denſelben gegenüberliegenden Winkel, ſo iſt:

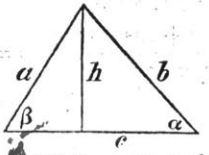
1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$;
2) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$;
3) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$.

Bew. zu 1). Einer der beiden Winkel α und β muß ſpitz ſein; es ſei dies α. Die zu c gehörende Höhe werde durch h bezeichnet. Dann iſt ſtets:

$$a : b = \frac{h}{b} : \frac{h}{a}.$$

Iſt nun β ſpitz, ſo iſt (Fig. 10.):

Fig. 10.



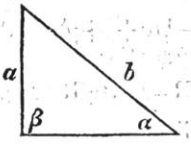
$$\frac{h}{b} = \sin\alpha;$$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta;$$

$$\text{alſo } a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Iſt $\beta = R$, daher $h = a$, ſo iſt (Fig. 11.):

Fig. 11.



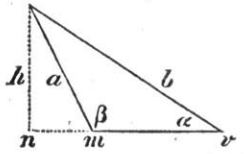
$$\frac{h}{b} = \frac{a}{b} = \sin\alpha;$$

$$\frac{h}{a} = \frac{a}{a} = 1 = \sin R = \sin\beta;$$

$$\text{alſo } a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Iſt β ein ſtumpfer Winkel, ſo iſt (Fig. 12.):

Fig. 12.



$$\frac{h}{b} = \sin\alpha;$$

$$\frac{h}{a} = \sin(2R-\beta) = \sin\beta;$$

$$\text{alſo } a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Die Beweiſe zu 2) und 3) werden ebenſo geführt.

In jedem Dreiecke verhalten ſich alſo je zwei Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Daraus folgen noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot \sin\beta &= b \cdot \sin\alpha; \\ a \cdot \sin\gamma &= c \cdot \sin\alpha; \\ b \cdot \sin\gamma &= c \cdot \sin\beta. \end{aligned}\right|$$

§. 32. Lehrſatz.

Sind a, b, c die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denſelben gegenüberliegenden Winkel, ſo iſt

$$\left.\begin{aligned} &1)\ a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = c; \\ &2)\ a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha = b; \\ &3)\ b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta = a. \end{aligned}\right|$$

Bew. zu 1). Einer der beiden Winkel α und β muß ſpitz ſein; es ſei dies α. Die zu c gehörende Höhe ſei h.

Iſt β ſpitz (Fig. 13.), ſo iſt:

Fig. 13.

$$a \cdot \cos\beta = mn;$$
$$b \cdot \cos\alpha = vn;$$

alſo $a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = mn + vn = c$.

Iſt $\beta = R$ (Fig. 14.), ſo iſt:

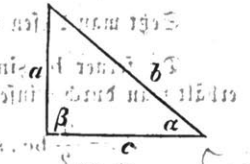


Fig. 14.

$$a \cdot \cos\beta = 0;$$
$$b \cdot \cos\alpha = c;$$

alſo $a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = c$.

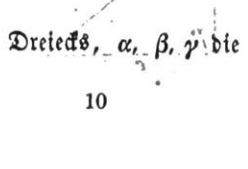
Iſt β ein ſtumpfer Winkel (Fig. 15.), ſo iſt:

Fig. 15.

$$a \cdot \cos\beta = -a \cdot \cos(2R - \beta) = -mn;$$
$$b \cdot \cos\alpha = nv;$$

alſo $a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = -mn + nv = c$.

Die Beweiſe zu 2) und 3) ergeben ſich in derſelben Weiſe.



Anm. Die durch die Ausdrücke $a \cdot \cos\beta$, $b \cdot \cos\alpha$ u. ſ. w. dargeſtellten Linien nennt man die Projectionen der Seiten a und b auf c u. ſ. w. (Vergl. Planimetrie §. 114.). Die Summe der Projectionen zweier Seiten eines Dreiecks auf die dritte iſt alſo gleich der dritten Seite.

§. 33. Lehrſatz.

Sind a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denſelben gegenüberliegenden Winkel, ſo iſt:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$;
2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$;
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Bew. zu 1). Es iſt nach §. 32. 1:

$a \cdot \cos\beta = c - b \cdot \cos\alpha$ oder $a^2\cos^2\beta = c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2cb \cdot \cos\alpha$

oder $a^2(1 - \sin^2\beta) = c^2 + b^2(1 - \sin^2\alpha) - 2cb \cdot \cos\alpha$

oder $a^2 - a^2\sin^2\beta = c^2 + b^2 - b^2\sin^2\alpha - 2cb \cdot \cos\alpha$

oder $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$,

weil nach §. 31. $a^2\sin^2\beta = b^2\sin^2\alpha$ iſt.

Die Beweiſe zu 2) und 3) werden ebenſo geführt.

Anm. Ueber den geometriſchen Beweis dieſes Satzes vergleiche Planimetrie §. 114 u. 116.

§. 34. Lehrſatz.

Sind a, b, c die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denſelben gegenüberliegenden Winkel, J der Inhalt, ſo iſt:

$$J = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha.$$

Bew. Iſt h die zu c gehörige Höhe, ſo iſt $J = \frac{1}{2} ch$.

Nun iſt nach §. 31. $h = b \cdot \sin\alpha$.

Setzt man dieſen Werth ein, ſo erhält man $J = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$.

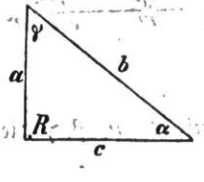
Da ferner $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ und $c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$ iſt, ſo erhält man durch Einſetzen dieſer Werthe:

$$J = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma.$$

§. 35. Aufgabe.

Es ſollen aus drei gegebenen Stücken (Seiten oder Winkeln) eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen drei und außerdem der Inhalt beſtimmt werden.

Fig. 16.



Auflöſ. Man erhält folgende Gleichungen:

1) $\sin\alpha = \cos\gamma = a : b$;
2) $\cos\alpha = \sin\gamma = c : b$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma = a : c$;

$$4)\ b^2 = a^2 + c^2;$$

$$5)\ J = \frac{1}{2}\,ac.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich, wenn zwei*) der in ihnen vorkommenden Größen gegeben sind (darunter wenigstens eine Seite), die übrigen leicht berechnen.

Sind gegeben b und α, so ist:

$\gamma = R - \alpha$; $a = b \sin\alpha$ (nach 1); $c = b \cos\alpha$ (nach 2); $J = \frac{1}{2}b^2 . \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{4}b^2 . \sin 2\alpha$.

Sind gegeben c und α, so ist:

$\gamma = R - \alpha$; $b = c \sec\alpha$ (nach 2); $a = c \operatorname{tg}\alpha$ (nach 3); $J = \frac{1}{2}c^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Sind gegeben c und b, so ist:

$\cos\alpha = \sin\gamma = c : b$ (nach 2); $a = \sqrt{b^2 - c^2}$; $J = \frac{1}{2}c\sqrt{b^2 - c^2}$.

Sind gegeben c und a, so ist:

$b = \sqrt{c^2 + a^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma = a : c$ (nach 3); $J = \frac{1}{2}ac$.

Ist $c = 32{,}69$ und $\alpha = 42^0 44' 15''$, so erhält man:

$$a = c . \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\log a = \log 32{,}69 + \log \operatorname{tg} 42^0 44' 15'',$$

$$\text{oder } \log a = 1{,}5144149 + 9{,}9656653 - 10,$$

$$\text{oder } \log a = 1{,}4800802,$$

$$\text{und } a = 30{,}2051.$$

Ferner erhält man $b = c . \sec\alpha = c : \cos\alpha$,

$$\log b = 1{,}5144149 - (9{,}8659844 - 10),$$

$$\text{oder } \log b = 1{,}6484305,$$

$$\text{und } b = 44{,}5072.$$

Ferner erhält man $J = \frac{1}{2}c^2 . \operatorname{tg}\alpha$,

$$\log J = 2\log c + \log \operatorname{tg}\alpha - \log 2,$$

$$\text{oder } \log J = 3{,}0288298 + 9{,}9656653 - 0{,}3010300,$$

$$\text{oder } \log J = 2{,}6934651,$$

$$\text{und } J = 493{,}702.$$

Anm. Es ist bei diesen und ähnlichen Rechnungen nicht zu übersehen, daß die gewöhnlichen Logarithmentafeln nur auf sieben Stellen berechnet sind,

*) Die dritte der bekannten Größen ist der rechte Winkel.

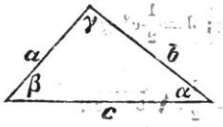
die Reſultate daher nur annähernd richtig ſein können. Aus dieſem Grunde können zuweilen, wo es ſich um kleine Größen handelt, brauchbare Reſultate mit Hülfe ſiebenſtelliger Logarithmen überhaupt nicht erlangt werden.

§. 36. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind zwei Winkel und eine Seite bekannt. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden.

Auflöſ. Gegeben ſeien c, α, β.

Fig. 17.



Zunächſt iſt $\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$; $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$.

Zur Beſtimmung von a und b dienen die Gleichungen:

1) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ oder $a = c \cdot \sin\alpha : \sin\gamma$;

2) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ $\quad b = c \cdot \sin\beta : \sin\gamma$.

Ferner iſt $J = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$.

Beiſpiel. Es ſei $\alpha = 34^0\,24'\,58''$; $\beta = 42^0\,32'$; $c = 63,14$; dann erhält man

$$\gamma = 2R - (\alpha+\beta) = 103^0\,3'\,2'';$$

ferner $\log a = \log 63,14 + \log\sin 34^0\,24'\,58'' - \log\sin 103^0\,3'\,2''$,

oder $\log a = 1,8003046 + 9,7522014 - 10 - 9,9886354 + 10$,

oder $\log a = 1,5638706$,

und $a = 36,6328$;

ferner $\log b = 1,8003046 + 9,8299589 - 10 - 9,9886354 + 10$,

oder $\log b = 1,6416281$,

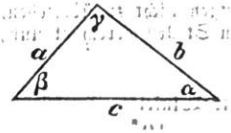
und $b = 43,8155$.

§. 37. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind die drei Seiten bekannt; es ſollen die drei Winkel beſtimmt werden.

Auflöſ. I. Es iſt $J = \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$ (Planimetrie §. 118);

Fig. 18.



ferner $J = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$,

daher $\sin\gamma = \frac{1}{2ab}\sqrt{SABC}$.

Auf dieselbe Art findet man:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2bc}\sqrt{SABC};$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2ac}\sqrt{SABC}.$$

Auflöf. II. Es ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,.\cos\beta$,

$$= a^2 + c^2 - 2ac\left(2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1\right)$$

$$= a^2 + c^2 + 2ac - 4ac\,.\cos^2\frac{\beta}{2};$$

daher $4ac\,.\cos^2\frac{\beta}{2} = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b) = SB$;

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{SB}{ac}}.$$

Auf dieselbe Art findet man:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{SA}{bc}}; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{SC}{ab}}.$$

Auflöf. III. Es ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,.\cos\beta$,

$$= a^2 + c^2 - 2ac\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right),$$

$$= (a-c)^2 + 4ac\,.\sin^2\frac{\beta}{2};$$

daher $4ac\,.\sin^2\frac{\beta}{2} = b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c).(b+c-a) = CA$,

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{AC}{ac}}.$$

Auf dieselbe Art findet man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BC}{bc}}; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{AB}{ab}}.$$

Auflöf. IV. Durch Verbindung der in Auflöf. II. und III. erhaltenen Resultate entstehen die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{BC}{SA}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{AC}{SB}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{AB}{SC}}.$$

Beiſpiel zu Auflöſ. IV. Es ſei $a=53{,}2$; $b=44{,}8$; $c=20{,}6$; dann erhält man:

$$S=118{,}6;\ A=12{,}2;\ B=29;\ C=77{,}4;$$
$$\log S=2{,}0740847;\ \log A=1{,}0863598;\ \log B=1{,}4623980;$$
$$\log C=1{,}8887410.$$

Daher iſt:

$$\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\log B+\log C-\log S-\log A)=10{,}0953472-10;$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}(\log A+\log C-\log S-\log B)=9{,}7193090-10;$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}(\log A+\log B-\log S-\log C)=9{,}2929660-10;$$

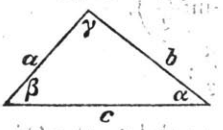
folglich $\alpha=102^\circ 28' 44{,}8''$; $\beta=55^\circ 18' 23{,}9''$; $\gamma=22^\circ 12' 51''$.

§. 38. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind zwei Seiten und der von denſelben eingeſchloſſene Winkel bekannt. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden.

Gegeben ſeien a, c, β.

Fig. 19.



Auflöſ. I. Es iſt $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$.

$$=(a+c)^2-4ac\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}\ (\text{§. 37, II.}),$$

daher $b=\sqrt{(a+c)^2-4ac\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

Dieſe Form iſt unbequem zur logarithmiſchen Berechnung.

Auflöſ. II. Es iſt $a:c=\sin\alpha:\sin\gamma$,

daher $$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\sin\alpha-\sin\gamma}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\ (\text{nach §. 28.}),$$

folglich $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)=\frac{a-c}{a+c}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$.

Da $(\alpha+\gamma)$ bekannt iſt, ſo erhält man durch die Gleichung zunächſt $(\alpha-\gamma)$, und aus $(\alpha+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)$ alsdann α und γ. Sind dieſe Winkel gefunden, ſo erhält man endlich noch

$$b = (c \cdot \sin\beta) : \sin\gamma.$$

Beiſpiel zu Auflöſ. II. Es ſei $a = 150{,}8$; $c = 60{,}7$; $\beta = 40^\circ 28'$; dann erhält man:

$$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \log 90{,}1 + \log\operatorname{tg} 40^\circ 28' - \log 211{,}5$$
$$= 1{,}9547248 + 9{,}9309872 - 2{,}3253104$$
$$= 9{,}5604016,$$
$$\text{und } \alpha-\gamma = 39^\circ 56' 37{,}3''.$$

Aus $\alpha+\gamma = 139^\circ 32'$ und $\alpha-\gamma = 39^\circ 56' 37{,}3''$ folgt

$$\alpha = 89^\circ 44' 18{,}6''; \quad \gamma = 49^\circ 47' 41{,}3''.$$

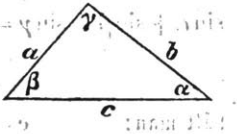
Ferner iſt $\log b = \log c + \log\sin\beta - \log\sin\gamma$
$$= 1{,}7831887 + 9{,}8122484 - 9{,}8829441$$
$$= 1{,}7124930;$$
daher $b = 51{,}5813$.

§. 39. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind zwei Seiten und ein nicht von dieſen Seiten eingeſchloſſener Winkel bekannt. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden.

Gegeben ſeien a, b, α.

Fig. 20.



Auflöſ. Es iſt $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$,

daher $\sin\beta = (b \cdot \sin\alpha) : a$.

Dieſer für $\sin\beta$ gefundenene Werth $(b \cdot \sin\alpha) : a$ kann aber ſowol dem Winkel β, wie auch dem Winkel $(2R-\beta)$ zugehören, und die Aufgabe läßt daher zwei Löſungen zu, wenn nicht zugleich angegeben iſt, ob β ſpitz oder ſtumpf ſein ſoll. (Vergleiche die beim 4. Congruenzſatz angegebene Conſtruction.) Für die übrigen Stücke erhält man die Gleichungen:

$$\gamma = 2R - (\alpha+\beta),$$
$$c = (b \cdot \sin\gamma) : \sin\beta,$$

welche ebenfalls zwei Löſungen liefern, wenn die Natur von β nicht beſtimmt iſt.

Beispiel. Es sei $b=76{,}32$; $a=53{,}14$; $\alpha=34^\circ\,24'\,58''$, so ist

$$\log\sin\beta = \log 76{,}32 + \log\sin 34^\circ\,24'\,58'' - \log 53{,}14$$
$$= 1{,}8826384 + 9{,}7522014 - 1{,}7254216$$
$$= 9{,}9094192;$$

daher $\beta = 54^\circ\,16'$ oder $125^\circ\,44'$.

Ist $\beta = 54^\circ\,16'$, so ist $\gamma = 91^\circ\,19'\,2''$; $c = 98{,}424$.

Ist $\beta = 125^\circ\,44'$, so ist $\gamma = 19^\circ\,51'\,2''$; $c = 31{,}925$.

Fünftes Capitel.

Von den zusammengesetzten trigonometrischen Aufgaben.

§. 40. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die drei Winkel α, β, γ und die Summe s der drei Seiten a, b, c. Es sollen diese Seiten und der Inhalt J bestimmt werden.

Auflös. Es ist $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$, daher

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \sin\gamma = (a+b+c) : c = s : c,$$

$$\text{also } c = \frac{s \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $\sin\gamma = 2 \cdot \sin\frac{1}{2}\gamma \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma$, und $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma$ (§. 20), so erhält man:

$$c = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\gamma}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta};$$

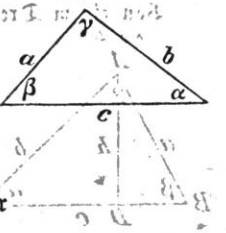
Ebenso erhält man $b = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma}$; $a = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma}$;

ferner $J = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{4}s^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$.

§. 41. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind bekannt die Seite c, der ihr gegenüberliegende Winkel γ, und die Summe s der Seiten a und b. Es ſollen die Seiten a und b, und die ihnen gegenüberliegenden Winkel α und β beſtimmt werden.

Fig. 21.



Auflöſ. Es iſt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma,$$

$$= (a+b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} \quad (\text{§. 37, II.})$$

$$= s^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

daher $ab = (s^2 - c^2) : 4\cos^2\frac{\gamma}{2} = p.$

Aus $(a+b) = s$ und $ab = p$ findet man aber

$$a = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right).$$

Die Winkel ſind nun leicht zu beſtimmen.

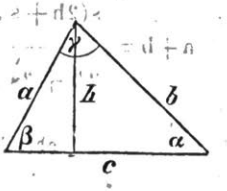
§. 42. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind bekannt die Seite c, der ihr gegenüberliegende Winkel γ und die zu c gehörende Höhe h. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden.

Auflöſ. Es iſt 1) $c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$ (ſiehe §. 41).

Ferner iſt $2J = ch$, aber auch $2J = ab \cdot \sin\gamma$,

Fig. 22.



daher 2) $ab = \frac{ch}{\sin\gamma} = \frac{ch}{2\sin\frac{1}{2}\gamma \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma} = p.$

Setzt man dieſen Werth ein in 1), ſo erhält man:

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ch \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma,$$

daher 3) $a+b = \sqrt{c^2 + 2ch \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma} = s.$

Aus $ab = p$ und $(a+b) = s$ erhält man endlich

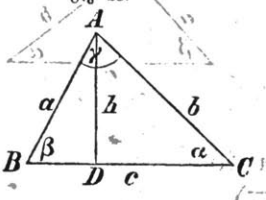
$$a = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right).$$

§. 43. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Summe s der drei Seiten a, b, c, der der Seite c gegenüberliegende Winkel γ und die zu c gehörende Höhe h. Es sollen die übrigen Stücke bestimmt werden.

Fig. 23.



Auflös. Es ist:

$2J = ab \cdot \sin\gamma$ und $2J = hc = h[s - (a+b)]$, daher

1) $ab \cdot \sin\gamma = hs - h(a+b)$.

Ferner ist $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}$, oder, da $c = s - (a+b)$ ist,

$s^2 + (a+b)^2 - 2s \cdot (a+b) = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}$, oder

$$2)\ ab = \frac{2s(a+b) - s^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Setzt man diesen Werth ein in 1), so erhält man:

$$\frac{[2s(a+b) - s^2] \cdot \sin\gamma}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} = hs - h(a+b), \text{ oder}$$

$$a+b = \frac{s(2h + s \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma)}{2h + 2s \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{s(2h + 2s \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma) - s^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{2h + 2s \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma};$$

$$\text{oder } 3)\ (a+b) = s - \frac{s^2}{2h \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma + 2s}.$$

Hieraus folgt $4)\ c = s - (a+b) = \dfrac{s^2}{2h \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma + 2s}$.

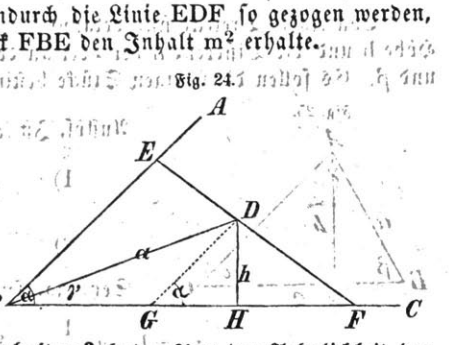
Aus $a+b=s-c$ (4) und
$a \cdot b=(h \cdot c):\sin\gamma$ (1)
sind a und b leicht zu bestimmen. (Vergl. §§. 41. und 42.)

§. 44. Aufgabe.

Innerhalb der Fläche des Winkels $ABC=\alpha$ ist der Punkt D gegeben. Es soll durch D hindurch die Linie EDF so gezogen werden, daß das abgeschnittene Dreieck FBE den Inhalt m^2 erhalte.

Auflös. Der Punkt D sei gegeben durch die Linie $BD=a$ und den Winkel γ. Alsdann ist auch die auf BC senkrecht stehende Linie $DH=h$ bekannt durch die Gleichung $h=a \cdot \sin\gamma$. Zieht man nun $DG \parallel AB$, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke EBF und DGF, von denen EBF den bekannten Inhalt m^2 hat. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

Fig. 24.



$$\triangle EBF : \triangle DGF = BF^2 : GF^2, \text{ oder}$$

$$m^2 : \frac{1}{2} GF \cdot h = BF^2 : GF^2, \text{ oder}$$

$$1) \qquad m^2 : \frac{h}{2} = BF^2 : GF.$$

Bezeichnet man nun BF durch x, so ist $GF=x-BG=x-(BH-GH)=x-(a \cdot \cos\gamma - h \cdot \operatorname{ctg}\alpha)$, oder, wenn man für h seinen Werth $a \cdot \sin\gamma$ einsetzt:

$$GF=x-\left(a \cdot \cos\gamma - \frac{a \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=x-a\left(\frac{\cos\gamma\sin\alpha-\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=x-a \cdot \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}=x-p.$$

Setzt man diesen Werth ein in 1), so erhält man:

$$m^2 : \frac{h}{2} = x^2 : (x-p), \text{ oder}$$

$$2) \quad x^2 - \frac{2m^2}{h} \cdot x = -\frac{2m^2 p}{h}.$$

Setzt man nun $\frac{m^2}{h} = n$, so erhält man

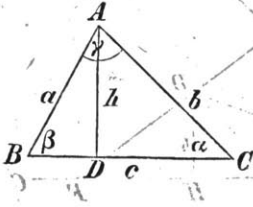
3) $x = n \mp \sqrt{n^2 - 2np}$.

Man erhält also zwei Lösungen.

§. 45. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Seite c, die zu ihr gehörende Höhe h und die Differenz δ der zwei an der Seite c liegenden Winkel α und β. Es sollen die übrigen Stücke bestimmt werden.

Fig. 25.



Auflös. Ist $(\alpha+\beta)=\varepsilon$, $(\alpha-\beta)=\delta$, so ist

1) $\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)$;

2) $\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)$.

Setzt man ferner BD = v, DC = w, so ist:

$$v = h \cdot \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta),$$

$$w = h \cdot \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta), \text{ daher}$$

$$c = v + w = h\left[\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta) + \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right], \text{ oder}$$

$$c = h \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)} = h \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\frac{1}{2}(\cos\delta-\cos\varepsilon)} \quad \text{(n. §. 7.)}$$

und 3) $c \cdot \cos\delta = 2h \cdot \sin\varepsilon + c \cdot \cos\varepsilon$.

Setzt man in dieser Gleichung, in der $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ unbekannt sind, $\sin\varepsilon = \sqrt{1-\cos^2\varepsilon}$, so erhält man

$$4)\ \cos\varepsilon = \frac{c^2\cos\delta \mp 2h\sqrt{c^2\sin^2\delta + 4h^2}}{c^2+4h^2}$$

Aus ε und δ findet man nun α und β nach 1) und 2).

Die Gleichung 3) läßt sich noch auf andere, bequemere Art lösen.

Aus $c \cdot \cos\delta = 2h \cdot \sin\varepsilon + c\cos\varepsilon$ folgt zunächst

$$\sin\varepsilon + \frac{c}{2h}\cos\varepsilon = \frac{c}{2h}\cos\delta.$$

Nun kann man $c : 2h = tg\,v$ ſetzen; alsdann iſt

$$\sin\varepsilon + tg\,v\cos\varepsilon = tg\,v\cos\delta,$$

oder $$\sin\varepsilon\cos v + \sin v\cos\varepsilon = \sin v\cos\delta,$$

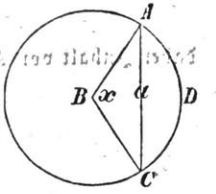
oder $$\sin(\varepsilon + v) = \sin v\cos\delta.$$

Aus dieſer Gleichung erhält man $(\varepsilon + v)$, und da v bekannt iſt, ε. Es kann jedoch $(\varepsilon + v)$ in zwei verſchiedenen Quadranten liegen, und die Löſung giebt daher ein zweifaches Reſultat.

§. 46. Aufgabe.

Aus der Sehne a und dem Radius r ſoll der Inhalt des Kreisausſchnittes ABCD beſtimmt werden.

Fig. 26.



Auflöſ. Der Winkel x iſt gegeben durch die Gleichung

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a}{2r}.$$

Bezeichnet nun $J = r^2\pi$ den Inhalt des Kreiſes, i den Inhalt von ABCD, ſo iſt:

$$i : r^2\pi = x : 360,$$

daher $$i = \frac{x}{360} \cdot r^2\pi.$$

§. 47. Aufgabe.

Aus der Sehne a und dem Radius r ſoll der Inhalt des Kreisabſchnittes ACD beſtimmt werden.

Auflöſ. Nach vorigem Paragraph iſt:

Fig. 27.

Inhalt von $ABCD = \frac{x}{360} \cdot r^2\pi$. Ferner iſt:

„ „ $ABC = \frac{r^2}{2} \cdot \sin x$. Folglich iſt:

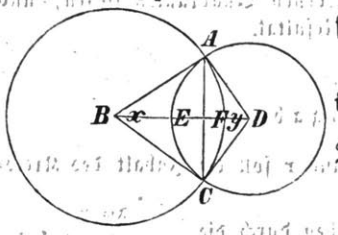
„ „ $$ACD = \frac{r^2}{2}\left(\frac{x}{180}\pi - \sin x\right).$$

Iſt x in Bogenmaaß berechnet, ſo hat man ſtatt 180 die Zahl π zu ſetzen. Dann iſt $ACD = \frac{r^2}{2}(x - \sin x)$.

§. 48. Aufgabe.

Aus den Radien r und ϱ zweier ſich ſchneidenden Kreiſe und aus der gemeinſchaftlichen Sehne a ſoll der Inhalt des Mondes AECF beſtimmt werden.

Fig. 28.



Auflöſ. Iſt $AB=r$, $AD=\varrho$, $AC=a$, ſo iſt $\sin\frac{x}{2}=\frac{a}{2r}$; $\sin\frac{y}{2}=\frac{a}{2\varrho}$.

Iſt nun x in Bogenmaaß beſtimmt, ſo iſt nach vorigem Paragraph

Inhalt von $ACF=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$,

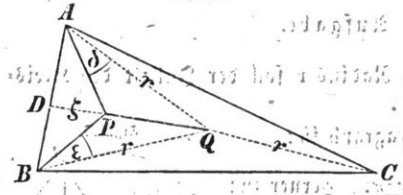
" " $ACE=\frac{1}{2}\varrho^2(y-\sin y)$,

daher Inhalt von $AECF=\frac{1}{2}[r^2(x-\sin x)+\varrho^2(y-\sin y)]$.

§. 49. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ſind bekannt der Radius r des umgeſchriebenen und der Radius ϱ des eingeſchriebenen Kreiſes. Es ſoll die Entfernung x der beiden Mittelpunkte von einander beſtimmt werden.

Fig. 29.



Auflöſ. Es ſei Q der Mittelpunkt des umgeſchriebenen Kreiſes, daher $QB=QC=QA=r$; ferner P der Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes, $PD=\varrho$ der Radius deſſelben, $PQ=x$. Dann iſt im Dreieck PBQ:

1) $x^2=PB^2+r^2-2PB\,.\,r\,.\cos\varepsilon$.

In dieſer Gleichung ſind PB und ε näher zu beſtimmen. Bezeichnet man die bei A, B, C liegenden Winkel des Dreiecks ABC durch α, β, γ, ſo iſt $\angle DBP=\frac{1}{2}\beta$, daher

2) $BP=\varrho\,.\,\mathrm{cosec}\frac{1}{2}\beta$.

Ferner iſt:

$$\angle QCB = \angle QBC \text{ oder } \angle QCB = \frac{\beta}{2} - \varepsilon,$$

$$\angle QCA = \angle QAC \text{ „ } \angle QCA = \frac{\alpha}{2} - \delta,$$

$$\angle QBD = \angle QAD \text{ „ } \frac{\beta}{2} + \varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \delta.$$

Durch Addition ergiebt sich hieraus:

$$\gamma + \frac{\beta}{2} + \varepsilon = \frac{\beta}{2} + \alpha - \varepsilon, \text{ oder}$$

$$3) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

Setzt man die in 2) und 3) gefundenen Werthe ein in 1), so ist:

$$x^2 = \frac{\varrho^2}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + r^2 - \frac{2\varrho r}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \text{ oder}$$

$$(r^2 - x^2)\sin^2\frac{\beta}{2} + \varrho^2 = 2\varrho r \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

Diese Gleichung geht, da $\sin\frac{1}{2}\beta = \cos\frac{1}{2}(a + \gamma)$ und

$2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \cos\alpha + \cos\gamma$ ist, über in

$$4) \quad (r^2 - x^2)\sin^2\frac{\beta}{2} + \varrho^2 = r\varrho(\cos\alpha + \cos\gamma).$$

Ebenso würde man im Dreieck PAQ erhalten haben:

$$5) \quad (r^2 - x^2)\sin^2\frac{\alpha}{2} + \varrho^2 = r\varrho(\cos\beta + \cos\gamma).$$

Subtrahirt man nun 5) von 4), so erhält man:

$$6) \quad (r^2 - x^2)\left(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = r\varrho(\cos\alpha - \cos\beta), \text{ oder}$$

$$(r^2 - x^2)\left(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2r\varrho\left(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),^*)$$

$$\text{oder } r^2 - x^2 = 2r\varrho,$$

$$\text{daher } x = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}.$$

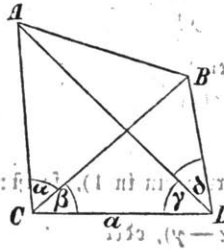
---

*) Man setzt $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}$.

§. 50. Aufgabe.

Von einem Vierecke ſind bekannt die Seite $CD = a$ und die vier an derſelben durch die Diagonalen gebildeten Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden.

Fig. 30.



Auflöſ. Es iſt im $\triangle ACD$

$$1)\ AD = \frac{a \cdot \sin(2R - \alpha - \beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$2)\ AC = \frac{a \cdot \sin(2R - \alpha - \beta - \gamma)}{\sin\gamma}.$$

Ferner iſt im $\triangle BCD$:

$$3)\ BD = \frac{a \cdot \sin(2R - \beta - \gamma - \delta)}{\sin\beta};$$

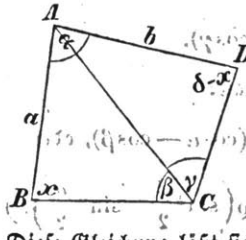
$$4)\ BC = \frac{a \cdot \sin(2R - \beta - \gamma - \delta)}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

Da nun AD, BD und δ bekannt ſind, ſo erhält man aus dieſen Stücken leicht die Seite AB und den Winkel ABD (nach §. 38).

§. 51. Aufgabe.

Von dem Vierecke ABCD ſind bekannt die Seiten $AB = a$ und $AD = b$, der Winkel $BAD = \alpha$, und die an der Ecke C durch die Diagonale AC gebildeten Winkel β und γ. Es ſollen die übrigen Stücke beſtimmt werden (Pothenot'ſche Aufgabe).

Fig. 31.



Auflöſ. Bezeichnet man $4R - \alpha - \beta - \gamma$ durch δ, und iſt $\angle ABC = x$, ſo iſt $\angle ADC = \delta - x$.

Nun iſt $AC = \frac{a \cdot \sin x}{\sin\beta}$, ferner auch $AC = \frac{b \cdot \sin(\delta - x)}{\sin\gamma}$, alſo

$$\frac{a \sin x}{\sin\beta} = \frac{b \sin(\delta - x)}{\sin\gamma}.$$

Dieſe Gleichung läßt ſich in verſchiedener Art löſen.

1) Aus $\frac{a \sin x}{\sin\beta} = \frac{b \sin(\delta - x)}{\sin\gamma}$ folgt

$$\frac{a \sin x}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma} \sin\delta \cos x - \frac{b}{\sin\gamma} \cos\delta \sin x,$$

$$\text{oder } \frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma}\sin\delta\,\operatorname{ctg} x - \frac{b}{\sin\gamma}\cos\delta,$$

$$\text{oder } \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\delta + \frac{a\sin\gamma}{b\sin\beta\sin\delta}.$$

2) Aus $\dfrac{a\sin x}{\sin\beta} = \dfrac{b\sin(\delta - x)}{\sin\gamma}$ folgt

$$\frac{\sin(\delta - x)}{\sin x} = \frac{a\sin\gamma}{b\sin\beta}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin x - \sin(\delta - x)}{\sin x + \sin(\delta - x)} = \frac{b\sin\beta - a\sin\gamma}{b\sin\beta + a\sin\gamma},$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}\frac{1}{2}(2x - \delta)\,.\,\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\delta = \frac{b\sin\beta - a\sin\gamma}{b\sin\beta + a\sin\gamma},$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}\frac{1}{2}(2x - \delta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta\,.\,\frac{b\sin\beta - a\sin\gamma}{b\sin\beta + a\sin\gamma}.$$

3) Setzt man in der eben gefundenen Lösung

$a\sin\gamma : b\sin\beta = \operatorname{tg}\varphi$, so ist

$$\frac{b\sin\beta - a\sin\gamma}{b\sin\beta + a\sin\gamma} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{ctg}(45 + \varphi), \text{ daher}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2x - \delta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta\,.\,\operatorname{ctg}(45 + \varphi).$$

Anm. Ist $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, also auch $\delta = 2R$, so ist die Aufgabe nicht zu lösen, wie sich leicht aus einer Betrachtung der gewonnenen Resultate ergiebt. Dasselbe findet man bei der Lösung durch geometrische Construction. Schlägt man nämlich über der Linie AD als Sehne einen Kreis, so daß der zu AD gehörende Peripheriewinkel $= \gamma$ ist, ferner einen zweiten Kreis über der Sehne AB, so daß zu derselben der Peripheriewinkel β gehört, so erhält man den Punkt C als Schneidungspunkt beider Kreise. Ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, so fallen beide Kreise zusammen und liefern keinen Schneidungspunkt.

Aufgaben.

A. Zur numerischen Berechnung von Dreiecken.

In Nachfolgendem sind von mehreren Dreiecken angegeben die Seiten a, b, c, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α, β, γ, und der Inhalt J. Es sollen aus je dreien dieser Stücke die übrigen berechnet werden. Wenn von einem in der Columne A stehenden Drei-

ecke zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel gegeben werden, so ist die zweite mögliche Lösung in der Columne B oder C zu suchen.*)

		A	B	A	B
1)	a =	58,0600	58,0600	78,6210	78,6210
	b =	89,3780	89,3780	19,7758	19,7758
	c =	106,5804	43,3237	81,0700	71,4220
	J =	2594,6423	1054,6924	777,3963	684,8796
	α =	33° 0′ 28″	33° 0′ 28″	75° 52′ 52″	104° 7′ 8″
	β =	56° 59′ 32″	123° 0′ 28″	14° 7′ 8″	14° 7′ 8″
	γ =	90° 0′ 0″	23° 59′ 4″	90° 0′ 0″	61° 45′ 44″
5)	a =	63,0900	63,0900	46,2800	46,2800
	b =	58,2942	58,2942	213,6823	213,6823
	c =	85,8986	6,7769	218,6366	199,0440
	J =	1838,8925	145,0774	4944,6080	4501,5083
	α =	47° 15′ 45″	132° 44′ 15″	12° 13′ 14″	12° 13′ 14″
	β =	42° 44′ 15″	42° 44′ 15″	77° 46′ 46″	102° 13′ 14″
	γ =	90° 0′ 0″	4° 31′ 30″	90° 0′ 0″	65° 33′ 32″
9)	a =	138,2600	138,2600	55,5000	55,5000
	b =	37,1997	37,1997	49,5000	49,5000
	c =	143,1770	123,8468	74,3672	8,4716
	J =	2571,6171	2224,4260	1373,6250	156,4790
	α =	74° 56′ 27″	105° 3′ 33″	48° 16′ 14″	131° 43′ 46″
	β =	15° 3′ 33″	15° 3′ 33″	41° 43′ 46″	41° 43′ 46″
	γ =	90° 0′ 0″	59° 52′ 54″	90° 0′ 0″	6° 32′ 28″
13)	a =	13,7754	13,7754	40,4848	40,4848
	b =	18,7072	18,7072	42,9573	42,9573
	c =	23,2319	6,8957	59,0284	3,4950
	J =	128,8500	38,2451	869,5600	51,4862
	α =	36° 22′ 0″	36° 22′ 0″	43° 18′ 10″	43° 18′ 10″
	β =	53° 38′ 0″	126° 22′ 0″	46° 41′ 50″	133° 18′ 10″
	γ =	90° 0′ 0″	17° 16′ 0″	90° 0′ 0″	3° 23′ 40″

*) Es ist nicht zu übersehen, daß bei den zu berechnenden Werthen die letzte, oder die beiden letzten Decimalstellen nur dann stimmen können, wenn dieselben drei Stücke als bekannt gegeben werden, die bei der Berechnung dieser Dreiecke zu Grunde gelegt worden sind. Aehnliches ist bei den Winkeln zu beachten.

		A	B	C
17)	a =	16,4500	16,4500	16,4500
	b =	19,2342	19,2342	3,9337
	c =	13,9620	7,1158	13,9620
	J =	112,3241	57,2466	22,9725
	α =	56° 46′ 30″	56° 46′ 30″	123° 13′ 30″
	β =	77° 59′ 22″	102° 0′ 38″	11° 32′ 22″
	γ =	45° 14′ 8″	21° 12′ 52″	45° 14′ 8″
20)	a =	17,8600	17,8600	17,8600
	b =	14,4835	14,4835	3,8233
	c =	16,2359	6,7263	16,2359
	J =	111,0600	46,0107	29,3175
	α =	70° 50′ 6″	109° 9′ 54″	109° 9′ 54″
	β =	49° 59′ 46″	49° 59′ 46″	11° 39′ 58″
	γ =	59° 10′ 8″	20° 50′ 20″	59° 10′ 8″
23)	a =	28,4500	28,4500	9,1997
	b =	44,0943	31,6738	44,0943
	c =	46,9685	46,9685	46,9685
	J =	612,1154	439,6956	197,9367
	α =	36° 14′ 11″	36° 14′ 11″	11° 1′ 11″
	β =	66° 22′ 19″	41° 9′ 19″	66° 22′ 19″
	γ =	77° 23′ 30″	102° 36′ 30″	102° 36′ 30″
26)	a =	44,3100	44,3100	44,3100
	b =	30,0324	30,0324	26,6061
	c =	34,1231	31,1075	34,1231
	J =	511,7465	466,5217	453,3624
	α =	87° 7′ 20″	92° 52′ 40″	92° 52′ 40″
	β =	42° 36′ 11″	42° 36′ 11″	36° 50′ 51″
	γ =	50° 16′ 29″	44° 31′ 9″	50° 16′ 29″
29)	a =	30,2500	30,2500	22,4263
	b =	47,5261	47,5261	47,5261
	c =	39,7534	33,7999	39,7534
	J =	598,3524	508,7444	443,5980

		A	B	C
α	=	39° 18′ 6″	39° 18′ 6″	28° 0′ 26″
β	=	84° 21′ 10″	95° 38′ 50″	95° 38′ 50″
γ	=	56° 20′ 44″	45° 3′ 4″	56° 20′ 44″
32) a	=	54,2922	43,0610	54,2922
b	=	43,0610	43,0610	28,9004
c	=	64,7466	64,7466	64,7466
J	=	1158,9560	919,2072	777,8336
α	=	56° 14′ 24″	41° 15′ 12″	56° 14′ 24″
β	=	41° 15′ 12″	41° 15′ 12″	26° 16′ 0″
γ	=	82° 30′ 24″	97° 29′ 36″	97° 29′ 36″

B. Aufgaben zu allgemeiner Lösung.

1) Von einem Dreiecke sind gegeben die drei Winkel α, β, γ und die Differenz $a-b=d$. Es soll die Seite b bestimmt werden.

2) Von einem Dreiecke ist gegeben $a-b=d$, ferner c und β. Es soll die Seite b bestimmt werden.

3) Von einem Dreiecke ist gegeben $a-b=d$, ferner c und γ. Es soll die Seite b bestimmt werden.

4) Von einem Dreiecke ist gegeben $a-b=d$, ferner c, und $\alpha-\beta=\delta$. Es soll der Winkel β bestimmt werden.

5) Von einem Dreiecke ist gegeben $a+b=s$, ferner c und γ. Es soll a bestimmt werden.

6) Von einem Dreiecke ist gegeben $a+b=s$, ferner γ und die zur Seite c gehörende Höhe h. Es soll a bestimmt werden.

7) Von einem Dreiecke sind gegeben der Winkel γ und die beiden Stücke m und n, in welche die Seite c durch die zu ihr gehörende Höhe zerlegt wird. Es soll der Winkel α bestimmt werden.

8) Von einem Dreiecke sind gegeben die drei Winkel und die zu c gehörende Höhe h. Es soll die Seite c bestimmt werden.

9) Von einem Dreiecke sind gegeben die Seite c und die zu den Seiten a und b gehörenden Höhen h und H. Es sollen die Winkel α, β, γ bestimmt werden.

10) Von einem Dreiecke sind gegeben der Inhalt J, ferner c und γ. Es sollen a und b bestimmt werden.

Auflösungen.

1) $b = \frac{d \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$;

2) $b = \frac{c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta}{2c\cos\beta - 2d}$;

3) $b = -\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + (c^2 - d^2)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$;

4) β wird erhalten durch die Gleichung $d \cdot \sin(\beta + \frac{1}{2}\delta) = c \cdot \sin\frac{1}{2}\delta$;

5) $a = \frac{1}{2}s \mp \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}(s^2 - c^2)\sec^2\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$;

6) $a = \frac{1}{2}s \mp \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - ch\operatorname{cosec}\gamma}$;

$$c = -h \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma \mp \sqrt{s^2 + h^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2}\gamma\right)};$$

7) α wird erhalten aus den Gleichungen $\alpha + \beta = 2R - \gamma$ und $\sin(\alpha - \beta) = (m - n) \cdot \sin\gamma : (m + n)$;

8) $c = h\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$;

9) $\sin\beta = h : c$; $\sin\alpha = H : c$;

10) a und b werden erhalten aus den Gleichungen

$$a + b = \sqrt{4J\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma + c^2} \text{ und } a - b = \sqrt{c^2 - 4J\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma}.$$

Berichtigungen.

Seite 2 §. 4. Beiſp. 8 lies 16 ſtatt 32.
„ 31 Zeile 14 von unten lies $a+(n-1)d$ ſt. $a+(n-1)d$.
„ 57 „ 2 u. 4 von unten lies gemiſchte Zahl ſt. gemiſchten Bruch.
„ 58 „ 11 von unten lies gemiſchte Zahlen ſt. gemiſchte.
„ 69 „ 10 von oben lies -44 ſt. -43.
„ 83 „ 4 „ „ lies $9_{(2)}$ ſt. $9_{(3)}$.
„ 83 „ 7 „ „ lies überall m ſt. n.
„ 89 „ 11 von unten lies $(1+x)^m$ ſt. $(1+m)^m$.
„ 96 „ 14 von oben lies $e^{(x-y)l}$ ſt. $e^{(x-y)}$.
„ 123 „ 6 u. 9. von unten lies Hypotenuſe ſt. Hypothennſe.
„ 141 §. 27. 4) lies $\sin\alpha \cdot \cos\beta$ ſt. $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.
„ 142 Zeile 3 von unten lies $\cos\alpha \pm \sin\alpha$ ſt. $\cos\alpha \pm \cos\alpha$.

Druck von Gebrüder Katz in Dessau.

UNIVERSITY OF CHICAGO
48 685 118

390

UNIVERSITY OF CHICAGO
48 685 118